

Promotion 2003
Année 3
Majeure 1
PHY551

MAJEURE DE PHYSIQUE

Optique quantique 1 : Lasers

Tome II

Alain Aspect

Édition 2005

Table des matières

4	Laser en régime stationnaire : laser continu	7
4.1	Modes de la cavité résonnante	8
4.1.1	Mode d'une cavité fermée sans perte	8
4.1.2	Cavité ouverte en anneau sans pertes : mode quasi cylindrique . . .	9
4.1.3	Cavité avec pertes	12
4.1.4	Conclusion	14
4.2	Équations d'évolution du champ (régime quasi-stationnaire)	15
4.2.1	Laser monomode	15
4.2.2	Laser multimode	17
4.3	Laser monomode	18
4.3.1	Solutions stationnaires	18
4.3.2	Intensité et gain stationnaires	19
4.3.3	Stabilité des solutions stationnaires	22
4.3.4	Seuil laser et transition de phase. Brisure spontanée de symétrie . .	24
4.4	Laser multimode : compétition entre modes	26
4.4.1	Deux modes couplés : équations du problème	26
4.4.2	Un seul mode actif : compétition entre modes	28
4.4.3	Un seul mode actif : bistabilité	30
4.4.4	Deux modes simultanément actifs : fonctionnement multimode . . .	32
4.4.5	Importance de ces phénomènes	33
5	Dynamique des lasers. Lasers en impulsion	35
5.1	Équations d'évolution couplées du champ et des atomes	36
5.1.1	Les équations semi-classiques du laser	36
5.1.2	Élimination adiabatique de la polarisation diélectrique	38
5.1.3	Équations couplées entre le champ et l'inversion de population : raisonnement heuristique	39
5.1.4	Evolutions couplées des atomes et des photons	41
5.1.5	Cas $\Gamma_1 \gg \gamma_{\text{cav}}$: Élimination adiabatique de l'inversion de popula- tion ; régime quasi-stationnaire pour les atomes	45
5.2	Dynamique d'un laser libre	46
5.2.1	Conditions initiales. Démarrage	46
5.2.2	Régime stationnaire	47
5.2.3	Ordres de grandeurs. Types de lasers	47

5.2.4	Démarrage d'un laser de type A	49
5.2.5	Laser relaxé	50
5.3	Laser déclenché	55
5.3.1	Principe	55
5.3.2	Énergie de l'impulsion laser	56
5.3.3	Énergie extraite. Rendement	58
5.3.4	Puissance crête. Durée de l'impulsion	59
5.3.5	Déclenchement par absorbant saturable	60
5.4	Lasers à modes synchronisés	62
5.4.1	Impulsions brèves : au-delà des lasers monomodes	62
5.4.2	Lasers à plusieurs modes incohérents	64
5.4.3	Laser à modes synchronisés	65
5.4.4	Synchronisation des modes : verrouillage de phase	67
5.5	Conclusion	68
6	Description statistique de la lumière laser	71
6.1	Importance d'une description statistique de la lumière	71
6.2	Rappels sur les processus aléatoires	72
6.2.1	Définitions	72
6.2.2	Processus aléatoire stationnaire et ergodique	73
6.2.3	Propriétés de la fonction d'autocorrélation	75
6.2.4	Processus aléatoire complexe, stationnaire, ergodique	76
6.2.5	Densité spectrale de puissance	77
6.2.6	Théorème de Wiener-Khintchine	79
6.2.7	Processus aléatoire quasi-monochromatique	82
6.3	Équation de Langevin	84
6.3.1	Rôle de l'émission spontanée	84
6.3.2	Évolution entre deux émissions spontanées	85
6.3.3	Terme d'évolution dû à l'émission spontanée	86
6.3.4	Taux d'émission spontanée dans un mode de la cavité	88
6.3.5	Équations de Langevin pour l'amplitude et la phase	89
6.4	Fluctuations d'amplitude d'un mode laser	90
6.4.1	Solution stationnaire de l'équation de Langevin	90
6.4.2	Fluctuations d'amplitude pour un laser très au-dessus du seuil	91
6.4.3	Densité spectrale des fluctuations d'amplitude	92
6.4.4	Photodétecteur éclairé par un faisceau laser : fluctuations du photocourant	93
6.5	Diffusion de phase. Largeur de raie d'un laser	94
6.5.1	Laser très au-dessus du seuil	94
6.5.2	Diffusion de la phase	95
6.5.3	Cohérence temporelle. Largeur de raie	98
6.6	Description de quelques expériences d'interférences	100
6.6.1	Interférences à deux ondes à partir d'un laser	100
6.6.2	Discussion	104

6.6.3	Battement entre deux lasers. Corrélation d'intensité	106
6.6.4	Conclusion. Description d'une expérience particulière par des quantités statistiques	109
7	Manipulation d'atomes par laser	111
7.1	Forces radiatives	112
7.1.1	Atome à deux niveaux dans une onde laser quasi-résonnante	112
7.1.2	Paquet d'onde atomique localisé : limite classique	114
7.1.3	Force radiative	116
7.1.4	Force radiative stationnaire pour un atome à deux niveaux fermés .	117
7.1.5	Pression de radiation résonnante	119
7.1.6	Force dipolaire	123
7.2	Refroidissement d'atomes par laser	127
7.2.1	Refroidissement Doppler	127
7.2.2	Coefficient de friction. Mélasse Doppler	129
7.2.3	Fluctuations. Chauffage	131
7.2.4	Fluctuations de la pression de radiation résonnante	132
7.2.5	Diffusion dans l'espace des impulsions : chauffage	134
7.2.6	Température d'équilibre dans une mélasse Doppler	136
7.2.7	Sous la température Doppler : le refroidissement Sisyphe	137
7.2.8	Sous la température de recul	139
7.3	Condensats de Bose-Einstein gazeux. Laser à atomes	141
7.3.1	Condensation de Bose-Einstein	141
7.3.2	Obtention de condensats de Bose-Einstein gazeux : refroidissement laser et refroidissement évaporatif	143
7.3.3	Condensat de Bose-Einstein et laser à atomes	146

Chapitre 4

Laser en régime stationnaire : Laser continu

Au chapitre 3, nous avons donné une présentation des lasers qui permet de comprendre qualitativement un très grand nombre de propriétés de ces sources de lumière. Le cœur d'un laser est un amplificateur de lumière, dont la sortie est réinjectée sur l'entrée, ce qui peut donner lieu à oscillation si le gain est supérieur aux pertes. Cette description nous a permis de faire apparaître la notion de mode, et d'aborder qualitativement des points importants comme la saturation du gain, le caractère monomode ou multimode, les lasers en impulsion.

Lorsqu'on veut décrire de façon plus quantitative le comportement d'un laser, le problème est a priori très complexe, car on a un champ électromagnétique en interaction avec un milieu atomique dans un état non trivial (en inversion de population), et avec des conditions aux limites subtiles (miroirs de rebouclage). L'objet de ce chapitre (et du suivant) est de faire apparaître des équations approchées, qui permettent une excellente description quantitative des lasers. L'élément fondamental de cette description est la notion de mode, qui simplifie énormément la description du champ (partie 4.1). Dans le cas où les atomes atteignent un régime stationnaire vis à vis du champ laser, on obtient alors une équation d'évolution pour le champ (partie 4.2), qui est très simple mais néanmoins non linéaire. La présence de cette non linéarité entraîne une très grande richesse des comportements possibles, dont nous verrons des exemples à propos des lasers monomodes (partie 4.3), et multimode (partie 4.4). Très importants pour la compréhension des lasers, ces exemples de comportement non linéaire ont en fait un caractère générique très marqué, et les notions de brisure spontanée de symétrie, compétition entre solutions, bistabilité, se retrouvent dans toute la physique non-linéaire, et même hors de la physique (en économie, biologie, ...). L'intérêt de ce chapitre s'étend donc bien au-delà de la physique des lasers.

4.1 Modes de la cavité résonnante

Dans cette partie, nous considérons la cavité laser sans milieu amplificateur. (On la désigne souvent sous le nom de « cavité froide »). Ceci nous permet de décrire très simplement le champ qui circule dans cette cavité, et qui peut y rester pendant un temps beaucoup plus long que le temps de rebouclage L_{cav}/c , où L_{cav} caractérise la taille de la cavité.

4.1.1 Mode d'une cavité fermée sans perte

Une cavité est une structure comportant des parois qui confinent le champ électromagnétique à une région bornée de l'espace. Le champ électromagnétique peut alors se développer sur une base discrète de *modes* p

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_p \mathcal{E}_p(t) \mathbf{u}_p(\mathbf{r}) . \quad (4.1)$$

Dans cette expression, $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ est le *signal analytique* du champ réel $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, c'est-à-dire la quantité complexe obtenue en ne gardant que la partie positive du spectre de Fourier de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, de sorte que l'on a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t) . \quad (4.2)$$

En fait, dans un problème à 3 dimensions, chaque mode est caractérisé par 3 entiers associés aux trois directions de l'espace, ainsi qu'une polarisation. On considérera ici p comme un indice permettant de repérer un mode donné, parmi la suite des quadruplets caractérisant les modes.

La décomposition (4.1) permet une grande simplification des problèmes, puisque la fonction (vectorielle) de l'espace $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ est remplacée par un ensemble discret de nombres $\mathcal{E}_p(t)$ (à un instant donné).

Pour une cavité vide sans perte, les modes sont des solutions stationnaires des équations de Maxwell, ou encore de l'équation de propagation dans le vide, qui respectent les conditions aux limites imposées par la cavité. L'amplitude du mode est alors de la forme

$$\mathcal{E}_p(t) = \mathcal{A}_p e^{-i\omega_p t} = A_p e^{i\phi_p} e^{-i\omega_p t} \quad (4.3)$$

avec A_p réel. La fonction $\mathbf{u}_p(\mathbf{r})$, qui donne la structure spatiale et la polarisation du mode, est solution de l'équation d'Helmholtz

$$[\nabla^2 + k_p^2] \mathbf{u}_p(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.4a)$$

avec

$$k_p^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2} . \quad (4.4b)$$

Les modes $\mathbf{u}_p(\mathbf{r})$ sont orthogonaux, et on leur imposera condition de normalisation

$$\iiint_{\text{cav}} d^3r \mathbf{u}_p^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_q(\mathbf{r}) = \delta_{pq} V_{\text{cav}} \quad (4.5)$$

où V_{cav} est le volume de la cavité, dont la définition exacte, qui doit être précisée pour chaque structure de cavité, peut posséder un certain arbitraire.

L'énergie du champ électromagnétique stockée dans la cavité vaut

$$\begin{aligned} U_{\text{cav}} &= \iiint_{\text{cav}} d^3r \overline{\left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right)} \\ &= \iiint_{\text{cav}} d^3r \varepsilon_0 \overline{\mathbf{E}^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

(la barre supérieure $\overline{}$ désigne la moyenne temporelle). En utilisant la relation d'orthonormalisation des fonctions $\mathbf{u}_p(\mathbf{r})$, l'énergie s'exprime très simplement en fonction de l'énergie de chaque mode

$$U_{\text{cav}} = 2\varepsilon_0 V_{\text{cav}} \sum_p A_p^2 = \sum_p U_p. \quad (4.7)$$

En introduisant l'énergie par photons $\hbar\omega_p$ du mode p , on fait apparaître une quantité utile, le nombre de photons dans le mode p

$$\mathcal{N}_p = \frac{2\varepsilon_0 V_{\text{cav}} A_p^2}{\hbar\omega_p} = \frac{U_p}{\hbar\omega_p}. \quad (4.8)$$

4.1.2 Cavité ouverte en anneau sans pertes : mode quasi cylindrique

Dans notre étude des lasers, nous considérerons une cavité en anneau, comportant trois miroirs (figure 4.1)

Nous savons qu'en utilisant des miroirs concaves convenablement choisis, parfaitement réfléchissants, on a des modes qui dépendent de trois indices, deux caractérisant la structure transverse, et le troisième la structure longitudinale (cf. Complément 3.2). Pour simplifier, nous considérerons le cas limite où les trois miroirs sont plans et parfaitement réfléchissants. Un type de mode bien adapté à cette situation est constitué d'une onde plane progressive se réfléchissant sur les miroirs. Dans chaque bras j on écrit donc

$$\mathbf{u}_p^j(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{e}}_p^j \exp i(k_p \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{r}) \quad (4.9)$$

expression dans laquelle $\mathbf{e}^j$ est un vecteur unitaire parallèle à la direction de propagation dans le bras j , et le vecteur unitaire $\tilde{\mathbf{e}}_p^j$, perpendiculaire à $\mathbf{e}^j$, caractérise la polarisation du mode.

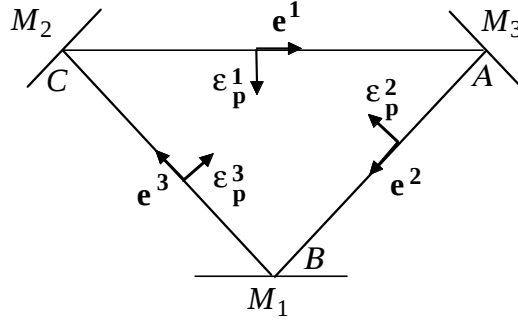


FIG. 4.1: Cavité en anneau idéale, à 3 miroirs plans. On a représenté les polarisations pour le cas TM (champ électrique dans le plan d'incidence).

La condition de rebouclage imposée par les miroirs s'écrit alors

$$k_p = p \frac{2\pi}{L_{\text{cav}}} \quad \text{avec} \quad p \text{ entier} \quad (4.10)$$

Dans cette formule, L_{cav} est la *longueur optique* de la cavité sur un tour, c'est-à-dire pour un rayon se refermant sur lui-même. Même si la cavité est vide, on doit prendre en compte, en plus de la longueur géométrique L_{vide} du trajet, un déphasage supplémentaire $\Delta\theta$ dû aux miroirs, et on a alors

$$p \, 2\pi = k_p L_{\text{vide}} + \Delta\theta \quad (4.11a)$$

d'où

$$k_p = \frac{2\pi}{L_{\text{vide}}} \left(p - \frac{\Delta\theta}{2\pi} \right) \quad (4.11b)$$

Si la cavité contient un diélectrique caractérisé par son indice de réfraction $n(\mathbf{r})$, la longueur optique s'écrit

$$L_{\text{cav}} = \int_{1 \text{ tour}} n(\mathbf{r}) dr = L_{\text{vide}} + \int [n(\mathbf{r}) - 1] dr \quad (4.12)$$

et la relation (4.11b) est remplacée par

$$k_p = \frac{2\pi}{L_{\text{cav}}} \left(p - \frac{\Delta\theta}{2\pi} \right) \quad p \text{ entier relatif} \quad (4.13)$$

A priori, le déphasage $\Delta\theta$, aussi bien que l'indice de réfraction n , dépendent de la fréquence $\omega_p = c k_p$, et cette dépendance doit être prise en compte dans l'équation (4.13) pour trouver les fréquences des modes. En pratique, un laser fonctionne très souvent sur une bande de fréquence étroite, et dans ce cas L et $\Delta\theta$ sont constants sur cette bande, de sorte que les modes longitudinaux ont des fréquences équidistantes. On écrit alors

$$\omega_p = 2\pi \frac{c}{L_0} \left(p - \frac{\Delta\theta_0}{2\pi} \right) \quad (4.14)$$

expressions dans lesquelles L_0 et $\Delta\theta_0$ sont les valeurs au centre de la courbe de gain. La quantité $2\pi c/L_0$ est l'intervalle de fréquence entre modes longitudinaux, encore appelé « intervalle spectral libre » de la cavité.

Remarques

(i) Dans le cas d'un miroir métallique parfait, le déphasage supplémentaire serait de π à chaque miroir, quelle que soit la polarisation de la lumière. Pour les miroirs modernes de haute réflectivité, constitués d'empilements de couches diélectriques, le déphasage à la réflexion dépend de la polarisation. La quantité $\Delta\theta$ est donc différente pour les deux polarisations principales du problème (celles qui sont conservées au bout d'un tour) : polarisation linéaire $\mathcal{E}_\perp$ (ou $\mathcal{E}_{\text{TE}}$), perpendiculaire au plan de figure ; polarisation linéaire $\mathcal{E}_\parallel$ (ou $\mathcal{E}_{\text{TM}}$), dans le plan de figure.

Les fréquences des modes TE et des modes TM sont donc différentes : elles forment deux suites décalées.

(ii) Même si les déphasages à la réflexion sont identiques pour les deux polarisations, notons qu'il existe un déphasage supplémentaire de π , d'origine purement géométrique¹, pour la polarisation TM. Les fréquences des modes TE et des modes TM forment alors deux suites décalées d'un demi intervalle spectral libre.

Dans le cas limite considéré ici (cavité à trois miroirs plans), le mode est a priori infiniment étendu perpendiculairement à la direction de propagation. En fait, on pourra considérer que le faisceau est limité transversalement à une section de surface S , dans laquelle l'amplitude est constante. Ce modèle du « *faisceau quasi-cylindrique* » revient à négliger la diffraction, et il n'a donc un sens que si

$$\frac{\lambda^2}{S} L_{\text{cav}}^2 \ll S \quad (4.15)$$

ou encore

$$L_{\text{cav}} \ll \frac{S}{\lambda} \quad (4.16)$$

On reconnaît dans S/λ ($\lambda = 2\pi c/\omega$) la longueur de Rayleigh, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle la diffraction n'est plus négligeable (cf. Complément 3.2).

Pour le modèle du faisceau quasi-cylindrique, la condition de normalisation (4.5) conduit à une expression de volume V_{cav}

$$V_{\text{cav}} = L_{\text{cav}} S \quad (4.17)$$

Remarques

(i) Le vecteur de Poynting moyen associé à un mode quasi-cylindrique vaut

$$\Pi_p = 2\varepsilon_0 c A_p^2 \quad (4.18)$$

En utilisant (4.7) et (4.17), on obtient la relation

$$\Pi_p \frac{V_{\text{cav}}}{c} = \Pi_p S \frac{L_{\text{cav}}}{c} \quad (4.19)$$

¹Ce déphasage de nature topologique est analogue à la « phase de Berry ».

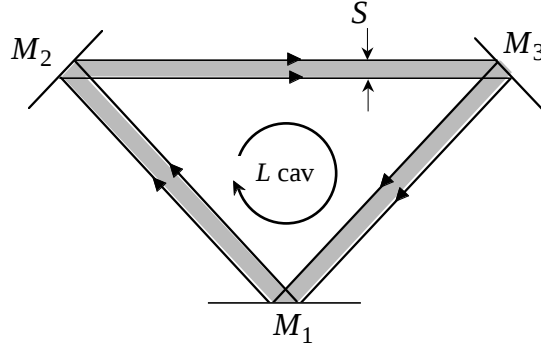


FIG. 4.2: Si la section S du faisceau circulant dans la cavité est supérieure à λL_{cav} , on peut négliger la diffraction, et considérer un mode quasi-cylindrique, de volume $V_{cav} = S L_{cav}$.

qui relie simplement l'énergie U_p dans le mode à la puissance $\Pi_p S$ circulant dans la cavité et au temps de rebouclage L_{cav}/c .

(ii) Dans les cas plus réalistes (voir par exemple au Complément 3.2), les modes laser restent des solutions dans lesquelles un faisceau étroit circule dans la cavité et, après réflexion sur les miroirs, est rebouclé sur lui-même au bout de L_{cav} . On peut généralement définir, à une constante multiplicative près de l'ordre de 1, une surface transverse S_{cav} , et le volume de cavité est encore définie par (4.17). Dans ce cas, la relation d'orthonormalisation (4.5) montre que $|\mathbf{u}_p(\mathbf{r})|$ est de l'ordre de 1 à l'intérieur du volume du mode.

4.1.3 Cavité avec pertes

Dans une cavité réelle, il y a toujours des pertes, dues aux imperfections de la cavité (miroirs imparfaits, absorption par les milieux traversés, pertes par diffraction...). De plus, dans un laser, l'un des miroirs est choisi partiellement transparent afin de disposer d'un faisceau laser utilisable. Le champ dans la cavité est donc amorti, et l'amplitude du mode p décroît.

Le problème général des cavités avec pertes est très délicat, mais il se simplifie considérablement si les pertes sont linéaires et suffisamment faibles pour que l'énergie stockée dans la cavité décroisse lentement à l'échelle de temps L_{cav}/c . On peut alors, à un excellent degré d'approximation, représenter le champ par un développement sur des modes généralisés

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_p A_p(t) e^{i\phi_p} e^{-i\omega_p t} \mathbf{u}_p(\mathbf{r}) \quad (4.20)$$

Pour des pertes linéaires, l'énergie perdue par unité de temps est proportionnelle à l'énergie stockée dans la cavité, et l'amplitude de chaque mode décroît exponentiellement

$$A_p(t) = A_p(0) e^{-\frac{\gamma_{cav}}{2} t} \quad (4.21)$$

(La constante de décroissance en énergie γ_{cav} peut éventuellement dépendre du mode p , mais nous omettons une telle dépendance pour simplifier les notations).

Évaluons la constante d'amortissement γ_{cav} associée à un coupleur de sortie ne réfléchissant que la fraction $1 - T$ de la puissance incidente. On suppose T petit devant 1. Pour un mode quasi cylindrique de vecteur de Poynting Π_p et de section S , l'énergie perdue par unité de temps vaut

$$\frac{dU_p}{dt} = -T\Pi_p S \quad (4.22)$$

En utilisant les formules (4.18) et (4.19), dans lesquelles l'amplitude A_p et donc l'énergie U_p peuvent maintenant dépendre du temps, on trouve

$$\frac{dU_p}{dt} = -\frac{c}{L_{\text{cav}}} T U_p \quad (4.23)$$

En remarquant que c/L_{cav} est le temps de rebouclage, cette relation s'interprète évidemment comme une perte par tour

$$[\delta U_p]_{1 \text{ tour}} = -T U_p \quad (4.24)$$

Si les pertes sont dues uniquement au coupleur de sortie, la formule (4.23) donne

$$\gamma_{\text{cav}} = T \frac{c}{L_{\text{cav}}} \quad (4.25)$$

On peut de façon analogue caractériser les pertes dues à l'absorption, la diffusion, la diffraction, par un coefficient global de pertes par tour α . La constante d'amortissement s'écrit alors

$$\gamma_{\text{cav}} = \frac{c}{L_{\text{cav}}} (T + \alpha) \quad (4.26)$$

et elle caractérise les pertes par la relation

$$\left[\frac{dA_p}{dt} \right]_{\text{pertes}} = -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} A_p \quad (4.27)$$

que nous utiliserons dans la suite.

Nous retrouvons alors ici la relation déjà introduite au chapitre 3, permettant de relier la puissance de sortie Φ_S au nombre de photons $\mathcal{N}_p$ stockés dans un mode de la cavité. En utilisant (4.19) et (4.22), on trouve

$$\Phi_S = T\Pi S = T \frac{c}{L_{\text{cav}}} U_p = T \frac{c}{L_{\text{cav}}} \hbar \omega_p \mathcal{N}_p \quad (4.28)$$

Cette relation permet d'estimer aisément le nombre $\mathcal{N}_p$ à partir des quantités T , L_{cav} , ω_p et Φ_S faciles à connaître pour un laser donné.

Remarques

- (i) Pour une cavité avec pertes, les modes sont donc amortis et évoluent suivant la loi

$$\mathcal{E}_p(t) = \mathcal{E}_p(0) e^{-\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}t} e^{-i\omega_p t} . \quad (4.29)$$

La transformée de Fourier de (4.29) donne non pas un pic de Dirac centré en ω_p , mais une Lorentzienne de demi-largeur à mi-hauteur $\gamma_{\text{cav}}/2$, centrée en ω_p . Nous constatons que l'hypothèse suivant laquelle les pertes relatives par tour sont faibles (devant 1) correspond à une situation où l'élargissement d'un mode reste petit devant l'intervalle $2\pi c/L_{\text{cav}}$ entre deux modes longitudinaux voisins.

- (ii) Dans le cas où les pertes par tour ne sont pas petites devant 1, on peut souvent généraliser les calculs ci-dessus, mais cette généralisation dépend du phénomène considéré. Par exemple, si on a un coupleur de sortie dont la transmission T n'est pas très petite devant 1, l'intensité évolue en marches d'escalier dont les hauteurs décroissent exponentiellement, avec une constante de temps

$$\gamma_{\text{cav}} = \frac{c}{L_{\text{cav}}} \log \left(\frac{1}{1-T} \right) \quad (4.30)$$

On retrouve bien (4.25) à la limite $T \rightarrow 0$.

- (iii) La condition de faibles pertes par tour entraîne que l'amplitude de chaque mode varie lentement à l'échelle du temps de rebouclage L_{cav}/c . Cela n'est absolument pas incompatible avec la possibilité de champs variant très vite à cette échelle, à condition de combiner plusieurs modes. C'est ainsi par exemple (cf. § 3.4.1) qu'il est possible d'ajouter N modes lasers synchronisés, pour obtenir des impulsions de durée L_{cav}/cN .

4.1.4 Conclusion

La décomposition du champ sur les modes de la cavité permet une simplification considérable. Au lieu d'un champ vectoriel $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ obéissant à des équations aux dérivées partielles (équations de Maxwell ou de propagation), avec des conditions aux limites (miroirs avec pertes), on a maintenant une suite de nombres complexes $\{A_p e^{i\phi_p}\}$ obéissant à une simple équation différentielle (4.27).

L'utilité de cette description du champ dans la cavité est d'autant plus grande que dans un laser en fonctionnement (avec un amplificateur), seul un petit nombre de modes sont effectivement excités, et il est généralement facile de deviner lesquels, sur la base d'arguments physiques. La description est alors particulièrement simple. C'est celle que nous adopterons par la suite.

4.2 Équations d'évolution du champ (régime quasi-stationnaire pour les atomes)

4.2.1 Laser monomode

2.1.1 Terme de gain

Nous ajoutons maintenant dans la cavité laser un milieu amplificateur de longueur L_A , pour lequel le coefficient d'amplification de l'intensité par passage vaut (cf. Chapitre 2, partie 5)

$$\frac{I(L_A)}{I(0)} = e^{gL_A} \quad (4.31)$$

Le gain par passage est généralement petit devant 1, et nous écrirons donc, pour un passage dans l'amplificateur, c'est-à-dire à chaque tour

$$\left[\frac{\delta I}{I} \right]_{1 \text{ tour}} = 2 \left| \frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right| = gL_A \quad (4.32)$$

Rappelons que l'établissement de la relation (4.31) suppose un régime stationnaire, où les atomes ont le temps d'atteindre un régime d'équilibre avec le champ dont l'amplitude n'évolue quasiment pas.

Nous considérons ici un laser fonctionnant sur un seul mode p , et nous supposons en fait que son amplitude $\mathcal{A}_p(t)$ *varie lentement à l'échelle du temps de réponse des atomes*, qui atteignent donc un *régime quasi-stationnaire*. Alors, la relation 4.2.2 reste valable, et comme au paragraphe 4.1.3, nous pouvons introduire un terme d'évolution

$$\left[\frac{d\mathcal{A}_p}{dt} \right]_{\text{gain}} = \frac{gL_A}{2} \frac{c}{L_{\text{cav}}} \mathcal{A}_p(t) \quad (4.33)$$

On peut se demander si le passage de l'équation (4.32) (relative au module du champ électrique) à l'équation (4.33) (relative à l'amplitude complexe) est légitime, dans la mesure où l'amplificateur provoque un déphasage lié à la partie réelle de la susceptibilité. Dans le régime quasi-stationnaire, il n'y a en fait pas de problème à condition de prendre en compte l'indice de réfraction du milieu amplificateur dans l'expression (4.12) de la longueur optique de la cavité.

Le modèle particulier d'amplificateur laser vu au chapitre 2 nous a permis de déterminer explicitement le gain par unité de longueur g . Nous admettons que les résultats du § 2.5 restent valables, et en particulier que le gain à une fréquence ω donnée peut s'écrire

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I_p}{I_{\text{sat}}}} = \frac{g_0}{1 + \frac{2|\mathcal{A}_p|^2}{I_{\text{sat}}}} = \frac{g_0}{1 + s} . \quad (4.34)$$

Dans cette expression, I_{sat} est l'intensité de saturation à la fréquence ω . Le gain non saturé g_0 à la fréquence ω s'exprime en fonction de l'inversion de population non saturée par unité de volume $\Delta N_0/V_A$ (cf. équation 2.5.25)

$$g_0 = \sigma \frac{\Delta N_0}{V_A} \quad (4.35)$$

Rappelons que la section efficace σ varie de façon Lorentzienne autour de la fréquence de résonance ω_0

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(\omega_0)}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma_2/2}\right)^2} . \quad (4.36)$$

Les paramètres $\sigma(\omega_0)$ (qui a les dimensions d'une surface) et Γ_2 sont des données empiriques qui caractérisent la transition laser considérée.

Le paramètre de saturation s suit une dépendance Lorentzienne analogue

$$s(\omega) = \frac{I}{I_{\text{sat}}(\omega_0)} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma_2/2}\right)^2} \quad (4.37)$$

et l'intensité de saturation à résonance $I_{\text{sat}}(\omega_0)$ (qui s'exprime généralement en W/m^2) est également un paramètre empirique déterminé de façon expérimentale.

En résumé, une transition laser est caractérisée par quatre paramètres atomiques : la fréquence de résonance ω_0 , la largeur de raie Γ_2 , la section efficace résonnante $\sigma(\omega_0)$, et l'intensité de saturation à résonance $I_{\text{sat}}(\omega_0)$. Quant à l'inversion de population non saturée ΔN_0 , elle dépend du mécanisme d'excitation de la raie laser, et elle croît évidemment avec « l'intensité » de cette excitation.

Remarques

- (i) Très souvent, on donne la section efficace et l'intensité de saturation sans préciser « à résonance ». Il est alors sous-entendu qu'il s'agit des valeurs à résonance $\sigma(\omega_0)$ et $I_{\text{sat}}(\omega_0)$.
- (ii) Comme le montre le tableau 1 du paragraphe 3.5.1, la largeur de raie Γ_2 est souvent très grande comparée à l'intervalle entre modes. Dans ce cas, le (ou les) mode laser actif est proche de ω_0 , et on peut utiliser des développements limités des facteurs Lorentziens.

2.1.2 Équation d'évolution : amplitude, intensité

En combinant le terme de pertes de la cavité (4.27), et le terme de gain (4.33), on obtient, compte tenu de (4.34), l'équation d'évolution de l'amplitude du mode p

$$\frac{d\mathcal{A}_p}{dt} = -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \mathcal{A}_p + \frac{g_0 L_A}{2} \frac{c}{L_{\text{cav}}} \frac{1}{1 + \frac{2|\mathcal{A}_p|^2}{I_{\text{sat}}}} \mathcal{A}_p \quad (4.38)$$

Il est traditionnel et commode d'introduire le paramètre sans dimension

$$r = \frac{g_0 L_A c}{L_{\text{cav}} \gamma_{\text{cav}}} \frac{1}{\gamma_{\text{cav}}} \quad (4.39)$$

qui est le rapport entre le gain non saturé et les pertes. Nous l'appellerons taux d'excitation réduit, ou *taux de pompage réduit*. Pour des pertes de la forme (4.26), ce paramètre s'écrit

$$r = \frac{g_0 L_A}{T + \alpha} \quad (4.40)$$

L'équation d'évolution de l'amplitude du mode laser s'écrit alors

$$\frac{d\mathcal{A}_p}{dt} = -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \mathcal{A}_p + \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \mathcal{A}_p \frac{r}{1 + \frac{2|\mathcal{A}_p|^2}{I_{\text{sat}}}} \quad (4.41)$$

Les coefficients de l'équation (4.41) étant réels, on peut éliminer la phase ϕ_p du mode, et obtenir une équation équivalente ne portant que sur le module A_p de l'amplitude, ou de façon équivalente sur l'intensité I_p :

$$\frac{dA_p}{dt} = -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} A_p + \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} A_p \frac{r}{1 + \frac{2A_p^2}{I_{\text{sat}}}} \quad (4.42)$$

$$\frac{dI_p}{dt} = -\gamma_{\text{cav}} I_p + \gamma_{\text{cav}} I_p \frac{r}{1 + \frac{I_p}{I_{\text{sat}}}} \quad (4.43)$$

Notons que ces équations différentielles ne sont pas à coefficient constant, à cause du terme de saturation. Ceci est à l'origine du comportement non linéaire des lasers.

4.2.2 Laser multimode

Si plusieurs modes laser sont simultanément actifs, on peut se demander comment généraliser l'équation (4.34) en ce qui concerne le terme de saturation s . Plus précisément, l'intensité I figurant dans l'expression (4.37) est-elle la somme $\sum_p I_p$ des intensités de tous les modes actifs, ou n'est-elle que l'intensité I_p du mode considéré (dans ce dernier cas, les équations (4.42) et (4.43) restent valables sans changement).

La réponse dépend de la nature – homogène ou inhomogène – du mécanisme d'élargissement de la courbe de gain (voir le paragraphe 3.3.1 du chapitre 3). Lorsque l'élargissement est *homogène*, tous les atomes sont sensibles à l'intensité, quelle que soit sa fréquence, et le terme de saturation du mode p s'écrit

$$s(\omega_p) = \frac{\sum_p I_p}{I_{\text{sat}}} \quad (4.44)$$

Au contraire, dans le cas *inhomogène*, chaque mode p interagit avec un ensemble d'atomes particuliers résonnants avec ce mode seulement, et on écrit alors

$$s(\omega_p) = \frac{I_p}{I_{\text{sat}}} \quad (4.45)$$

En pratique, on constate que beaucoup de milieux laser ont un comportement intermédiaire, ni homogène pur, ni inhomogène pur. Pour modéliser un tel comportement de façon phénoménologique, nous effectuons un développement limité du terme de saturation de l'équation (4.42), et nous obtenons, dans le cas homogène

$$\frac{d\mathcal{A}_p}{dt} = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}(r-1)\mathcal{A}_p - \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \frac{2r}{I_{\text{sat}}} \left(\sum_q I_q \right) \mathcal{A}_p. \quad (4.46)$$

Au contraire, dans le cas inhomogène, on écrira

$$\frac{d\mathcal{A}_p}{dt} = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}(r-1)\mathcal{A}_p - \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \frac{2r}{I_{\text{sat}}} I_p \mathcal{A}_p \quad (4.47)$$

La modélisation phénoménologique consiste alors à écrire pour chaque mode

$$\frac{d\mathcal{A}_p}{dt} = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}(r-1)\mathcal{A}_p - \sum_q B_{pq} I_q \mathcal{A}_p \quad (4.48)$$

et à prendre les coefficients B_{pq} comme des données empiriques. Les coefficients diagonaux B_{pp} caractérisent l'*autosaturation*, tandis que les coefficients non-diagonaux B_{pq} avec $p \neq q$ caractérisent les effets de *saturation croisée* entre modes. Dans les milieux à élargissement homogène pur, les coefficients B_{pq} sont de l'ordre de grandeur indiqué par l'équation (4.46), tandis que pour un élargissement inhomogène, les termes non diagonaux sont nuls. On a en fait souvent des valeurs intermédiaires.

Finalement, nous utiliserons l'équation (4.48), ou encore, en multipliant par $\mathcal{A}_p^*$

$$\frac{dI_p}{dt} = \gamma_{\text{cav}}(r-1)I_p - \sum_q 2B_{pq} I_q I_p \quad (4.49)$$

Remarque

Rappelons que tout le traitement de ce chapitre est soumis à l'hypothèse de variation lente de l'intensité lumineuse. Cette hypothèse est, a priori, beaucoup plus difficile à satisfaire dans le cas multimode que dans le cas monomode. En effet, pour deux modes stationnaires, l'intensité est modulée à la fréquence de battement qui vaut c/L_{cav} dans le cas de deux modes longitudinaux adjacents). Il faut alors, a priori, utiliser le formalisme du chapitre 5 pour traiter le problème. On pourra néanmoins continuer à utiliser le formalisme de ce paragraphe lorsque le temps de réponse du milieu amplificateur est long devant la période L_{cav}/c des battements. Le terme de saturation est alors proportionnel à la moyenne temporelle de l'intensité totale, c'est-à-dire à la somme des intensités.

4.3 Laser monomode

4.3.1 Solutions stationnaires

Supposons qu'un seul mode soit susceptible de donner lieu à l'effet laser, par exemple parce que l'écart entre modes successifs est plus grand que la largeur de la courbe de gain ou parce que la cavité comporte un élément sélectif en fréquence qui inhibe les autres

modes. L'amplitude complexe du champ dans le mode p obéit à l'équation (4.41), que nous pouvons écrire en omettant l'indice p

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}\mathcal{A} + r\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}\frac{1}{1 + \frac{2|\mathcal{A}|^2}{I_{\text{sat}}}}\mathcal{A} \quad (4.50)$$

Les constantes γ_{cav} , r , et I_{sat} étant réelles, le module A de l'amplitude obéit à l'équation

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}A + r\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}\frac{1}{1 + \frac{2A^2}{I_{\text{sat}}}}A \quad (4.51)$$

En régime stationnaire, A est constant. Il est solution de l'équation du 3^e degré

$$0 = A \left[\left(1 + \frac{2A^2}{I_{\text{sat}}} \right) - r \right] \quad (4.52)$$

La solution triviale

$$A = 0 \quad (4.53)$$

correspond au cas où le laser n'émet aucune lumière.

Il existe par ailleurs une solution non nulle

$$A = \sqrt{\frac{I_{\text{sat}}}{2}}\sqrt{r-1} \quad (4.54)$$

à condition que

$$r > 1 \quad (4.55)$$

c'est-à-dire

$$g_0 L_A > \alpha + T \quad (4.56)$$

On retrouve la condition de seuil (3.1.4) : *l'oscillation laser ne se produit que si le gain non-saturé est supérieur aux pertes.*

4.3.2 Intensité et gain stationnaires

L'équation pour l'intensité équivalente à (4.51)

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma_{\text{cav}}I + r\gamma_{\text{cav}}\frac{1}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}}I \quad (4.57)$$

a évidemment comme solution stationnaire non triviale

$$I = (r-1)I_{\text{sat}} \quad (4.58)$$

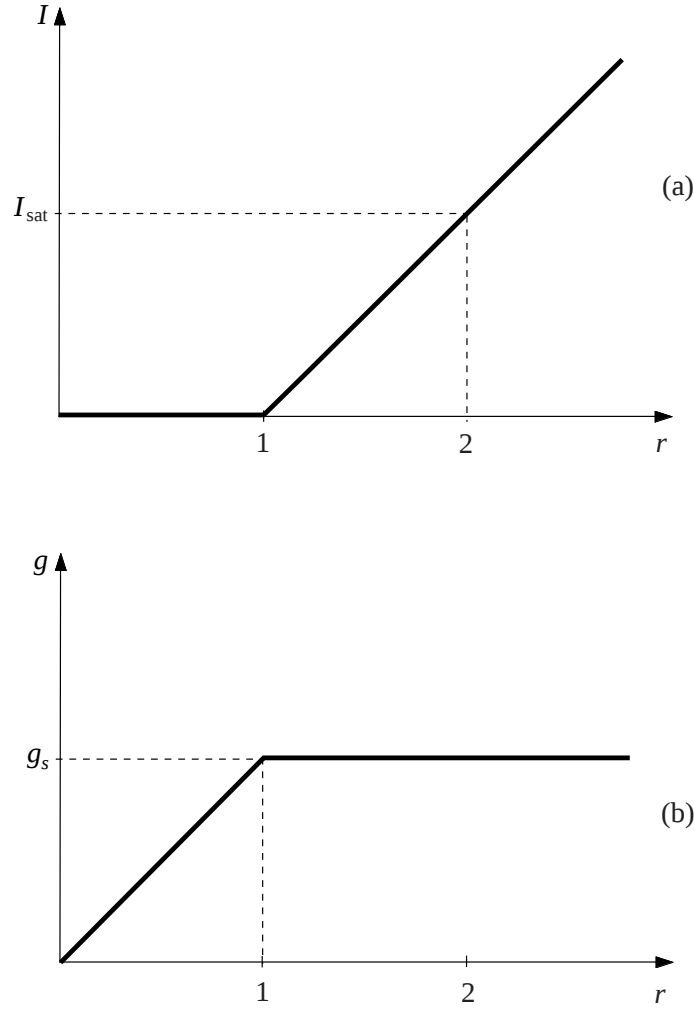


FIG. 4.3: Intensité laser I , et gain du milieu laser g , en fonction du taux d'excitation réduit r . La valeur $r = 1$ correspond au seuil laser.

(ce qui est la même solution que (4.54)). L'intensité du mode laser croît linéairement avec le taux de pompage réduit r . La figure 4.3a représente ce comportement caractéristique : existence d'un seuil ($r = 1$) puis croissance affine de l'intensité circulant dans la cavité.

Le gain a lui aussi un comportement caractéristique en fonction du taux d'excitation réduit r . En dessous du seuil, il est égal au gain non saturé, c'est-à-dire d'après la formule (4.41)

$$g = r \frac{\gamma_{\text{cav}} L_{\text{cav}}}{c L_A} = r g_{\text{seuil}} \quad \text{pour } r \leq 1 \quad (4.59)$$

On a introduit le gain au seuil

$$g_{\text{seuil}} = \frac{\gamma_{\text{cav}} L_{\text{cav}}}{c L_A} = \frac{T + \alpha}{L_A} \quad (4.60)$$

Dès que le laser a atteint un régime stationnaire, au-dessus du seuil, on a

$$g_{\text{statio}} = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}} = \frac{r g_{\text{seuil}}}{I_{\text{sat}}} = g_{\text{seuil}} \quad \text{pour } r \geq 1 \quad (4.61)$$

La figure 4.3b montre ce comportement. Au-dessus du seuil laser, à cause de la saturation, le gain est limité à la valeur seuil, qui permet de compenser exactement les pertes (Équation 4.60). *En régime stationnaire, le gain est égal aux pertes.*

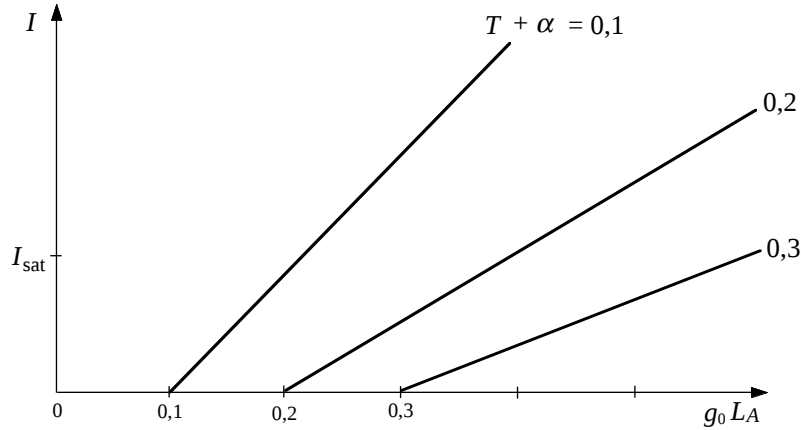


FIG. 4.4: Intensité dans la cavité laser en fonction du gain non-saturé pour diverses valeurs des pertes $T + \alpha$. Lorsque les pertes diminuent, le seuil est abaissé, et la pente augmente : le laser fonctionne plus facilement. Le comportement est identique si on porte en abscisse le taux de pompage $\Lambda_b - \Lambda_a$ ou, plus généralement, le taux d'excitation.

Un laser est un système non linéaire, et l'influence des divers paramètres n'est pas toujours évidente. Il est intéressant d'examiner la variation de l'intensité du mode, en fonction du gain non-saturé $g_0 L_A$, pour plusieurs valeurs des pertes $T + \alpha$ de la cavité. En utilisant (4.38), (4.58) donne immédiatement

$$I = I_{\text{sat}} \left(\frac{g_0 L_A}{T + \alpha} - 1 \right) \quad (4.62)$$

Cette relation très simple, représentée sur la figure 4.4 pour plusieurs valeurs de $T + \alpha$, montre qu'un laser fonctionne d'autant plus facilement que les pertes sont plus faibles : d'une part le seuil est abaissé, et d'autre part la pente de la droite augmente. De ce point de vue, il est donc souhaitable de diminuer aussi bien les pertes α , que le coefficient de transmission T du coupleur de sortie.

Il ne faut pas en déduire hâtivement que l'on doit prendre T aussi faible que possible. Si en effet on s'intéresse à l'intensité I_{sortie} délivrée par le laser, elle varie suivant la loi

$$I_{\text{sortie}} = I_{\text{sat}} \frac{T}{T + \alpha} [g_0 L_A - (T + \alpha)] \quad (4.63)$$

La figure 4.5 montre l'intensité de sortie en fonction du gain non-saturé, pour différents coefficients de couplage T , les autres pertes α restant inchangées. Il est clair que pour un taux de pompage donné ($g_0 L_A$ fixé) il existe un couplage de sortie optimal, qui maximise la puissance de sortie.

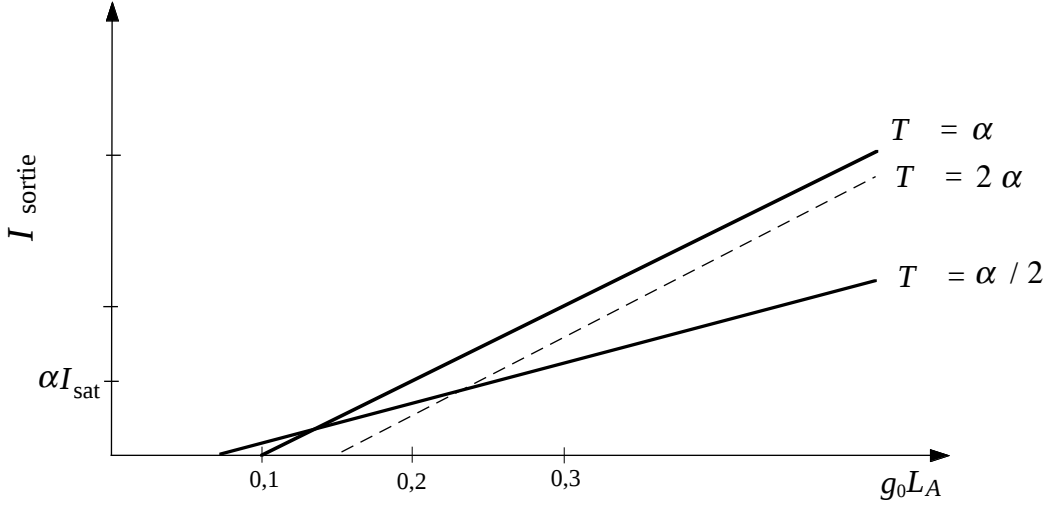


FIG. 4.5: Intensité en sortie du laser, en fonction du gain non-saturé, pour plusieurs valeurs du coefficient de couplage T , les autres pertes α restant inchangées (on a pris ici $\alpha = 5 \times 10^{-2}$).

4.3.3 Stabilité des solutions stationnaires

En dessous du seuil, la solution stationnaire est unique : l'intensité est nulle, et le laser ne démarre pas. En revanche, au-dessus du seuil, il y a deux solutions possibles

$$I' = 0 \quad (4.64)$$

$$I'' = I_{\text{sat}}(r - 1) \quad (4.65)$$

Nous allons étudier la stabilité de ces solutions, c'est-à-dire la façon dont le système évolue lorsqu'on l'écarte légèrement de sa situation d'équilibre.

Prenons d'abord la solution I'' , et considérons une intensité

$$I = I'' + i \quad (4.66)$$

où i est un infiniment petit. En reportant dans l'équation d'évolution (4.57), on peut faire un développement limité en i . Le terme d'ordre 0 est automatiquement nul, car I'' est une solution stationnaire. Le terme d'ordre 1 donne

$$\frac{di}{dt} = i\gamma_{\text{cav}} \left[\frac{d}{dI} \left(-I + r \frac{I}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}} \right) \right]_{I=I''} \quad (4.67)$$

En utilisant la valeur (4.65) de I'' , on obtient facilement, au premier ordre en i

$$\frac{di}{dt} = -\gamma_{\text{cav}} \frac{r-1}{r} i \quad (4.68)$$

Le coefficient du terme en i est négatif puisque nous sommes au-dessus du seuil ($r > 1$). Si, par suite d'une fluctuation momentanée, i est différent de 0, l'équation d'évolution le ramène à 0 : la solution I'' est stable.

Au contraire, au voisinage de I' , la linéarisation de l'équation d'évolution donne

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= i\gamma_{\text{cav}} \left[\frac{d}{dI} \left(-I + r \frac{I}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}} \right) \right]_{I=I'} \\ &= \gamma_{\text{cav}}(-1 + r)i\end{aligned}\quad (4.69)$$

Au-dessus du seuil ($r > 1$), le coefficient du second membre est positif, et toute fluctuation du système provoque son éloignement irrémédiable de la solution $I' = 0$, qui est donc instable. Le système va alors aller se stabiliser en I'' , qui est la seule solution stable au-dessus du seuil. La dynamique de ce démarrage sera vue au chapitre 5.

Remarques

(i) Au-dessous du seuil ($r < 1$), on a une seule solution, $I' = 0$. On vérifie immédiatement sur (4.69) qu'elle est stable : même écarté de 0, le laser ne démarre pas.

(ii) On peut donner une représentation graphique de la discussion de la stabilité des solutions stationnaires de l'équation différentielle (4.57). Pour cela, on représente graphiquement chacun des deux termes du second membre de (4.57) en changeant le signe du terme négatif. On distingue les cas $r \leq 1$ et $r > 1$ (figure 4.6a et 4.6b). Les solutions stationnaires sont évidemment données par l'intersection des deux courbes. Il y a une seule solution dans le cas (a) ($r \leq 1$), et deux solutions dans le cas (b) ($r > 1$). La stabilité dépend des valeurs respectives des pentes : si c'est le terme négatif (terme de pertes) dont la pente domine, alors, la solution est stable.

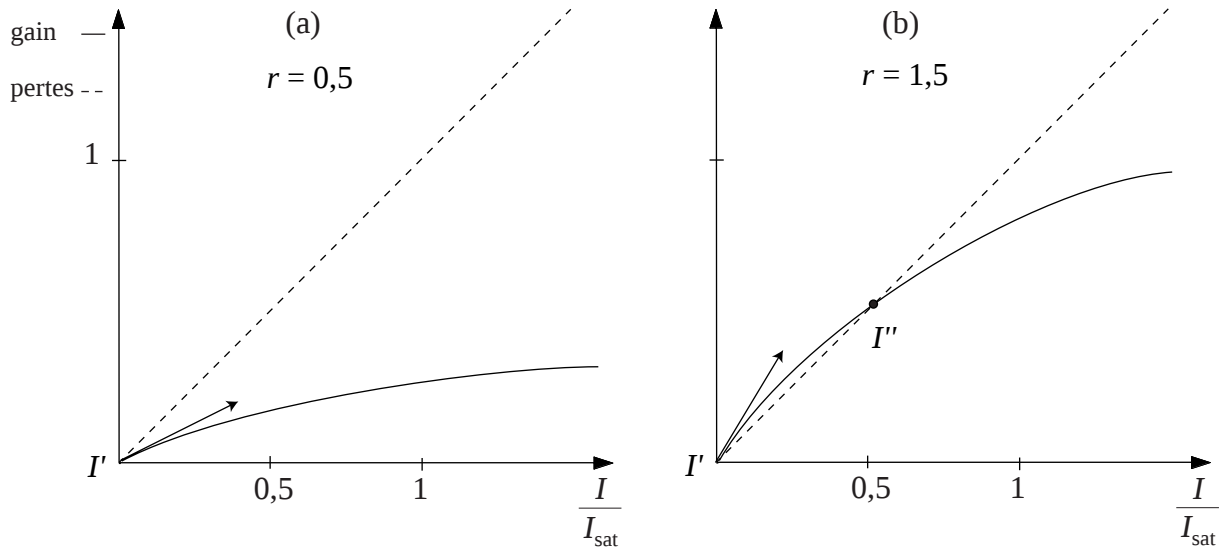


FIG. 4.6: Étude graphique des solutions stationnaires de (4.57). On reporte en fonction de I/I_{sat} , le terme de gain (courbe continue saturée : on a indiqué la tangente à l'origine) et le terme de pertes chargé de signe (courbe tiretée). L'intersection des deux courbes donne les solutions stationnaires. La solution est stable si la pente de la courbe du gain est inférieure à la pente de la courbe de pertes. On voit que I'' est stable et I' est instable dans le cas (b). Dans le cas (a), la solution I' est stable.

4.3.4 Seuil laser et transition de phase. Brisure spontanée de symétrie

Le démarrage du laser lorsque le gain non-saturé g_0 dépasse la valeur de seuil évoque une transition de phase. Cette analogie peut être effectivement développée. Considérons par exemple un matériau ferromagnétique au voisinage de la température de Curie T_c . Suivant la loi de Weiss, la magnétisation $\mathbf{M}$ est reliée à la température T par la loi

$$c(T - T_c)\mathbf{M} + gT|\mathbf{M}|^2\mathbf{M} = 0 \quad (4.70)$$

où g et c sont des constantes positives. Si $T > T_c$, la seule solution est $\mathbf{M} = 0$, mais si $T < T_c$ le matériau acquiert une magnétisation $\mathbf{M}$ telle que

$$|\mathbf{M}|^2 = \frac{c(T_c - T)}{gT} \quad (4.71)$$

À la température critique T_c , on a une transition de phase, caractérisée par l'apparition d'une organisation spatiale de tous les moments magnétiques élémentaires. Cette organisation se traduit par l'existence d'un paramètre d'ordre $\mathbf{M}$ non nul (figure 4.7).

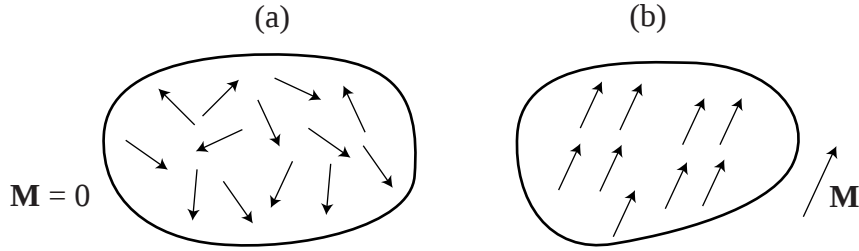


FIG. 4.7: Matériau ferromagnétique. Au-dessus de la température de Curie (a), les moments magnétiques élémentaires ont une orientation aléatoire, et l'aimantation globale est nulle. Au-dessous de la température de Curie (b), les moments élémentaires se couplent et donnent une magnétisation globale $\mathbf{M}$. En l'absence de champ magnétique externe, rien ne détermine a priori la direction de l'aimantation globale $\mathbf{M}$. Lorsque le système est refroidi en-dessous de la température de Curie, il prend une aimantation suivant une direction particulière, par brisure spontanée de symétrie.

Il est intéressant de noter que si l'équation (4.70) détermine le module de $\mathbf{M}$, elle ne fixe en rien son orientation qui pourtant prend une valeur bien déterminée pour un échantillon particulier. On parle alors de *brisure spontanée de symétrie*, phénomène qui semble contredire le principe de Curie suivant lequel les solutions d'un problème présentent la même symétrie que les données initiales.

Il est possible de réconcilier les points de vue en considérant que la solution de (4.70) est en fait une *variable aléatoire* vectorielle, de module certain, déterminé par l'équation (4.71), mais de direction aléatoire équipartie suivant toutes les directions de l'espace.

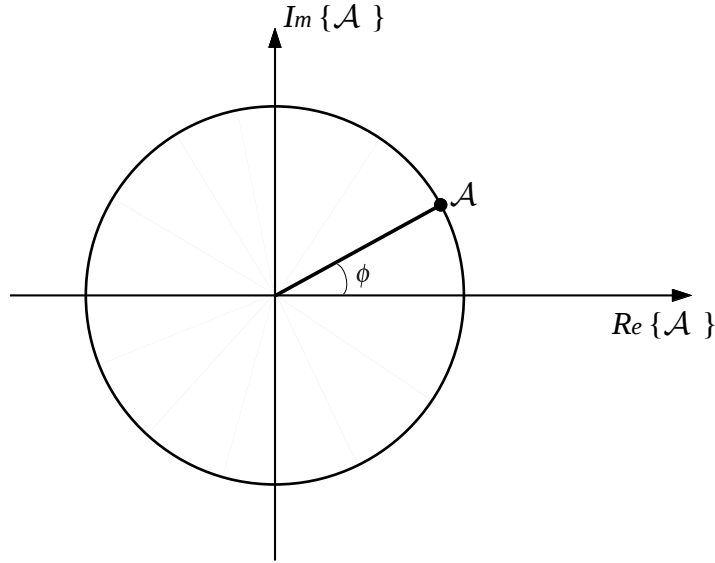


FIG. 4.8: Représentation statistique du champ laser par son amplitude complexe $\mathcal{A}$ (vecteur de Fresnel) considérée comme une variable aléatoire de module fixé mais de phase équipartie sur $[0, 2\pi]$. Un échantillon particulier est représenté par un point du cercle.

Un échantillon particulier doit alors être considéré comme résultant d'un tirage dans un ensemble statique. C'est l'ensemble statistique qui obéit au principe de Curie.

Ces considérations se transposent directement au cas du champ d'un mode laser, pour lequel la recherche des solutions stationnaires de l'équation (4.50) fixe le module A de l'amplitude, mais pas sa phase ϕ . Pourtant, l'image classique d'un laser au-dessus du seuil attribue un module A et une phase ϕ au mode excité : l'amplitude complexe $\mathcal{A}$ joue le rôle du paramètre d'ordre. L'existence d'une phase particulière, pour un laser particulier, résulte alors d'une brisure spontanée de symétrie, c'est-à-dire d'un processus qui ne respecte pas le principe de Curie.

Comme dans le cas du magnétisme, il est possible dans une certaine mesure de réconcilier l'existence d'une phase avec la symétrie du problème en décrivant l'amplitude du mode laser comme une variable aléatoire complexe de module déterminé, mais de phase aléatoire équipartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Un laser dans un régime de fonctionnement donné correspond à un échantillon particulier tiré d'un ensemble statistique (cf. Chapitre 6).

Remarques

- (i) En effectuant sur la solution de l'équation (4.50) une analyse de stabilité, on trouve que le module est rappelé vers sa valeur d'équilibre (stabilité). En revanche, quelle que soit sa valeur ϕ , la phase est dans une situation d'équilibre indifférente : si une fluctuation modifie sa valeur, elle reste à la nouvelle valeur (cf. chapitre 6, parties 6.2 et 6.4).
- (ii) On pourrait penser qu'en pratique le problème de la violation du principe de Curie est purement académique. Considérons par exemple la question de la transition ferromagnétique : on peut imaginer qu'il existe toujours un champ magnétique résiduel, aussi faible

soit-il, qui va déterminer l'orientation de la magnétisation lors de la transition de phase. Cette remarque est importante sur le plan pratique, mais elle ne fait pas disparaître pour autant le problème théorique de la brisure spontanée de symétrie, qui apparaît ici de façon très simple, mais qui joue un rôle important dans plusieurs domaines de la physique.

4.4 Laser multimode : compétition entre modes

Nous avons vu au paragraphe 4.2.2 que les équations d'évolution dans un laser multimode dépendent de la nature, homogène ou inhomogène, de la saturation du gain. Dans le cas homogène, les termes de saturation croisée ne sont pas négligeables, et les équations d'évolution (4.49) sont des équations différentielles couplées, avec un terme de couplage non-linéaire. On peut alors avoir une grande variété de comportements. Pour présenter diverses situations typiques, nous nous limiterons au cas de deux modes couplés. Il peut s'agir de deux modes longitudinaux adjacents, ou de deux modes se propageant dans des directions opposées (cavité en anneau), ou encore, de deux modes transverses.

4.4.1 Deux modes couplés : équations du problème

Pour faciliter la discussion, nous récrivons les équations (4.49) relatives aux deux modes ($p = 1$ ou 2) sous la forme

$$\frac{dI_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2) I_1 \quad (4.72a)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = (\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1) I_2 \quad (4.72b)$$

Le terme

$$\alpha_p = \gamma_{\text{cav}}(r_p - 1) \quad (4.73)$$

caractérise la différence entre gain non saturé et pertes. Il peut dépendre du mode, par exemple si on a des pertes ou un gain très sélectifs en fréquence, et nous gardons donc la possibilité que α_1 et α_2 ne soient pas égaux. Quant aux termes β et θ , ils caractérisent respectivement l'*autosaturation du gain*, et la *saturation croisée*.

Nous cherchons les solutions stationnaires du système (4.72), données par

$$\frac{dI_1}{dt} = 0 \quad (4.74a)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 0 \quad (4.74b)$$

L'équation (4.74a) conduit aux solutions :

$$I_1 = 0 \quad (4.75a)$$

ou

$$\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2 = 0 \quad (4.75b)$$

L'équation (4.74b) a pour solutions :

$$I_2 = 0 \quad (4.76a)$$

ou

$$\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1 = 0 \quad (4.76b)$$

En ignorant la solution où les deux intensités sont nulles, nous devons donc considérer les trois autres combinaisons des solutions (4.75a) et (4.75b) avec (4.76a) et (4.76b). Pour mener la discussion, nous utiliserons une représentation graphique dans le plan (I_1, I_2) . Comme les intensités sont des nombres positifs, les solutions se situent nécessairement dans le premier quadrant.

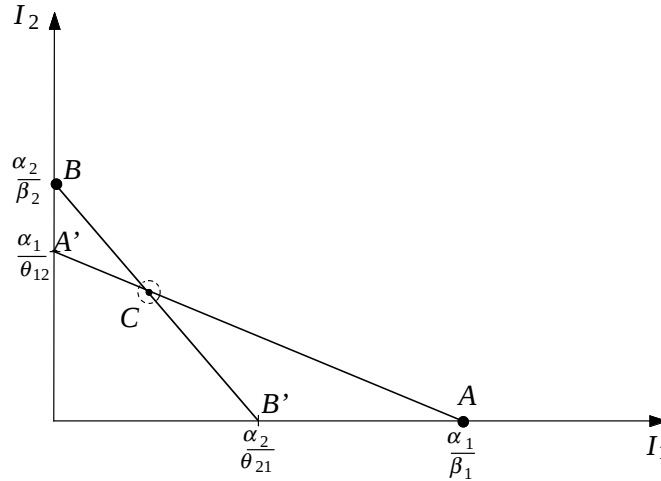


FIG. 4.9: Représentation graphique des équations donnant les solutions stationnaires (A, B et C) pour un laser à deux modes couplés. Dans le cas de la figure, la solution C est instable, tandis que A et B sont toutes les deux stables (bistabilité).

La Fig. 4.9 présente une situation possible. Les équations (4.75b) et (4.76b) y sont représentées par deux droites qui sont dans le premier quadrant à condition que la condition de seuil soit satisfaite pour chaque mode. Les trois solutions intéressantes sont alors représentées par les points A ($\{(4.75b) \text{ et } (4.76a)\}$), B ($\{(4.75a) \text{ et } (4.76b)\}$) et C ($\{(4.75b) \text{ et } (4.76b)\}$).

Il est clair que la solution C n'existe pas nécessairement, puisque les deux droites peuvent ne pas se couper. Dans ce cas, que nous allons examiner en premier, seules les solutions A ou B existent.

4.4.2 Un seul mode actif : compétition entre modes

Nous considérons ici le cas de la Fig. 4.10, où la solution C n'existe pas. Alors, un seul mode est susceptible d'être actif à la fois : les deux solutions possibles sont A et B .

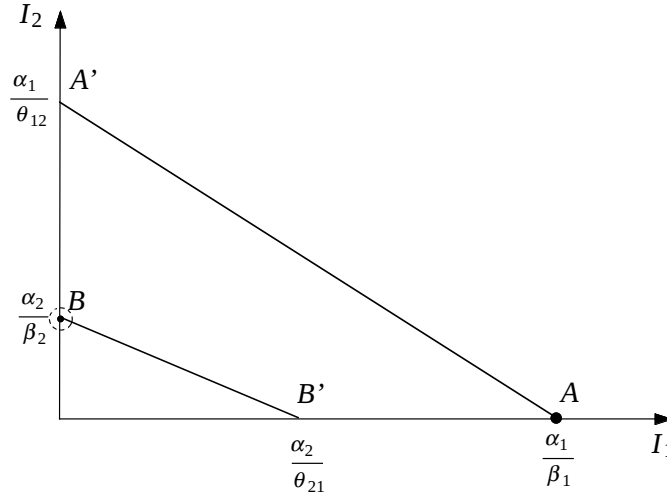


FIG. 4.10: Situation où un seul mode à la fois peut être actif. La solution A est stable, tandis que la solution B (mode le moins favorisé) est instable.

Afin de savoir si ces deux solutions sont équivalentes, nous effectuons une analyse de stabilité, qui indiquera comment évolue le système légèrement écarté de sa situation d'équilibre.

Écrivons, au voisinage de la solution A

$$I_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} + i_1 \quad (4.77a)$$

$$I_2 = i_2 \quad (4.77b)$$

où les termes i_1 et i_2 sont des infiniments petits. En se limitant à un développement d'ordre 1, les équations (4.72a) s'écrivent alors autour de A

$$\frac{di_1}{dt} = \alpha_1 i_1 - 2\beta_1 \frac{\alpha_1}{\beta_1} i_1 - \theta_{12} \frac{\alpha_1}{\beta_1} i_2 \quad (4.78a)$$

$$\frac{di_2}{dt} = (\alpha_2 - \theta_{21} \frac{\alpha_1}{\beta_1}) i_2 \quad (4.78b)$$

On peut récrire ce système sous forme matricielle

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (4.79a)$$

avec

$$[M] = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\theta_{12}\frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ 0 & \alpha_2 - \theta_{21}\frac{\alpha_1}{\beta_1} \end{bmatrix} \quad (4.79b)$$

On a maintenant un système d'équations différentielles linéaires, dont les solutions sont des exponentielles du temps :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [\lambda]e^{r_1 t} + [\mu]e^{r_2 t} \quad (4.80)$$

Les constantes r_1 et r_2 sont solutions de l'équation aux valeurs propres

$$(-\alpha_1 - r)(\alpha_2 - \theta_{21}\frac{\alpha_1}{\beta_1} - r) = 0 \quad (4.81)$$

Elles sont évidemment réelles, et valent

$$r_1 = -\alpha_1 \quad (4.82a)$$

$$r_2 = \alpha_2 - \theta_{21}\frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (4.82b)$$

La solution A n'est stable que si les deux constantes r_1 et r_2 sont négatives. Dans ce cas, tout écart accidentel de l'équilibre va aboutir à un transitoire amorti. Comme r_1 est négatif, nous voyons que A est stable si

$$\alpha_2 < \theta_{21}\frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (4.83)$$

c'est-à-dire si le point A est plus éloigné de l'origine que le point B' .

L'analyse ci-dessus peut être refaite sans difficulté pour la solution B , où la linéarisation conduit à une matrice

$$[M] = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \theta_{12}\frac{\alpha_2}{\beta_2} & 0 \\ -\theta_{21}\frac{\alpha_2}{\beta_2} & -\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Les valeurs propres ne seront toutes les deux négatives que si

$$\alpha_1 < \theta_{12}\frac{\alpha_2}{\beta_2} \quad (4.85)$$

c'est-à-dire si le point B est plus éloigné de l'origine que le point A' .

Comme nous nous sommes placés dans le cas où les deux droites AA' et BB' ne se coupent pas dans le premier quadrant, les deux conditions (4.83) et (4.85) sont incompatibles. Parmi les deux solutions A et B , il en existera toujours une stable et une instable, la solution stable étant celle associée à la droite la plus éloignée de l'origine. Dans le cas de la figure 4.10, la solution stable est donc le point A , alors que B est instable.

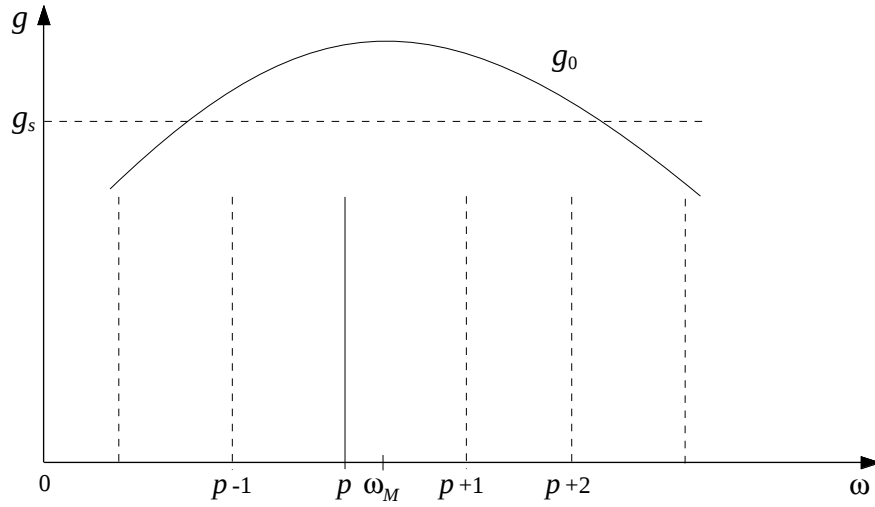


FIG. 4.11: *Compétition entre modes.* A priori, il y a quatre modes susceptibles de laser, pour lesquels le gain non saturé g_0 est supérieur au gain seuil g_s . Lorsque les termes de saturation croisés sont suffisamment forts, seul le mode le plus favorisé lase effectivement. Si par suite d'une dilatation de la cavité le peigne des modes glisse vers la gauche, le mode p s'éteindra et le mode $p+1$ s'allumera dès que le mode $p+1$ sera plus près que le mode p du sommet ω_M de la courbe de gain.

En pratique, le laser fonctionnera sur sa solution stable, c'est-à-dire que *seul sera actif le mode le plus favorisé* : il s'agit de celui pour lequel le terme α des équations (??), qui représente la différence entre gain non-saturé et pertes, est le plus grand (figure 4.11).

Le processus que nous avons décrit ici est le processus de *compétition entre modes*, qui aboutit à voir le mode le plus favorisé complètement éliminer les modes moins favorisés. Cette situation se présente dans les lasers où le terme de saturation croisée est grand. C'est en particulier le cas lorsque l'élargissement de la courbe de gain est de type homogène (cf. courbe 3.2 du paragraphe 3.3). La compétition entre modes s'observe dans les lasers à solide (Nd : YAG ou Ti : saphir) où il peut suffire de légèrement favoriser un mode pour que le laser devienne monomode.

4.4.3 Un seul mode actif : bistabilité

Considérons maintenant la situation de la figure 4.9, où les deux droites AA' et BB' se coupent dans le premier quadrant, et les points A et B sont respectivement plus éloignés de l'origine que B' et A' . Ici, les trois solutions A , B et C existent. De plus, en vertu de l'analyse de stabilité effectuée au paragraphe 4.4.2, les solutions A et B sont toutes les deux stables.

Pour faire l'analyse de stabilité de la solution C , nous considérons des fluctuations des

intensités au voisinage de C

$$I_1 = I_{1C} + i_1 \quad (4.86a)$$

$$I_2 = i_{2C} + i_2 \quad (4.86b)$$

Le développement des équations (4.75b) et (4.76b) au premier ordre donne un système d'équations différentielles linéarisées de la forme (4.79a) avec

$$[M] = \begin{bmatrix} -\beta_1 I_{1C} & -\theta_{12} I_{1C} \\ -\theta_{21} I_{2C} & -\beta_2 I_{2C} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

L'équation caractéristique correspondante s'écrit

$$r^2 + (\beta_1 I_{1C} + \beta_2 I_{2C})r + (\beta_1 \beta_2 - \theta_{12} \theta_{21}) I_{1C} I_{2C} = 0 \quad (4.88)$$

Or, dans le cas de la figure 4.9, nous avons

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\theta_{21}} \quad (4.89a)$$

et

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2} > \frac{\alpha_1}{\theta_{12}} \quad (4.89b)$$

d'où on déduit

$$\beta_1 \beta_2 < \theta_{12} \theta_{21} \quad (4.90)$$

Ce régime correspond à un *couplage fort* entre les deux modes, puisque les termes de saturation croisée sont supérieurs aux termes d'autosaturation. À cause de (4.90), les racines de l'équation (4.88) sont réelles et de signes opposés. La racine positive va donner une exponentielle croissant avec le temps : la solution C est donc instable.

Le système évoluera toujours vers l'une des deux solutions stables A ou B , dans lesquelles un seul mode est actif. Ici encore, la *compétition entre modes* aboutit à une solution où un seul mode lase, alors qu'a priori les conditions de seuil permettaient aux deux modes d'être actifs.

La situation est pourtant très différente de celle du paragraphe 4.4.2 où une seule solution était stable. Ici, pour un jeu de paramètres $(\alpha_1, \beta_1, \theta_{12}, \alpha_2, \beta_2, \theta_{21})$, il y a deux solutions stables. On dit qu'on a un système *bistable*. Dans une telle situation, la solution effectivement choisie par le système dépend des conditions initiales, et plus généralement de son histoire passée (hystérésis). Il est en effet facile de voir, en cherchant les vecteurs propres de $[M]$, que l'on peut effectuer une partition du plan $(I_1 I_2)$ par une droite passant par C , et telle que chaque demi-plan décrit des conditions initiales évoluant respectivement soit vers A , soit vers B . Une fois que le système «a choisi» l'une des solutions, il y reste de façon robuste, peu sensible aux perturbations dues à des modifications accidentelles ou voulues des paramètres.

Un comportement de ce type s'observe lorsqu'on constate qu'un laser monomode, qui a démarré sur le mode le plus favorisé (le plus près du sommet de la courbe de gain), reste sur ce mode alors que, par suite d'une modification de la longueur de cavité, ce mode s'éloigne suffisamment du sommet de la courbe de gain pour ne plus être le plus favorisé.

Ce comportement, différent de celui décrit dans la légende de la figure 4.11, est présenté sur la figure 4.12.

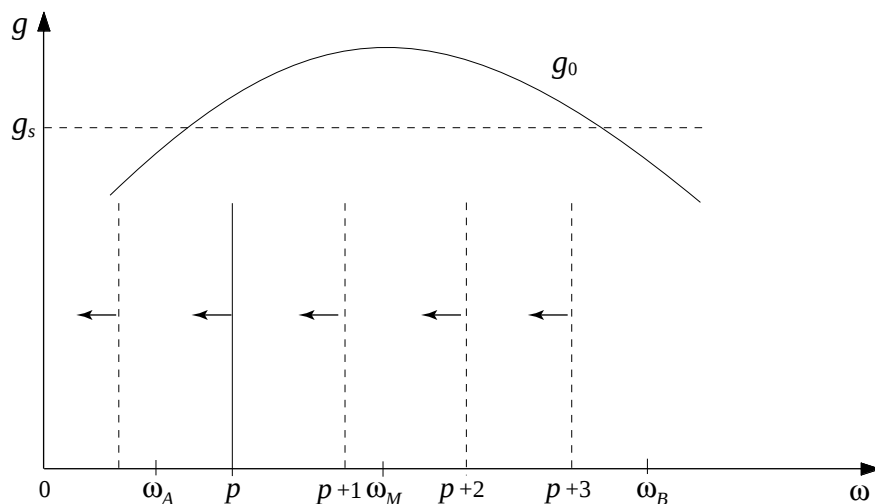


FIG. 4.12: Comme pour la figure 4.11, à cause de la compétition entre modes, un seul mode lase à la fois, mais il ne s'agit pas nécessairement du mode le plus favorisé : cela dépend en fait de l'histoire antérieure, et un mode allumé le reste tant que son gain non saturé est supérieur aux pertes. Ici, si le peigne des modes glisse vers la gauche, le mode p s'éteindra lorsque ω_p atteindra ω_A . Le mode qui s'allumera alors sera le plus proche du sommet ω_M de la courbe de gain.

Au-delà de la compréhension du fonctionnement des lasers, les régimes bistables sont d'un très grand intérêt en vue du traitement optique de l'information. Le stockage et le traitement de l'information digitale, codée sous forme binaire, repose en effet sur des effets de bistabilité, qui donnent une bonne immunité au bruit.

4.4.4 Deux modes simultanément actifs : fonctionnement multimode

Considérons maintenant le cas de la figure 4.13 où les deux droites AA' et BB' se coupent dans le premier quadrant, mais où les solutions A et B sont respectivement plus près de l'origine que les points B' et A' .

Ici, les deux solutions A et B sont instables, tandis que C est stable : quelle que soit la situation de départ, le système évoluera vers la situation où les deux modes sont simultanément actifs, avec des intensités stationnaires I_{1C} et I_{2C} données par les équations

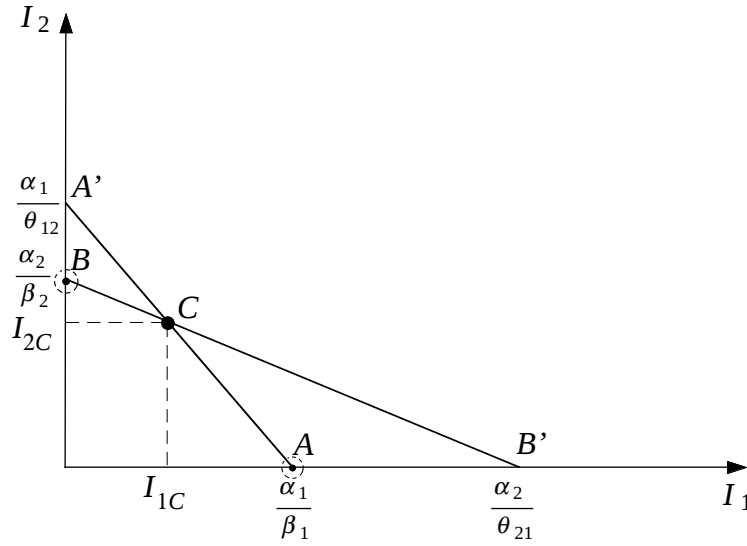


FIG. 4.13: Situation où les deux modes sont actifs simultanément, avec des intensités stationnaires I_{1C} et I_{2C} . Les solutions A et B sont instables, et C est stable.

(4.75b) et (4.76b). On a un fonctionnement multimode.

La situation de la figure 4.13 est caractérisée par la condition

$$\theta_{12}\theta_{21} < \beta_1\beta_2 \quad (4.91)$$

qui est la condition opposée à (4.90). On est dans un régime de *couplage faible* puisque les termes de saturation croisée sont inférieurs aux termes d'autosaturation. La situation extrême est celle où les termes de saturation croisée sont nuls : les modes sont alors indépendants. C'est la situation associée à un élargissement inhomogène de la courbe de gain, et présentée sur la figure 3.1 du chapitre 3.

Remarque

Notons que dans le cas considéré ici, les racines de l'équation caractéristique (4.88) sont toujours réelles et négatives : le retour vers la solution stable C est amorti non-oscillant.

4.4.5 Importance de ces phénomènes

Les phénomènes que nous venons de voir ont une très grande importance pratique, pour maîtriser le fonctionnement des lasers. Il est très difficile de rendre un laser monomode si on ne sait pas identifier la situation en terme de bistabilité ou de compétition entre modes. Ce type d'analyse s'applique non seulement aux modes ayant des fréquences différentes, mais aussi pour des polarisations différentes, ou des sens de propagation différents dans une cavité en anneau.

Mais ces phénomènes ont une portée allant bien au-delà de la physique du laser. Nous avons vu en effet qu'un simple jeu de deux équations différentielles couplées, avec un terme

de couplage non-linéaire, conduit à une riche variété de comportements. Il s'agit là d'un exemple simple du fait que la physique du laser est un domaine privilégié d'étude des phénomènes non-linéaires, aussi bien théorique qu'expérimentale. Les équations étudiées ici peuvent en fait s'appliquer à des nombreuses situations. Par exemple, la compétition entre des espèces différentes, dans une niche écologique donnée, se traduit par des comportements analogues. Un des intérêts de la physique du laser est de permettre l'investigation des diverses solutions possibles avec un système de taille réduite, et des temps de réponse très brefs. Les expériences de physique des lasers ont effectivement apporté des contributions importantes à la physique non-linéaire, et plus généralement à la science des comportements non-linéaires.

Chapitre 5

Dynamique des lasers. Lasers en impulsion

Dans la partie 5 du chapitre 3, nous avons expliqué que la spécificité de la lumière laser tient au fait que l'énergie est concentrée dans une cellule élémentaire de l'espace des phases. C'est ce qui permet de concentrer la lumière laser, suivant la variable de son choix. Ainsi, on peut focaliser un pinceau laser sur une dimension transversale Δx de l'ordre de la longueur d'ordre λ ; mais si on accepte de dilater le faisceau laser, on peut au contraire le collimater, c'est-à-dire concentrer le flux dans un angle $\Delta\theta = \lambda/\Delta x$. On peut ainsi choisir de concentrer le faisceau laser suivant l'une ou l'autre des variables conjuguées : dimension transversale, divergence angulaire. Ce raisonnement s'applique suivant deux dimensions transversales, et il concerne donc deux couples de variables conjuguées.

Il existe un troisième couple de variables conjuguées : la fréquence et le temps. On peut chercher à rendre un laser aussi monochromatique que possible, concentrant ainsi l'énergie sur une bande spectrale $\Delta\omega$ très étroite (voir le paragraphe 3.3.3). Mais on peut au contraire chercher à délivrer l'énergie lumineuse en un temps aussi bref que possible, ce qui conduit à une puissance crête très élevée, même avec des énergies modérées. Il existe aujourd'hui des lasers capables de délivrer plusieurs kilojoules en quelques picosecondes, soit une puissance crête de 10^{15} watts, c'est-à-dire l'équivalent de 10^6 tranches de centrales nucléaires. Des lasers « Mégajoules » sont en construction, aux États-Unis, et en France. Ils permettront l'étude en laboratoire de milieux thermonucléaires. Mais de simples lasers émettant un milliJoule en 10^{-12} s, à la portée de petits laboratoires, permettent d'atteindre des régimes relativistes dans l'interaction lumière matière.

En fait, les lasers en impulsions brèves ne servent pas qu'à atteindre des puissances élevées. Les impulsions lumineuses ultrabrèves, qui peuvent être aussi courtes que quelques femtosecondes (10^{-15} s), constituent aujourd'hui l'outil le plus précis pour étudier les phénomènes ultra-rapides, en particulier les phénomènes chimiques ou biochimiques élémentaires, ou les phénomènes électroniques dans les solides.

Ce chapitre se propose d'introduire les notions de base qui permettent de comprendre

la dynamique des lasers, et en particulier les comportements conduisant à l'émission d'impulsions brèves. Par opposition au chapitre précédent, où on s'intéressait à des régimes stationnaires, nous décrirons ici des situations où le champ à l'intérieur de la cavité laser, et le milieu amplificateur, n'ont pas encore atteint d'état stationnaire. Nous verrons également des cas où il n'y a pas de régime stationnaire. Pour comprendre ces comportements, il nous faudra d'abord généraliser les équations du laser utilisées au chapitre précédent.

5.1 Équations d'évolution couplées du champ et des atomes

5.1.1 Les équations semi-classiques du laser

Pour écrire l'équation d'amplification du champ (4.4.33), nous avons utilisé le modèle d'amplificateur du chapitre 2 dans lequel on suppose que le milieu amplificateur a atteint un état stationnaire en présence d'un champ d'amplitude constante. La dynamique du mode laser est alors complètement décrite par l'évolution d'une seule variable, l'amplitude $\mathcal{A}_p$ du champ dans ce mode. On peut se demander comment généraliser le traitement dans le cas où le champ n'évolue pas lentement à l'échelle des constantes de temps atomiques.

Dans cette situation, le laser sera décrit comme un système mettant en jeu deux sous-systèmes couplés : le champ électromagnétique d'une part, le milieu atomique amplificateur d'autre part. La description du milieu atomique nécessite en fait deux variables : d'une part l'inversion de population par unité de volume et d'autre part la polarisation diélectrique $\mathbf{P}$, c'est-à-dire le dipôle atomique induit par unité de volume (cf. § 4.3.a du chapitre 2). Ces deux variables atomiques locales sont couplées entre elles par l'intermédiaire du champ électrique local, et leur évolution est décrite par deux équations différentielles du temps comportant un terme de couplage¹.

Dans une cavité laser, le champ électrique évolue sous l'effet de son couplage avec la polarisation diélectrique, qui intervient dans les équations de Maxwell ($\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ est un courant qui doit être pris en compte au deuxième membre de (2.2.1.d), et qui joue le rôle d'un terme source dans l'équation de propagation). Cette évolution est donc décrite par une équation aux dérivées partielles du temps et de l'espace.

En définitive, les équations les plus générales du laser sont constituées des *trois équations différentielles*, dont certaines aux dérivées partielles, décrivant l'évolution couplée localement du champ électrique, de la polarisation diélectrique, et de l'inversion de population. Ces équations locales doivent être complétées par les conditions aux limites imposées au champ par la cavité laser.

¹Ces équations découlent directement des équations de Bloch optique qui décrivent l'évolution couplée des éléments diagonaux et non-diagonaux de la matrice densité atomique (Complément 2.2, Équations (3.14) et (3.15)).

Ces trois équations différentielles correspondent à la description semi-classique du laser : les atomes y sont traités quantiquement mais le champ électromagnétique est une grandeur classique. Il se trouve que ce modèle est extrêmement fructueux, et permet de comprendre de nombreuses caractéristiques du comportement des lasers. Notons quand même qu'il faut introduire de façon heuristique l'émission spontanée.

En fait, telles que nous les avons présentées, ces équations sont beaucoup trop générales pour pouvoir être résolues. On effectue donc une première simplification consistant à introduire les modes de la cavité (cf. Chapitre 4, partie 1.1), ce qui va permettre d'éviter le problème des équations aux dérivées partielles couplées. En effet, de même qu'on a défini l'amplitude complexe $\mathcal{A}_p$ du mode p (Equation 4.4.3) on pourra définir une amplitude de polarisation $\mathcal{P}_p$ moyennée sur le mode, ainsi que l'inversion de population correspondante $\Delta N_p = \iiint d^3r |\mathbf{u}_p(\mathbf{r})|^2 [n_b(\mathbf{r}) - n_a(\mathbf{r})]$. On obtient ainsi des équations différentielles ordinaires du temps, qui relient trois nombres (deux complexes, et un réel) : l'amplitude du champ électrique $\mathcal{A}_p(t)$, l'amplitude de la polarisation diélectrique $\mathcal{P}_p(t)$, et l'inversion de population couplée au mode $\Delta N_p(t)$.

Le problème se simplifie encore car seule la composante de la polarisation diélectrique en quadrature avec le champ électrique est couplée aux autres variables. Nous pouvons alors choisir l'origine du temps telle que $\mathcal{A}_p(t)$ soit réel ($\mathcal{A}_p(t) = A_p(t)$) et nous notons $iP_p(t)$ la partie imaginaire de $\mathcal{P}_p(t)$. À l'issue de ces simplifications, les équations semi-classiques d'un laser monomode portent sur trois grandeurs réelles A_p , P_p , ΔN_p :

$$\frac{d}{dt}P_p = -\frac{1}{T_2}P_p + c_1A_p\Delta N_p \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta N_p = -\frac{1}{T_1}(\Delta N_p - \Delta N_0) - c_2A_pP_p \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt}A_p = -CA_p + c_3P_p \quad (5.3)$$

Les constantes de temps $T_1 = 1/\Gamma_1$ et $T_2 = 1/\Gamma_2$ caractérisent respectivement l'amortissement de l'inversion de population et de la polarisation diélectrique.

Remarques

(i) La constante d'amortissement Γ_2 de la polarisation diélectrique est en général égale (ou au moins voisine) à la largeur de raie laser introduite au paragraphe 4.2.1.1.

(ii) Malgré leur structure très simple, les équations (5.1) à (5.3) constituent un modèle très fructueux pour la dynamique non-linéaire de trois variables dynamiques couplées. On montre par exemple² que ces trois équations sont isomorphes des équations de Lorenz en hydrodynamique, dont on sait qu'elles sont à la base d'un comportement chaotique³.

Il existe en fait tout un champ de recherche expérimentale sur le chaos utilisant les lasers.

²Voir par exemple L. Mandel et E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press 1995, page 967.

³E.N. Lorenz, *J. Atmosph. Sc.* 20, 130 (1963). C'est dans cet article qu'est introduit la célèbre image de « l'effet papillon » pour illustrer le comportement chaotique des situations météorologiques.

5.1.2 Élimination adiabatique de la polarisation diélectrique

Il se trouve que dans la plupart des milieux lasers, les deux variables atomiques ΔN et P sont amorties avec des constantes de temps T_1 et T_2 très différentes, contrairement au modèle très simplifié du chapitre 2 où nous n'avions introduit qu'une seule constante de temps Γ_D^{-1} .

Dans la grande majorité des cas, la polarisation diélectrique relaxe beaucoup plus vite que l'inversion de population. Le temps T_2 , qui caractérise l'amortissement du dipôle moyen (Équation (5.1)), est très souvent inférieur à la nanoseconde (lasers à gaz) voire à la picoseconde (lasers solides ou à colorants). Au contraire, le temps d'amortissement T_1 de l'inversion de population (Équation (5.2)) est typiquement supérieur à la microseconde (une telle situation favorise l'apparition d'une inversion de population, et donc l'effet laser).

En ce qui concerne le temps d'amortissement γ_{cav}^{-1} d'un mode de la cavité (Équation (4.21)), il est dans la plupart des cas nettement supérieur à la nanoseconde.

En définitive, T_2 est généralement beaucoup plus court que γ_{cav}^{-1} et que T_1 . Si nous nous plaçons à une échelle de temps longue devant T_2 , mais courte devant T_1 et γ_{cav}^{-1} , l'équation (5.1) d'évolution de la polarisation diélectrique est une équation à coefficients quasi constants ($A_p(t)$ et $\Delta N(t)$ ne varient pas à cette échelle). Le régime transitoire est amorti au bout d'un temps T_2 qui est très court, et la solution stationnaire de l'équation permet d'exprimer $P_p(t)$ en fonction de $A_p(t)$ et $\Delta N_p(t)$ sous la forme

$$P_p = c_1 T_2 A_p \Delta N_p \quad (5.4)$$

En reportant dans (5.2) et (5.3), on obtient

$$\frac{d}{dt} \Delta N_p = -\frac{1}{T_1} (\Delta N_p - \Delta N_0) - c_1 c_2 T_2 A_p^2 \Delta N_p \quad (5.5)$$

$$\frac{d}{dt} A_p = -\mathcal{C} A_p + c_3 c_1 T_2 \Delta N_p A_p \quad (5.6)$$

Nous avons ainsi réduit les équations du laser à deux équations différentielles relatives au champ et à l'inversion de population dans un mode. Nous allons maintenant écrire plus précisément les coefficients de ces équations en nous laissant guider par le modèle simple du chapitre 2, tel que nous l'avons mis en œuvre au chapitre 4.

Remarque

La méthode d'approximation qui nous a permis d'éliminer la variable P_p en remarquant qu'elle s'amortit beaucoup plus vite que les autres s'appelle « élimination adiabatique » (cf. § 5.5). En prenant la solution stationnaire de l'équation d'évolution P_p , on admet que $P_p(t)$ « suit adiabatiquement » les variables plus lentes $A_p(t)$ et $\Delta N_p(t)$.

5.1.3 Équations couplées entre le champ et l'inversion de population : raisonnement heuristique

Considérons le modèle simplifié de milieu amplificateur présenté au chapitre 2, et qui a servi à l'étude du laser en régime quasi-stationnaire (Chapitre 4). Si nous nous plaçons à une échelle de temps longue devant T_2 mais courte devant T_1 nous pouvons présumer que l'équation d'évolution du champ due au milieu laser est de la forme (4.33), c'est-à-dire⁴

$$\left[\frac{dA}{dt} \right]_{\text{gain}} = \frac{g(t)L_A}{2} \frac{c}{L_{\text{cav}}} A(t) \quad (5.7)$$

à condition d'exprimer le gain $g(t)$ en fonction de l'inversion de population à l'instant t : $\Delta N(t) = N_b - N_a$. En utilisant l'expression (2.5.23) du gain, on écrit

$$g(t) = \frac{\kappa}{2} \Delta N(t) \quad (5.8)$$

avec

$$\kappa = \frac{\sigma c}{V_A} \frac{L_A}{L_{\text{cav}}} = \frac{\sigma}{S} \frac{c}{L_{\text{cav}}} = \frac{\sigma c}{V_{\text{cav}}} \quad (5.9)$$

(Rappelons que σ est la section efficace de la transition laser, L_A et V_A la longueur et le volume du milieu amplificateur, S est la section du milieu amplificateur, ou encore la section du faisceau laser quasi-cylindrique).

En prenant en compte l'amortissement de la cavité (Équation 4.27), l'équation d'évolution du mode laser vue au chapitre 4 (§ 4.2.7) devient

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} A(t) + \frac{1}{2} \kappa \Delta N(t) A(t) \quad (5.10)$$

On peut évidemment écrire pour l'intensité du mode laser (en multipliant par $2A(t)$)

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma_{\text{cav}} I + \kappa \Delta N I \quad (5.11)$$

Établissons maintenant l'équation d'évolution pour l'inversion de population $\Delta N(t)$. Les processus de pompage des milieux laser étant généralement incohérents, nous admettons que l'évolution des populations obéit à des équations cinétiques (voir les paragraphes 2.E.4 et 3.B.2). On en déduit alors une équation cinétique pour l'inversion de population. Par exemple, les équations (2.E.17a) et (2.E.17b) de notre modèle particulier donnent

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \Gamma_D s \Delta N - \Gamma_D \Delta N + \Gamma_D \Delta N_0 \quad (5.12)$$

⁴Pour ne pas alourdir les notations, nous omettons l'indice p quand il est évident que nous considérons un seul mode. De plus, nous avons simplifié par le terme de phase qui est en facteur des deux membres.

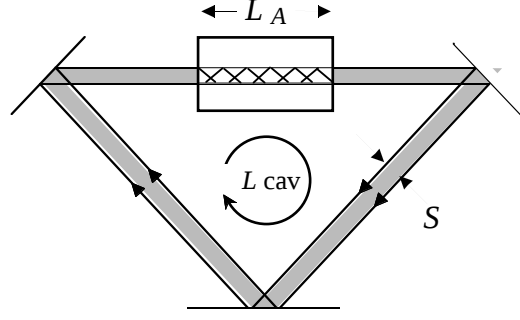


FIG. 5.1: Cavité laser en anneau, avec un mode quasi-cylindrique de section S . Le volume du milieu amplificateur interagissant avec le faisceau est $V_A = S L_A$. Le volume de la cavité est $V_{cav} = S L_{cav}$.

où ΔN_0 est l'inversion de population stationnaire non saturée en l'absence de faisceau laser ($s = 0$). Le paramètre s étant proportionnel à l'intensité du mode laser, on a finalement une équation de la forme

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \Gamma_1(\Delta N_0 - \Delta N) - 2\beta I \Delta N \quad (5.13)$$

où β peut s'exprimer en fonction des paramètres atomiques.

Les équations (5.11) et (5.13) constituent un jeu de deux équations différentielles couplées qui régissent le comportement de très nombreux lasers. Elles ont ici été obtenues de façon heuristique, mais comme nous l'avons déjà indiqué, on peut obtenir des équations de ce type à partir des équations fondamentales, à condition que les dipôles atomiques relaxent beaucoup plus vite que les deux autres variables (champ laser, inversion de population), c'est-à-dire si

$$\Gamma_2 \gg \Gamma_1, \gamma_{cav} \quad (5.14)$$

On peut alors introduire des * quations cinétiques pour le champ*, comme on l'a fait au paragraphe (2.5.5). Le deuxième terme du deuxième membre de (5.11) s'interprète alors comme un bilan de l'émission induite et de l'absorption, tandis que le premier terme est l'amortissement de la cavité.

De même, lorsque la condition (5.14) est satisfaite, on peut écrire, pour les populations des niveaux atomiques, des équations cinétiques qui font intervenir l'intensité du mode laser (comme au paragraphe (2.5.4). Dans ces équations, on voit en général apparaître plusieurs constantes de temps. On admet que les plus courtes correspondent à des termes qui s'amortissent très rapidement, et on ne garde que la constante de temps la plus longue $1/\Gamma_1$. On obtient alors une équation du type (5.13).

En définitive, nous admettons que l'on peut décrire de façon très générale le comportement des lasers par deux équations couplées entre l'inversion de population ΔN et

l'intensité du mode laser I

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma_{\text{cav}} I + \kappa \Delta N I \quad (5.15)$$

$$\frac{d\Delta N}{dt} = \Gamma_1(\Delta N_0 - \Delta N) - 2\beta I \Delta N \quad (5.16)$$

On notera que les termes de couplage sont non linéaires, vis à vis des deux variables I et ΔN .

Avant d'exploiter ces équations, nous allons montrer qu'il existe une relation entre les coefficients κ et β qui apparaissent dans les termes de couplage. Cette relation sera particulièrement facile à interpréter, et donc à admettre de façon générale, en exprimant l'intensité I du mode laser en fonction de l'énergie électromagnétique U stockée dans la cavité, réexprimée en nombre de photons $\mathcal{N} = U/\hbar\omega$.

5.1.4 Evolutions couplées des atomes et des photons

En introduisant l'énergie U du champ dans le mode

$$U = 2\varepsilon_0 V_{\text{cav}} A^2 = \frac{\Pi}{c} V_{\text{cav}} \quad (5.17)$$

l'équation d'évolution du champ laser (5.11) se réécrit

$$\frac{dU}{dt} = -\gamma_{\text{cav}} U + \kappa \Delta N U \quad (5.18)$$

Passons maintenant à l'évolution du milieu amplificateur. Pour le modèle particulier du chapitre 2, les équations (2.5.22a) et (2.5.22b) montrent que le deuxième terme de (5.13) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\Delta N}{dt} \right]_{\text{couplage}} &= \left[\frac{d\Delta N}{dt} \right]_{\text{abs}} + \left[\frac{d\Delta N}{dt} \right]_{\text{sti}} \\ &= -2\Delta N \sigma \frac{\Pi}{\hbar\omega} \end{aligned} \quad (5.19)$$

En utilisant l'expression (5.9) de κ , on constate que ce terme peut s'exprimer

$$\left[\frac{d\Delta N}{dt} \right]_{\text{couplage}} = -2\Delta N \kappa \frac{V_{\text{cav}}}{c} \frac{\Pi}{\hbar\omega} = -2\kappa \Delta N \frac{U}{\hbar\omega} \quad (5.20)$$

Nous avons ainsi établi la connexion entre les coefficients κ et β , dans le cas particulier de notre modèle.

Pour montrer la généralité de cette relation, nous introduisons – comme le dernier terme de l'équation (5.20) nous y incite – le nombre de photons associés à l'énergie U

$$\mathcal{N} = \frac{U}{\hbar\omega} = \frac{2\varepsilon_0 V_{\text{cav}} A^2}{\hbar\omega} = \frac{\varepsilon_0 V_{\text{cav}}}{\hbar\omega} I \quad (5.21)$$

Les équations couplées (5.15) et (5.16) peuvent alors se récrire sous la forme remarquable

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{N}}{dt} = -\gamma_{\text{cav}} \mathcal{N} + \kappa \Delta N \mathcal{N} \quad (5.22)$$

et

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Delta N = -\Gamma_1 [\Delta N - \Delta N_0] - 2\kappa \mathcal{N} \Delta N \quad (5.23)$$

Le rapport simple des termes de couplage (facteur -2) suggère une interprétation très parlante de ces termes. Supposons par exemple que ce couplage entraîne, pendant l'intervalle de temps dt , une modification de l'inversion de population

$$d[\Delta N] = (-2\kappa \mathcal{N} \Delta N) dt \quad (5.24)$$

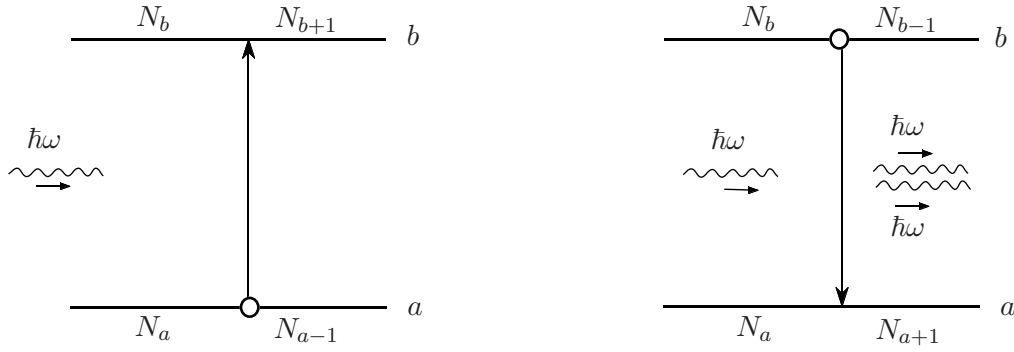


FIG. 5.2: Variation de l'inversion de population due à l'absorption (ou à l'émission stimulée) : pour 1 photon absorbé (ou émis), l'inversion de population $\Delta N = N_b - N_a$ varie de deux unités.

Quand un atome passe de l'état $|a\rangle$ à l'état $|b\rangle$, ΔN varie de deux unités (Figure 5.2), et on a donc

$$dN_b = -dN_a = \frac{1}{2} d[\Delta N] = (-\kappa \mathcal{N} \Delta N) dt \quad (5.25)$$

atomes qui sont passé de l'état $|a\rangle$ à l'état $|b\rangle$. Lors de cette transition, l'énergie des atomes s'accroît d'une quantité

$$dU_{\text{at}} = \hbar\omega_0 dN_b \quad (5.26)$$

L'énergie des atomes est prélevée sur le champ, dont l'énergie varie de

$$dU_{\text{cav}} = -dU_{\text{at}} = -\hbar\omega_0 dN_b \quad (5.27)$$

Le nombre de photons varie donc, du fait du couplage, de

$$d\mathcal{N} = -\frac{\hbar\omega_0}{\hbar\omega} dN_b \quad (5.28)$$

Compte tenu de (5.26), et du fait⁵ que ω_0 est très voisin de ω , on constate que la variation $d\mathcal{N}$ obtenue à l'issue de ce raisonnement est identique à celle résultant du terme de couplage dans l'équation (5.22) :

$$d\mathcal{N} = -\frac{1}{2}d[\Delta N] \quad (5.29)$$

Les termes de couplages des équations (5.22) et (5.23) peuvent donc s'interpréter comme des échanges d'énergie entre le champ électromagnétique et les atomes. La relation algébrique très simple entre les deux termes s'interprète directement en terme de *conservation de l'énergie*.

Vu la généralité de ce dernier argument, on s'attend à avoir dans tous les cas, et pas seulement pour notre modèle particulier, une relation simple entre les coefficients de couplage dans les deux équations différentielles. C'est effectivement le cas, mais la valeur exacte du facteur doit être calculée dans chaque cas particulier, par exemple en écrivant des équations cinétiques pour les populations. Considérons ainsi un système très différent de notre modèle du chapitre 2, mais qui représente très bien la transition laser dans un système à 4 niveaux (Figure 5.3) : le niveau du bas se vide très vite, de sorte que

$$N_a \simeq 0 \quad (5.30)$$

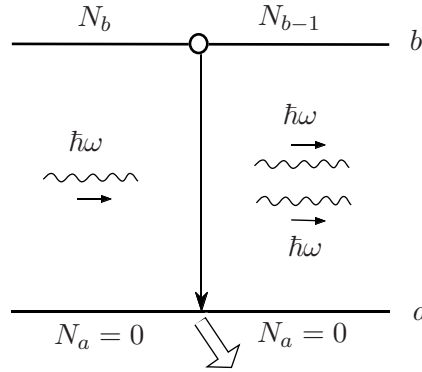


FIG. 5.3: Dans le cas d'un système où le niveau du bas se vide très vite ($N_a = 0$), l'inversion de population varie seulement d'une unité lors d'une émission stimulée.

Alors l'inversion de population s'écrit

$$\Delta N \simeq N_b \quad (5.31)$$

et le facteur 2 du terme de couplage de l'équation (5.23) doit être remplacé par 1 : lorsqu'une transition se produit, 1 photon est échangé avec le champ, et l'inversion de population varie d'une unité (et non de 2). Ce cas est celui du laser à Néodyme YAG

⁵Voir la remarque du paragraphe D.4.b du chapitre 2.

(1,06 μm) mais aussi celui de la raie à 633 nm du laser Hélium-Néon. Pour ces lasers, l'équation d'évolution (5.23) est remplacée par

$$\frac{d}{dt}\Delta N = -\Gamma_1(\Delta N - \Delta N_0) - \kappa \mathcal{N} \Delta N \quad (5.32)$$

Comme le facteur est en général compris entre 1 et 2, on utilise parfois l'écriture suivante, qui se révèle très commode :

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Delta N = -\Gamma_1(\Delta N - \Delta N_0) - 2^* \kappa \mathcal{N} \Delta N \quad (5.33)$$

où il est entendu que le facteur 2^* peut varier entre 1 et 2 suivant le système considéré. Les équations (5.33) et (5.22), constituent les équations de base de l'évolution d'un très grand nombre de lasers. Il convient d'y rajouter les expressions des coefficients intervenant dans ces équations, en fonction des paramètres caractérisant la transition laser. Ces diverses formules sont données dans la table 1.

$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = -\gamma_{\text{cav}}\mathcal{N} + \kappa \Delta N \mathcal{N}$	(T1)
$\frac{d}{dt}\Delta N = -\Gamma_1(\Delta N - \Delta N_0) - 2^* \kappa \Delta N \mathcal{N}$	(T2)
$\gamma_{\text{cav}} = \frac{c}{L_{\text{cav}}}(T + \alpha)$	(T3)
$\kappa = \frac{\sigma c}{V_{\text{cav}}}$	(T4)
$\sigma = \frac{\sigma_M}{1 + 4 \left(\frac{\omega - \omega_M}{\Gamma_2} \right)^2}$	(T5)

Table 1 : *Équations couplées atomes photons, et expression des coefficients en fonction des paramètres de la transition laser et de la cavité. Ces équations permettent de décrire le comportement d'un très grand nombre de lasers.*

Remarque

L'écriture des équations (T1) et (T2) de la Table 1 ne doit pas faire oublier que l'équation d'évolution du champ met en fait en jeu l'amplitude complexe du champ, qui possède également une phase. On se souviendra donc que l'on peut, au lieu de (T1), écrire l'équation

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}\mathcal{A} + \frac{\kappa}{2}\Delta N \mathcal{A} \quad (5.34)$$

5.1.5 Cas $\Gamma_1 \gg \gamma_{\text{cav}}$: Élimination adiabatique de l'inversion de population ; régime quasi-stationnaire pour les atomes

Il existe tout une classe de lasers (appelés de type A) pour lesquels l'inversion de population relaxe beaucoup plus vite que le champ laser. On a alors la relation

$$\Gamma_1 \gg \gamma_{\text{cav}} \quad (5.35)$$

Dans ces conditions, on peut effectuer une approximation connue sous le nom « d'élimination adiabatique de la variable rapide ». On remarque que la vitesse de variation de $\mathcal{N}$ étant contrôlée par γ_{cav} (Équation (T1) de la table 1), $\mathcal{N}$ peut être considéré comme constant (à l'échelle de $1/\Gamma_1$), dans l'équation (T2) de la table 1. Le régime stationnaire de ΔN , obtenu au bout de quelques Γ_1^{-1} , est alors donné par

$$\Delta N_\infty = \frac{\Delta N_0}{1 + \frac{2^* \kappa}{\Gamma_1} \mathcal{N}} \quad (5.36)$$

On peut utiliser cette expression de ΔN en fonction de $\mathcal{N}$, pour éliminer ΔN dans l'équation (T1) de la table 1, ce qui donne

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = -\gamma_{\text{cav}} \mathcal{N} + \frac{\kappa \Delta N_0}{1 + \frac{2^* \kappa}{\Gamma_1} \mathcal{N}} \mathcal{N} \quad (5.37)$$

On retrouve ainsi l'équation d'évolution du mode laser lorsque les atomes sont en régime stationnaire vis-à-vis du champ. L'équation (5.37) est celle utilisée au chapitre 4 pour l'intensité du mode (Équation (4.43)) ou pour son amplitude (Équation (4.38)).

Il est utile de noter les relations obtenues en identifiant les coefficients intervenant dans ces équations. On a ainsi

$$\frac{g_0 L_A c}{L_{\text{cav}}} = \kappa \Delta N_0 = \frac{\sigma c}{V_{\text{cav}}} \Delta N_0 \quad (5.38)$$

d'où l'on déduit

$$g_0 = \sigma \frac{\Delta N_0}{V_A} \quad (5.39)$$

Par ailleurs, on définit naturellement le nombre de photons de saturation

$$\mathcal{N}_{\text{sat}} = \frac{\Gamma_1}{2^* \kappa} = \frac{\Gamma_1 V_{\text{cav}}}{2^* \sigma c} \quad (5.40)$$

En utilisant l'équation (5.21), on en déduit une expression de l'intensité de saturation

$$I_{\text{sat}} = \frac{\Gamma_1 \hbar \omega}{2^* \epsilon_0 \sigma c} \quad (5.41)$$

On peut également, à l'aide de (5.17), obtenir l'intensité de saturation exprimée en puissance par unité de surface :

$$\Pi_{\text{sat}} = \frac{\hbar \omega \Gamma_1}{2^* \sigma} \quad (5.42)$$

Nous constatons ainsi que, pour les lasers de ce type, l'intensité de saturation n'est pas un paramètre indépendant.

Une transition laser est donc, dans notre modélisation, caractérisée par les paramètres :

- fréquence de résonance ω_M ;
- section efficace laser σ ;
- largeur de raie Γ_2 ;
- taux de relaxation de l'inversion de population Γ_1 ;
- valeur du coefficient 2^* (entre 1 et 2).

5.2 Dynamique d'un laser libre. Démarrage. Impulsions de relaxation

5.2.1 Conditions initiales. Démarrage

On peut se demander comment un laser démarre, lorsqu'on branche brusquement le mécanisme d'inversion de population (par exemple une lampe flash qui réalise un pompage optique). En effet, si nous prenons comme condition initiale

$$\mathcal{N}(t = 0) = 0 \quad (5.43)$$

nous constatons que l'équation (5.22), ou (T1) de la table 1, ne prédit aucune évolution. Ce problème est en fait commun à tous les oscillateurs classiques, et on le résout généralement en invoquant la présence de bruit qui permet à l'oscillation de démarrer.

Dans le cas d'un laser, nous savons qu'il y a toujours de la lumière dans le mode laser, à cause de l'émission spontanée qui existe dès que des atomes du milieu amplificateur sont portés dans le niveau supérieur de la transition laser. Pour en tenir compte, nous prenons comme condition initiale pour le mode laser

$$\mathcal{N}(t = 0) > 0 \quad (5.44)$$

Pour être spécifique, nous pourrions prendre

$$\mathcal{N}(t = 0) = 1 \quad (5.45)$$

Quant à l'inversion de population, elle a à l'instant initial une valeur ΔN imposée par l'excitation du milieu amplificateur. L'équation (T1) (ou 5.22) montre alors que le laser démarre ($\mathcal{N}$, initialement non nul, croît) à condition que

$$\Delta N > \Delta N_{\text{seuil}} \quad (5.46)$$

avec

$$\Delta N_{\text{seuil}} = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{\kappa} \quad (5.47)$$

On retrouve la condition de seuil (4.4.55).

5.2.2 Régime stationnaire

Si on applique au milieu amplificateur une excitation constante, se traduisant dans l'équation (T2) par un terme ΔN_0 constant, supérieur à la valeur de seuil (5.47), il existe une solution stationnaire des équations (T1) et (T2)

$$\Delta N_\infty = \Delta N_{\text{seuil}} = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{\kappa} \quad (5.48)$$

et

$$\mathcal{N}_\infty = \frac{\Gamma_1}{2^* \kappa} \left(\frac{\Delta N_0}{\Delta N_\infty} - 1 \right) = \mathcal{N}_{\text{sat}}(r - 1) \quad (5.49)$$

Nous avons introduit le nombre de photon à saturation $\mathcal{N}_{\text{sat}}$ défini en (5.40), et le rapport r , défini au paragraphe 4.5.1.2, et que l'on peut récrire

$$r = \frac{\kappa \Delta N_0}{\gamma_{\text{cav}}} = \frac{\Delta N_0}{\Delta N_\infty}. \quad (5.50)$$

Rappelons que r exprime le rapport entre le gain non saturé et les pertes (cf. équation 4.4.40)).

L'existence d'une solution stationnaire ne nous renseigne ni sur la stabilité, ni sur la façon – régulière ou accidentée – dont le laser évolue vers cette solution. En fait, la nature de l'évolution dépend des ordres de grandeur relatifs des constantes de temps en jeu dans le problème.

5.2.3 Ordres de grandeurs. Types de lasers

Les deux constantes de temps intervenant dans les deux équations couplées (5.22) et (5.23), ou (T1) et (T2), sont $1/\Gamma_1$ qui caractérise la relaxation de l'inversion de population du milieu laser, et $1/\gamma_{\text{cav}}$ qui caractérise l'amortissement du champ dans la cavité (cavité « froide »). La hiérarchie entre ces deux constantes dépend du type de laser.

Considérons d'abord un laser à gaz, par exemple un laser à Hélium-Néon. La constante Γ_1 vaut

$$(\Gamma_1)_{\text{He-Ne}} \simeq 10^7 \text{ s}^{-1}$$

Un tel milieu laser a un gain très faible, et on doit prendre une cavité avec très peu de pertes et un milieu amplificateur long pour obtenir l'effet laser. Ainsi, pour $T = 10^{-2}$, et une longueur $L_{\text{cav}} = 1 \text{ m}$, on a

$$\gamma_{\text{cav}} \simeq T \frac{c}{L_{\text{cav}}} = 3 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$$

Un tel laser, où l'inversion de population relaxe plus vite que la cavité, est appelé de type A :

$\gamma_{\text{cav}} \ll \Gamma_1 : \text{laser de type A}$

Si au contraire on s'intéresse à un laser à Néodyme : YAG, l'inversion de population relaxe très lentement

$$(\Gamma_1)_{\text{Nd : YAG}} \simeq 4,3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$$

Ceci est très favorable au démarrage du laser. On peut utiliser des cavités beaucoup plus ouvertes. Typiquement, on prendra un coupleur de sortie avec une transmission T de l'ordre de 10^{-1} , et une cavité de quelques dizaines de centimètres. Alors γ_{cav} atteint des valeurs typiques

$$\gamma_{\text{cav}} \simeq 10^8 \text{ s}^{-1}$$

Un tel laser, où la cavité s'amortit beaucoup plus vite que l'inversion de population, est appelé de type B :

$$\gamma_{\text{cav}} \gg \Gamma_1 : \text{laser de type B}$$

Type de laser	<i>He – Ne</i> Type A	<i>Nd : YAG</i> Type B
Γ_1	10^7 s^{-1}	$4,3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$
γ_{cav}	qq 10^6 s^{-1}	qq $\times 10^7 \text{ s}^{-1}$
$\Gamma_2/2\pi$	$2 \times 10^9 \text{ Hz}$	10^{11} Hz
σ_L	$3 \times 10^{-15} \text{ cm}^2$	$4 \times 10^{-19} \text{ cm}^2$
$\lambda_L = \frac{2\pi c}{\omega_L}$	$0,6328 \mu\text{m}$	$1,06 \mu\text{m}$
2^*	1 (4 niveaux)	1 (4 niveaux)
$\mathcal{N}_{\text{sat}}$	10^{11}	10^{11}

Table 2 : Quelques ordres de grandeurs pour deux types de laser.

La table 2 résume quelques propriétés de ces deux types de laser. Nous y avons indiqué la largeur de la courbe de gain, Γ_2 ainsi que le nombre de photons typique à saturation (pour une section de faisceau $S = 1 \text{ mm}^2$)

$$\mathcal{N}_{\text{sat}} = \frac{\Gamma_1}{2^* \kappa} = \frac{\Gamma_1 V_{\text{sat}}}{2^* \sigma c}$$

Remarque

Pour les deux types de laser considérés, la constante de relaxation des dipôles Γ_2 est toujours nettement plus grande que γ_{cav} et Γ_1 . Il existe des lasers, appelés lasers de type C, pour lesquels les 3 constantes sont du même ordre de grandeur. La dynamique est alors beaucoup plus complexe que ce que nous décrivons dans ce chapitre. On y observe en particulier des comportements chaotiques très intéressants.

5.2.4 Démarrage d'un laser de type A

Comme on l'a expliqué au paragraphe 5.1.5, on peut, lorsque γ_{cav} est plus petit que Γ_1 , éliminer adiabatiquement l'inversion de population. Le régime stationnaire de l'équation (T2) nous donne ainsi

$$\frac{\Delta N}{\Delta N_0} = \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_{\text{sat}}}} \quad (5.51)$$

En reportant dans (T1) cette expression de ΔN en fonction de $\mathcal{N}$, on obtient une équation différentielle pour $\mathcal{N}$, que l'on peut écrire

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \gamma_{\text{cav}} \mathcal{N} \left[-1 + \frac{r}{1 + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_{\text{sat}}}} \right] \quad (5.52)$$

Au début de l'évolution, le nombre de photons $\mathcal{N}$ est très petit devant $\mathcal{N}_{\text{sat}}$, et on peut négliger le terme de saturation. Le laser démarre alors exponentiellement. En prenant la condition initiale (5.45), on a

$$\mathcal{N} = \exp\{\gamma_{\text{cav}}(r - 1)t\} \quad (5.53)$$

Cette solution va rester valable tant que $\mathcal{N}$ est petit devant la valeur asymptotique (5.49). Prenons par exemple

$$r - 1 = 10^{-2}$$

Alors

$$\mathcal{N}_{\infty} = (r - 1)\mathcal{N}_{\text{sat}} \simeq 10^9$$

et le temps nécessaire pour atteindre cette valeur est de

$$t_{\text{montée}} \approx \frac{\log \mathcal{N}_{\infty}}{\gamma_{\text{cav}}(r - 1)} \simeq 2 \times 10^3 (\gamma_{\text{cav}})^{-1} \simeq 10^{-3} \text{ s}$$

Le démarrage d'un tel laser est donc lent, à l'échelle de $1/\gamma_{\text{cav}}$. La raison est bien sûr que le nombre de photons doit croître de beaucoup d'ordres de grandeur.

Lorsque le nombre de photons devient de l'ordre de $\mathcal{N}_{\infty}$, il n'existe pas de solution analytique générale de (5.52), mais on peut penser que la solution de démarrage (5.53) va se raccorder régulièrement à la valeur stationnaire $\mathcal{N}_{\infty}$. C'est ce que confirme le résolution numérique de l'équation (5.52).

Lorsque $r - 1$ est petit devant 1, on peut donner une solution approchée de (5.52). En effet, $\mathcal{N}/\mathcal{N}_{\text{sat}}$ reste alors également petit devant 1, et on peut utiliser un développement limité du terme de saturation de (5.53), ce qui donne

$$\frac{1}{\gamma_{\text{cav}}} \frac{d\mathcal{N}}{dt} = \left[(r - 1) - r \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_{\text{sat}}} \right] \mathcal{N} \quad (5.54)$$

La valeur stationnaire solution de (5.54)

$$\mathcal{N}'_{\infty} = \frac{r}{r-1} \mathcal{N}_{\text{sat}} \quad (5.55)$$

est proche de la valeur exacte (5.49) lorsque $r-1$ est petit devant 1. En fait, on peut intégrer l'équation approchée (5.54), avec la condition initiale (5.45) ($\mathcal{N} = 1$ à $t = 0$), et on obtient

$$\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}_{\text{sat}}} = \frac{(r-1)}{r} \frac{1}{1 + \left(\frac{r-1}{r} \mathcal{N}_{\text{sat}} - 1\right) \exp[-(r-1)\gamma_{\text{cav}} t]} \quad (5.56)$$

En prenant les développements pour $t \ll t_{\text{montée}}$ puis pour $t \gg t_{\text{montée}}$, on vérifie que $\mathcal{N}$ démarre bien suivant (5.53), puis tend vers la valeur asymptotique (5.55). La figure (5.4.a) montre cette évolution, qui fait apparaître un remarquable temps de latence de l'ordre de $t_{\text{montée}}$, puis une montée brutale jusqu'à la valeur asymptotique. En fait, comme le montre clairement la figure (5.4.b) où on a représenté l'évolution du logarithme de $\mathcal{N}$, ce qui apparaît comme un temps de latence est en fait une croissance exponentielle.

On a également représenté, sur la figure (5.4.c), l'inversion de population (équation (5.51)). On constate bien que si elle est initialement supérieure à la valeur de seuil, ce qui permet le démarrage, elle décroît jusqu'à la valeur de seuil lorsque le régime stationnaire est atteint (cf. équation (5.5.48), ou § 4.4.51).

Remarque

Lorsque $r-1$ est petit devant 1, on constate que la constante de temps caractéristique de l'évolution du nombre de photons $\mathcal{N}$ vaut $[\gamma_{\text{cav}}(r-1)]^{-1}$. Elle est beaucoup plus longue que $1/\gamma_{\text{cav}}$, et la condition d'élimination adiabatique de l'inversion de population s'écrit en fait

$$\Gamma_1 \gg (r-1)\gamma_{\text{cav}} \quad (5.57)$$

ce qui est beaucoup plus facile à satisfaire que $\Gamma_1 \gg \gamma_{\text{cav}}$. Un démarrage suivant le scénario de ce paragraphe, peut en fait s'observer même sur des lasers de type B, lorsque l'excitation du milieu laser est modérée (r voisin de 1).

5.2.5 Laser relaxé

2.5.1 Démarrage

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où

$$\Gamma_1 \ll (r-1)\gamma_{\text{cav}}$$

de sorte que ΔN ne suit plus adiabatiquement le champ laser $\mathcal{N}$. On prendra l'exemple d'un laser à Néodyme : YAG, pour lequel $\Gamma_1 \simeq 4,3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_{\text{cav}} = 5 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$. Le système est à 4 niveaux, et 2^* est égal à 1.

Nous choisissons le cas d'un gain élevé

$$r = 2$$

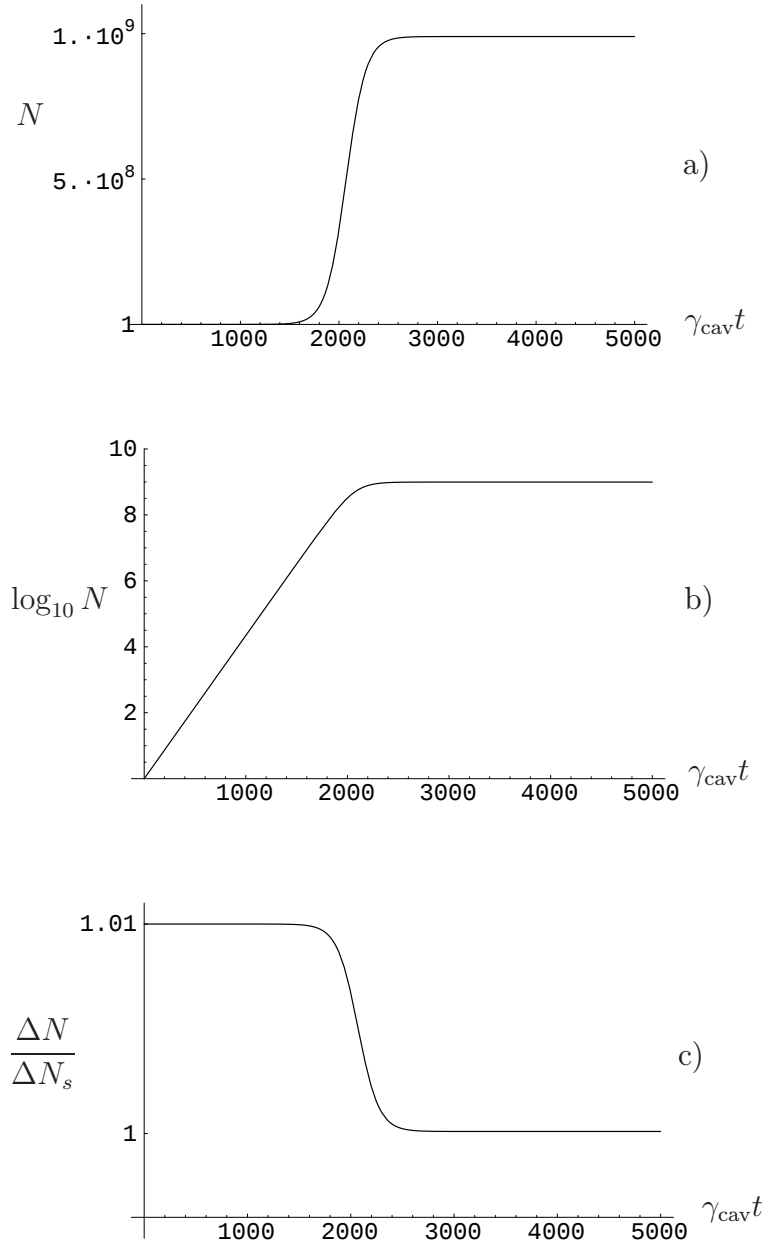


FIG. 5.4: Démarrage d'un laser à gaz, pour les valeurs suivantes : $r - 1 = 10^{-2}$; $\mathcal{N}_{\text{sat}} = 10^{11}$. On a porté le nombre de photons $\mathcal{N}$, et son logarithme décimal, en fonction de $\gamma_{\text{cav}} t$ (cf. équation (B.13)). On note un temps de latence d'environ $2000 \gamma^{-1}$. La troisième courbe représente l'inversion de population, qui va se verrouiller à la valeur seuil.

et des conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(0) &= 1 \\ \Delta N &= 0 \end{aligned}$$

Rappelons que juste après l'instant initial, le gain est branché, ce qui se traduit par le terme $\Gamma_1 \Delta N_0$ dans l'équation (T1) (page 42).

On ne connaît pas de solution exacte des équations couplées (T1) et (T2), dans le cas considéré ici. Néanmoins, il est facile de décrire à grands traits le comportement associé à ces équations. Déterminons pour fixer les idées les valeurs asymptotiques

$$\mathcal{N}_\infty = (r - 1)\mathcal{N}_{\text{sat}} = \mathcal{N}_{\text{sat}} = 10^{11}$$

$$\Delta N_\infty = \Delta N_{\text{seuil}} = \frac{\Delta N_0}{r} = \frac{\Delta N_0}{2}$$

Au départ, $\mathcal{N}$ est très petit devant $\mathcal{N}_{\text{sat}}$, et le terme de couplage de l'équation (T2) est négligeable. L'inversion de population obéit donc à l'équation simplifiée

$$\frac{d}{dt}\Delta N = -\Gamma_1(\Delta N - \Delta N_0) \quad (5.58)$$

Elle croît exponentiellement vers l'asymptote ΔN_0 , avec la constante Γ_1 (Figure 5.5). Tant que ΔN reste inférieur à la valeur de seuil $\Delta N_0/2$, le nombre de photons reste de l'ordre de 1. Mais à l'instant

$$t_1 = \frac{1}{\Gamma_1} \log r$$

l'inversion de population franchit la valeur de seuil, et le nombre de photons se met à croître très vite. On peut par exemple linéariser l'évolution de ΔN au voisinage du seuil

$$\Delta N = \Delta N_{\text{seuil}}[1 + (r - 1)\Gamma_1(t - t_1)]$$

et en déduire que $\mathcal{N}$ croît suivant la loi

$$\mathcal{N} \simeq \exp \left[\frac{(r - 1)}{2} \gamma_{\text{cav}} \Gamma_1 (t - t_1)^2 \right]$$

Cette croissance rapide va permettre à $\mathcal{N}$ d'atteindre la valeur stationnaire à l'instant t_2 , tel que

$$\left(\frac{r - 1}{2} \right) \gamma_{\text{cav}} \Gamma_1 (t_2 - t_1)^2 = \log \mathcal{N}_\infty \simeq 25 .$$

Mais à la différence du cas précédent, l'inversion de population ne sature pas instantanément, et $\mathcal{N}$ continue à croître au-dessus de la valeur stationnaire. L'inversion de population commence alors à décroître, avec une constante de temps de l'ordre de Γ_1 . Cependant, cette décroissance est lente, et le laser est toujours au-dessus du seuil : la rapide croissance de $\mathcal{N}$ se poursuit, jusqu'à ce que, à l'instant t_3 , l'inversion de population ΔN franchisse en décroissant la valeur seuil. Alors, le laser s'arrête rapidement d'émettre, après quelques γ_{cav}^{-1} .

Un tel fonctionnement est appelé *relaxé*. Il est dû à la différence des temps caractéristiques de variation des variables couplées. Plus précisément, l'inversion de population réagissant lentement aux variations du champ, ces variations sont exacerbées. C'est ainsi qu'on obtient une impulsion dont le maximum est beaucoup plus intense que la valeur stationnaire.

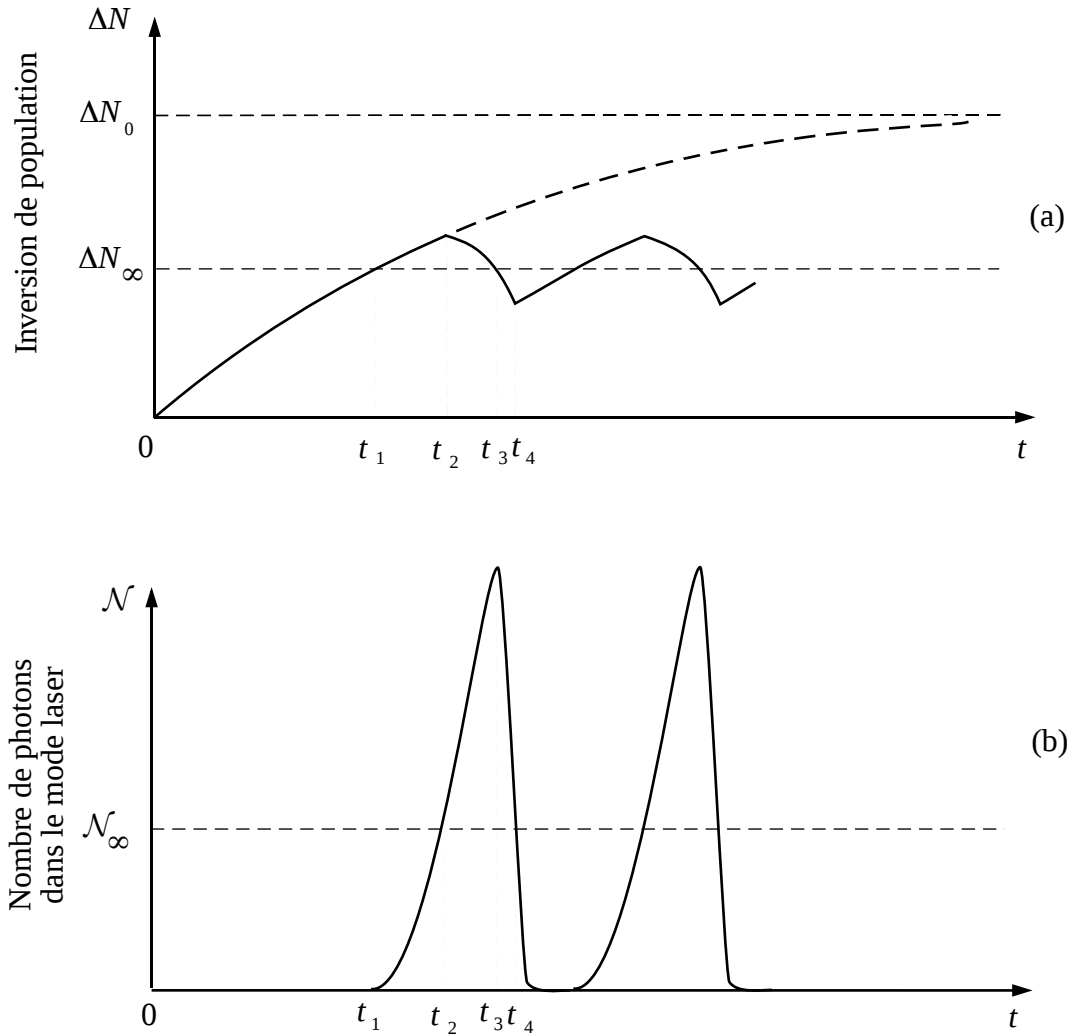


FIG. 5.5: Démarrage d'un laser relaxé. Le nombre $\mathcal{N}$ de photons dans le mode laser commence à croître très vite à partir de t_1 , lorsque l'inversion de population ΔN franchit la valeur stationnaire ΔN_∞ qui est aussi la valeur de seuil ($t_1 = T_1 \log 2$). L'inversion de population se met à décroître aux alentours de t_2 , instant où $\mathcal{N}$ franchit la valeur stationnaire, et le nombre de photons passe par un maximum lorsque ΔN franchit en descendant ΔN_∞ . Le résultat est une oscillation en dents de scie pour ΔN (fréquence quelques Γ_1) et des impulsions brèves pour $\mathcal{N}$ (durée typique $1/200 \Gamma_1$). Noter que les échelles ne sont pas respectées : $\mathcal{N}$ varie de plus de 10 ordres de grandeur lors d'une impulsion.

2.5.2 Oscillations de relaxation amorties

Comme le montre la figure 5.5, un scénario analogue à celui du démarrage va se reproduire. L'inversion de population va se remettre à croître avec un temps caractéristique de l'ordre de Γ_1^{-1} , c'est-à-dire une fraction de millisecondes. Puis, l'impulsion va se construire en quelques γ_{cav}^{-1} , et s'arrêter en γ_{cav}^{-1} environ, de l'ordre de la microseconde.

Le processus va se poursuivre, mais avec une amplitude décroissante (Figure 5.6). On aboutit finalement à de petites oscillations amorties vers le régime stationnaire, que nous allons étudier maintenant.

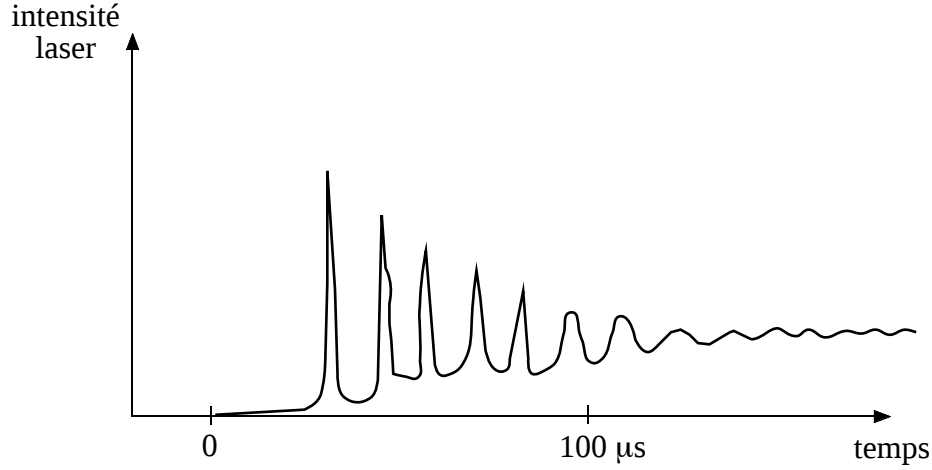


FIG. 5.6: Régime transitoire typique dans un laser à Néodyme : YAG. On applique le pompage de l'inversion de population à $t = 0$. On observe des oscillations de relaxation amorties.

2.5.3 Petites oscillations amorties

Lorsque le laser approche du régime stationnaire, on peut linéariser les équations d'évolution de $\mathcal{N}$ et ΔN autour des valeurs stationnaires.

On obtient ainsi, pour les petites variations de $\mathcal{N}$ et ΔN

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta(\Delta N) \\ \delta\mathcal{N} \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} \delta(\Delta N) \\ \delta\mathcal{N} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

avec

$$[M] = \begin{bmatrix} -\Gamma_1 r & -\gamma_{\text{cav}} \\ \Gamma_1(r-1) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

L'équation aux valeurs propres de $[M]$ s'écrit

$$\lambda^2 + \lambda\Gamma_1 r + \gamma_{\text{cav}}\Gamma_1(r-1) = 0 \quad (5.61)$$

et les valeurs propres sont

$$\lambda = -\frac{r\Gamma_1}{2} \pm i\sqrt{(r-1)\gamma_{\text{cav}}\Gamma_1 - \Gamma_1^2 \frac{r^2}{4}} \quad (5.62a)$$

Dans le cas $r = 2$, on a des oscillations amorties puisque

$$\lambda = -\Gamma_1 \pm i\sqrt{\gamma_{\text{cav}}\Gamma_1}\sqrt{1 - \frac{\Gamma_1}{\gamma_{\text{cav}}}} \quad (5.62b)$$

En fait les oscillations existent même pour un pompage modéré (il suffit que $\frac{r-1}{r^2} > \frac{\Gamma_1}{\gamma_{\text{cav}}}$, soit $r - 1 > 10^{-4}$ dans notre exemple). Leur pulsation vaut :

$$\Omega = \sqrt{(r-1)\Gamma_1\gamma_{\text{cav}}}\sqrt{1 - \frac{r^2}{4(r-1)}\frac{\Gamma_1}{\gamma_{\text{cav}}}} \quad (5.63)$$

La fréquence $\Omega/2\pi$ est de l'ordre de 100 kHz pour les valeurs numériques citées en exemple.

On observe effectivement, dans les lasers à solides, des oscillations de ce type lorsque le laser est un peu écarté de son régime stationnaire. Elles se manifestent dans le spectre des fluctuations de l'intensité de sortie du laser, par un pic étroit (le facteur de qualité des oscillations est de l'ordre de $\sqrt{\gamma_{\text{cav}}/\Gamma_1}$) dans la gamme des 100 kHz. Ce pic correspond à un retour oscillant amorti vers l'équilibre à la fréquence Ω , lorsqu'une perturbation accidentelle écarte le laser de son régime stationnaire.

Remarque

Le phénomène de petites oscillations que nous venons de décrire est souvent désigné sous le terme « oscillations de relaxation » dans les ouvrages traitant des lasers. Au sens strict du vocabulaire généralement utilisé en mécanique, en acoustique, ou en électronique, les oscillations de relaxation sont un phénomène de basculement périodique d'un système entre deux états d'équilibre instables. L'émission initiale d'impulsions en régime relaxé (Figure 5.6) constitue un exemple d'oscillations de relaxation (amorties) au sens propre du terme. Mais le phénomène décrit dans ce paragraphe B.4.3 correspond plutôt à de petites oscillations amorties.

5.3 Laser déclenché

5.3.1 Principe

L'apparition d'impulsions de relaxation dans le régime transitoire (Figure 5.6) n'a pas que des inconvénients. D'une part on dispose d'impulsions relativement courtes, utiles pour l'étude de phénomènes rapides. D'autre part nous avons noté que l'intensité de crête de l'impulsion est très supérieure à la valeur stationnaire, et on sait qu'il existe de nombreux phénomènes où il est intéressant d'avoir une intensité très élevée (étude de phénomènes d'optique non-linéaire par exemple).

L'inconvénient majeur des impulsions de relaxation est le caractère erratique du temps au bout duquel elles apparaissent. De plus, le fait d'avoir un train d'impulsions multiples est souvent inutile voire nuisible, et seule la première impulsion est intéressante.

C'est pour résoudre ces problèmes que, dès le début des lasers à rubis, on a pensé à *déclencher* le démarrage du laser, au lieu de le laisser l'impulsion laser se construire spontanément. L'idée consiste à empêcher le laser de démarrer en introduisant un obturateur initialement fermé dans la cavité. La figure 5.7 montre alors l'évolution de l'inversion de populations. En comparant à la figure 5.5.a, on constate que l'inversion de population continue de croître asymptotiquement vers la valeur non-saturée ΔN_0 , au lieu de redécroître peu après avoir franchi ΔN_∞ à l'instant t_1 . Lorsque ΔN est proche de ΔN_0 , on ouvre brusquement l'obturateur, à l'instant t_d . Comme dans le cas de la figure 5.5.b, le nombre de photons se met alors à croître, très vite, avec les différences qualitatives suivantes. D'une part la croissance est plus rapide car l'inversion de population $\Delta N(t_d)$ au moment du déclenchement est très supérieur au seuil ΔN_∞ , et le taux initial de croissance vaut (cf. Équation 5.49)

$$\left[\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{dt} \right]_{t=t_d} = \gamma_{\text{cav}} \left[-1 + \frac{\Delta N(t_d)}{\Delta N_\infty} \right] \quad (5.64)$$

alors que cette quantité était très petite juste après t_1 dans le cas relaxé (voir la Figure 5.5.a). D'autre part, le nombre de photons qui vont être fournis au champ laser par émission stimulée entre t_2 et t_3 , qui est de l'ordre de $\Delta N(t_2) - \Delta N(t_3)$, est manifestement beaucoup plus grand dans le cas déclenché que dans le cas relaxé.

De même, l'intensité laser étant beaucoup plus grande à l'instant t_3 , on aura $\Delta N(t_3) - \Delta N(t_4)$ plus grand dans le cas déclenché : l'énergie fournie par les atomes au champ en sera d'autant plus grande. En définitive, on s'attend à avoir une impulsion unique (on referme l'obturateur après t_4) beaucoup plus intense que chaque impulsion du laser relaxé.

5.3.2 Énergie de l'impulsion laser

Le paramètre important est le rapport entre l'inversion de population au moment du déclenchement, et l'inversion au seuil

$$r_d = \frac{\Delta N(t_d)}{\Delta N_\infty} \quad (5.65)$$

Nous le prendrons voisin de 2 pour les applications. La phase initiale de croissance du nombre de photons s'effectue suivant la loi approchée (cf. Équation (5.64))

$$\mathcal{N}(t) = \exp[\gamma_{\text{cav}}(r_d - 1)(t - t_d)] \quad (5.66)$$

tant que le phénomène de saturation reste négligeable dans l'équation (5.50), c'est-à-dire tant que $\mathcal{N}$ reste inférieur à la valeur stationnaire $\mathcal{N}_\infty$. Suivant la loi (5.66), cette valeur est franchie à l'instant t_2 tel que

$$t_2 - t_d = \frac{1}{\gamma_{\text{cav}}} \frac{1}{r_d - 1} \log \mathcal{N}_\infty \quad (5.67)$$

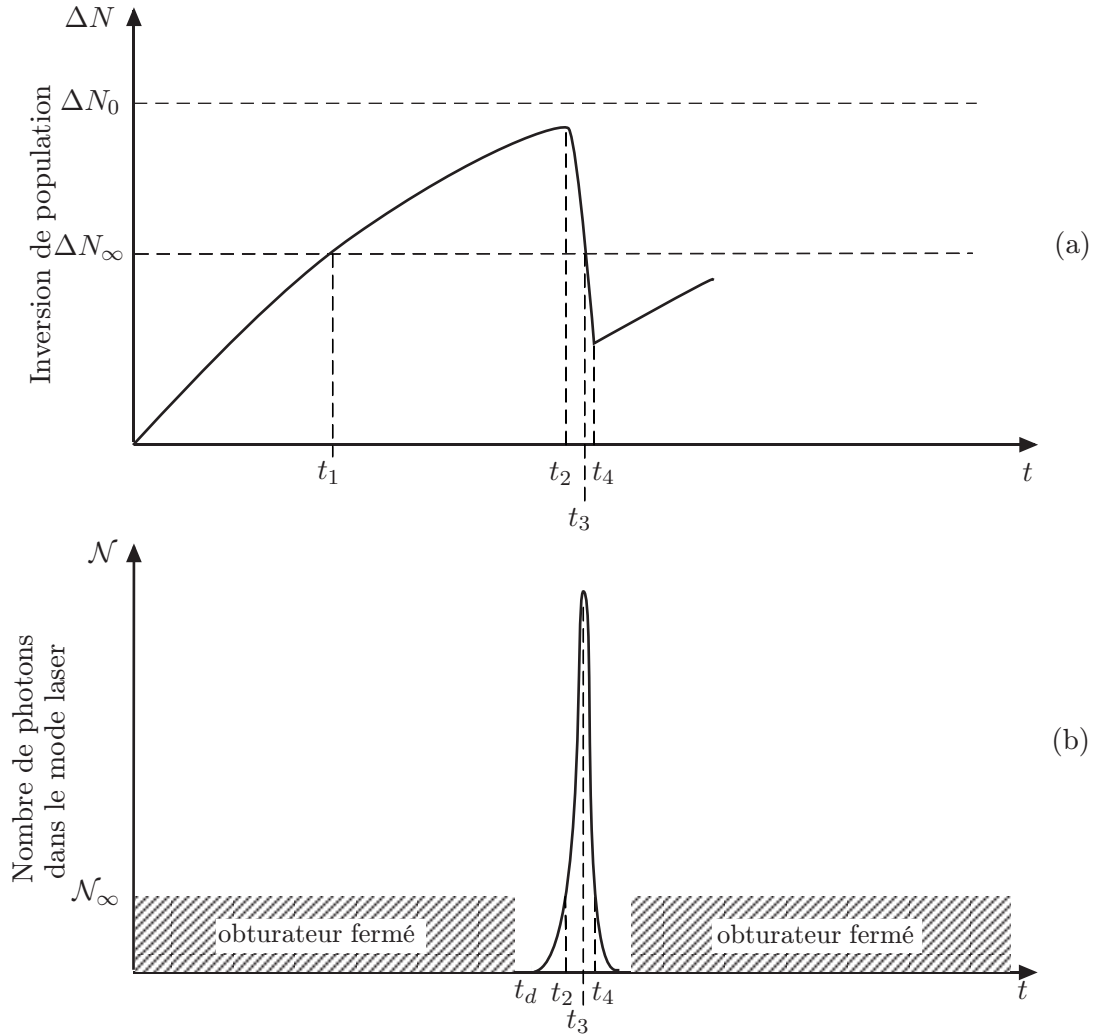


FIG. 5.7: Laser déclenché. Un obturateur placé dans la cavité empêche l'oscillation laser de démarrer, jusqu'à l'instant t_d où l'obturateur est ouvert. On a alors une impulsion analogue à celle de la figure 5, mais avec un contraste beaucoup plus marqué : elle est plus étroite et plus haute.

En utilisant les valeurs numériques de la partie 5.2, ce temps est de quelques centaines de nanosecondes. En fait, les lasers déclenchés sont souvent construits avec des cavités plus courtes ayant un couplage de sortie plus grand que les valeurs du paragraphe B.2.2, de sorte que γ_{cav} est plus grand d'un ordre de grandeur, et $t_2 - t_d$ est alors plus court du même facteur, c'est-à-dire inférieur à 100 ns.

Dans tous ces cas, on voit que l'échelle de temps de développement de l'impulsion laser est très brève comparée au temps de relaxation T_1 de l'inversion de population. Nous négligerons donc les termes de relaxation dans $(T2)^6$ pendant la durée de l'impulsion laser,

⁶Table 1, partie 5.1. Nous prenons $2^* = 1$, ce qui correspond au schéma à 4 niveaux.

et nous écrivons

$$\frac{d}{dt}\Delta N = -\kappa\mathcal{N}\Delta N \quad (5.68)$$

tandis que l'équation (T1) est inchangée. En utilisant (5.48) nous la mettons sous la forme

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N} = \kappa(\Delta N - \Delta N_\infty)\mathcal{N} \quad (5.69)$$

Nous prenons comme conditions initiales à $t = t_d$ (déclenchement)

$$\Delta N(t_d) = r_d \Delta N_\infty \quad (5.70)$$

$$\mathcal{N}(t_d) = 1 \quad (5.71)$$

En combinant les équations (5.69) et (5.68), on obtient

$$\frac{d\mathcal{N}}{d(\Delta N)} = \frac{\Delta N_\infty - \Delta N}{\Delta N} \quad (5.72)$$

Après intégration, on obtient (on néglige $\mathcal{N}(t_d) = 1$ devant $\mathcal{N}(t)$)

$$\mathcal{N}(t) = \Delta N(t_d) - \Delta N(t) - \frac{\Delta N(t_d)}{r_d} \log \left[\frac{\Delta N(t_d)}{\Delta N(t)} \right] \quad (5.73)$$

Cette équation reliant le nombre de photons $\mathcal{N}(t)$ à l'inversion de population $\Delta N(t)$ ne dépend que de deux paramètres : l'inversion de population au déclenchement $\Delta N(t_d)$, et l'inversion de seuil $\Delta N_\infty = \Delta N(t_d)/r_d$. Elle permet de déterminer de nombreuses caractéristiques importantes de l'impulsion laser.

5.3.3 Énergie extraite. Rendement

Une grandeur importante est l'énergie totale de l'impulsion sortant du laser. Pour la calculer, nous nous plaçons à un instant t_f situé après la fin de l'impulsion, telle que $\mathcal{N}(t_f)$ est voisin de zéro. L'équation (5.73) nous donne alors

$$1 - \frac{\Delta N(t_f)}{\Delta N(t_d)} - \frac{1}{r_d} \log \frac{\Delta N(t_d)}{\Delta N(t_f)} = 0 \quad (5.74)$$

Comme la durée de l'impulsion est suffisamment courte pour négliger les termes de pompage et de relaxation, toute la variation d'inversion de population est transformée en photons lasers, et nous avons donc une énergie totale de l'impulsion, en sortie du laser

$$E_s = \hbar\omega[\Delta N(t_d) - \Delta N(t_f)] \quad (5.75)$$

On peut définir un rendement η en introduisant l'énergie fournie par le processus de pompage (énergie d'entrée) :

$$E_e = \hbar\omega \Delta N(t_d) \quad (5.76)$$

et en considérant le rapport

$$\eta = \frac{E_s}{E_e} = \frac{\Delta N(t_d) - \Delta N(t_f)}{\Delta N(t_d)} \quad (5.77)$$

L'équation (5.74) donne alors pour le rendement une équation implicite

$$\eta = \frac{1}{r_d} \log \frac{1}{1 - \eta} \quad (5.78a)$$

qui peut aussi s'écrire

$$1 - \eta = e^{-\eta r_d} \quad (5.78b)$$

L'équation (5.78a) permet en fait d'exprimer r_d en fonction de η , et on peut tracer ainsi la courbe de la Fig. 5.8. On constate que le rendement croît rapidement dès que r_d est supérieur à 1 (pente initiale égale à 2), puis qu'il tend vers sa valeur asymptotique de 100%. Notons qu'il suffit que r_d vaille 1,72 pour que le rendement atteigne 70%.

Cette valeur élevée du rendement est un avantage important des lasers déclenchés, par rapport aux lasers relaxés.

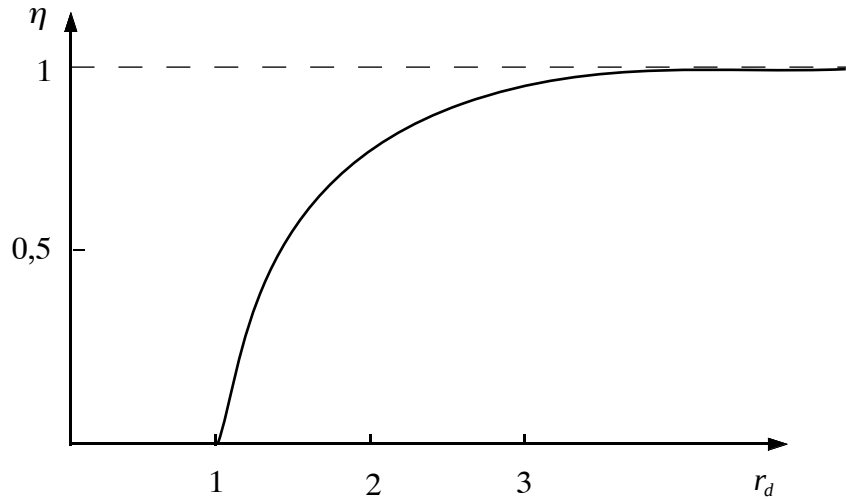


FIG. 5.8: Rendement d'un laser déclenché en fonction de l'inversion de population au déclenchement (normalisée par l'inversion de population au seuil).

5.3.4 Puissance crête. Durée de l'impulsion

L'impulsion laser atteint son maximum à l'instant t_3 où l'inversion de population en train de décroître passe par la valeur seuil ΔN_∞ . En reportant dans l'équation (5.73), on obtient le nombre maximum de photons dans la cavité

$$\mathcal{N}(t_3) = \Delta N_\infty (r_d - 1 - \log r_d) \quad (5.79a)$$

ou encore

$$\mathcal{N}(t_3) = \Delta N(t_d) \frac{r_d - 1 - \log r_d}{r_d} \quad (5.79b)$$

La première équation montre que le nombre de photons au pic croît avec r_d , et la deuxième montre que ce nombre de photons crête tend asymptotiquement vers l'inversion de population au déclenchement lorsque r_d augmente. Ceci montre que l'avantage du laser déclenché réside dans le fait que l'on permet à l'inversion de population de monter très au dessus du seuil ($r_d \gg 1$), à la différence du laser relaxé : puis, lorsqu'on ouvre l'obturateur, toute l'énergie stockée dans l'inversion de population est convertie en photons lasers en un temps très court.

La puissance crête de sortie s'écrit

$$P_s(t_3) = \hbar\omega\gamma_{\text{cav}}\mathcal{N}(t_3) \quad (5.80)$$

si on prend $r_d = 1,72$, et les valeurs numériques de référence (5.58) à (B.16), on trouve

$$\mathcal{N}(t_3) = 0,18 \Delta N_\infty \simeq 10^{14} \quad (5.81a)$$

d'où la puissance crête ($\hbar\omega = 1,87 \times 10^{-19} \text{ J}$ pour $\lambda = 1,06 \text{ }\mu\text{m}$)

$$P_s(t_3) \simeq 1 \text{ kW} \quad (5.81b)$$

La durée τ_L de l'impulsion peut être estimée par le rapport entre l'énergie de l'impulsion E_s (Équation (5.75)) et sa puissance crête (5.80). En utilisant (5.79b), on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_L &= \frac{1}{\gamma_{\text{cav}}} \frac{\Delta N(t_d) - \Delta N(t_f)}{\Delta N(t_d)} \frac{r_d}{r_d - 1 - \log r_d} \\ &= \frac{1}{\gamma_{\text{cav}}} \eta(r_d) \frac{r_d}{r_d - 1 - \log r_d} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Avec nos valeurs numériques de référence,

$$\tau_L = \frac{6,8}{\gamma_{\text{cav}}} \simeq 130 \text{ ns} \quad (5.83)$$

On retiendra que cette durée est de moins de 10 fois γ_{cav}^{-1} .

5.3.5 Déclenchement par absorbant saturable

Les premiers lasers déclenchés utilisaient un déclenchement actif par ouverture d'un obturateur synchronisée avec le pompage optique transitoire (lampe flash par exemple). Cette méthode posait un problème technique difficile. Il est convenablement résolu aujourd'hui par l'utilisation de modulateurs électro-optiques (cellules de Pockels), mais la solution reste techniquement complexe.

Il existe une autre méthode de déclenchement extrêmement élégante, utilisant un matériau appelé absorbant saturable. Cette méthode est passive, c'est-à-dire qu'on n'effectue aucune synchronisation active. L'idée consiste à insérer dans la cavité laser un matériau dont l'absorption décroît avec l'intensité lumineuse incidente. De nombreux colorants organiques possèdent cette propriété. Comme un système à deux niveaux présente également cette propriété, nous modélisons notre absorbant saturable par un système à deux niveaux analogue au milieu laser, mais sans inversion de population (dans notre modèle du chapitre 2, on prend $\Lambda_a > \Lambda_b$). En appelant

$$\Delta N' = N_{a'} - N_{b'} \quad (5.84)$$

la différence de population entre le niveau inférieur et le niveau supérieur de la transition de l'absorbant quasi-résonnante avec la transition laser, nous écrivons donc une équation d'évolution analogue à (5.23) ou (T1)

$$\frac{d}{dt}\Delta N' = -\Gamma'_1[\Delta N' - \Delta N'_0] - 2\kappa'\mathcal{N}\Delta N' \quad (5.85)$$

Le terme de couplage avec les photons a naturellement une contrepartie dans l'équation d'évolution du champ laser (5.22) ou (T2), qui devient

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = -\gamma_{\text{cav}}\mathcal{N} + \kappa\Delta N\mathcal{N} - \kappa'\Delta N'\mathcal{N} \quad (5.86)$$

(la différence des signes est liée aux définitions opposées pour ΔN et $\Delta N'$).

On constate que la solution stationnaire de (5.85), qui caractérise l'absorbant saturable :

$$\Delta N' = \frac{\Delta N'_0}{1 + 2\frac{\kappa'}{\Gamma'_1}\mathcal{N}} \quad (5.87)$$

décroît lorsque le nombre de photons $\mathcal{N}$ augmente : c'est le phénomène de saturation.

Les équations (5.85) et (5.86), complétées par l'équation (5.23) pour le milieu amplificateur, constituent un système d'équations différentielles couplées fortement non-linéaire. On ne connaît pas de solution analytique, mais ces équations permettent de comprendre comment fonctionne un laser déclenché à absorbant saturable. Elles peuvent bien sûr être intégrées numériquement.

Il est souvent possible de les simplifier car les absorbants saturables, qui sont des colorants organiques en phase liquide, ont des temps de relaxation $(\Gamma'_1)^{-1}$ beaucoup plus courts que l'impulsion laser (typiquement $(\Gamma'_1)^{-1} = 100$ ps). On peut alors éliminer adiabatiquement $\Delta N'$ de l'équation (5.86), en le remplaçant par la solution stationnaire (5.87). On obtient

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = -\left(\gamma_{\text{cav}} + \frac{\kappa'\Delta N'_0}{1 + \frac{2\kappa'}{\Gamma'_1}\mathcal{N}}\right)\mathcal{N} + \kappa\Delta N\mathcal{N} \quad (5.88)$$

Cette équation d'évolution de l'énergie laser comporte un terme de pertes qui a la propriété de décroître lorsque $\mathcal{N}$ croît.

On peut alors analyser qualitativement le fonctionnement du laser en suivant la même démarche que pour un laser relaxé ordinaire (voir paragraphe 5.2.3 et Figure 5.5). Lorsqu'on commence à pomper le milieu laser, l'inversion de population croît vers la valeur asymptotique ΔN_0 , et elle franchit à l'instant t_d la valeur seuil en présence de l'absorbant saturable

$$\Delta N_{\text{seuil}} = \frac{1}{\kappa}(\gamma_{\text{cav}} + \kappa' \Delta N_0') \quad (5.89)$$

La spécificité du laser à absorbant saturable est que ce seuil est nettement plus élevé que

$$\Delta N_{\infty} = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{\kappa} \quad (5.90)$$

La situation est représentée sur la figure 5.9, qui ressemble en fait à la figure 5.7 relative au déclenchement actif.

À partir de t_d , le laser démarre, et le nombre de photons commence à croître alors que l'inversion de population continue à augmenter tant que le nombre de photons reste inférieur à la valeur $\mathcal{N}_{\infty}$ (Équation (B.11)). Si la saturation de l'absorbant, caractérisée par

$$\mathcal{N}'_{\text{sat}} = \frac{\Gamma_1'}{2\kappa} \quad (5.91)$$

commence à se manifester suffisamment tôt (il en est ainsi lorsque $\mathcal{N}'_{\text{sat}} < \mathcal{N}_{\infty}$), alors comme le montre l'équation (5.88) la croissance du nombre de photons est *autoaccélérée* puisque les pertes dues à l'absorbant saturable tendent vers 0 lorsque $\mathcal{N}$ croît. Tout se passe comme si le seuil se mettait à diminuer depuis la valeur ΔN_{seuil} en tendant vers ΔN_{∞} . La situation est analogue au cas du déclenchement actif où l'inversion de population lors du déclenchement est très supérieur au seuil ΔN_{∞} . On peut poursuivre une analyse similaire à celle du paragraphe (5.3.4).

En conclusion, le phénomène de déclenchement passif par absorbant saturable, qui est d'un très grand intérêt pratique, est un exemple de la richesse des solutions possibles pour des systèmes non-linéaires pourtant très simples.

5.4 Lasers à modes synchronisés

5.4.1 Impulsions brèves : au-delà des lasers monomodes

Les raisonnements précédents s'appuient sur une description monomode des lasers. Lorsqu'on cherche à obtenir les impulsions les plus brèves possibles, on se heurte alors au fait que l'équation d'évolution du champ laser (par exemple l'équation (T1) de la table

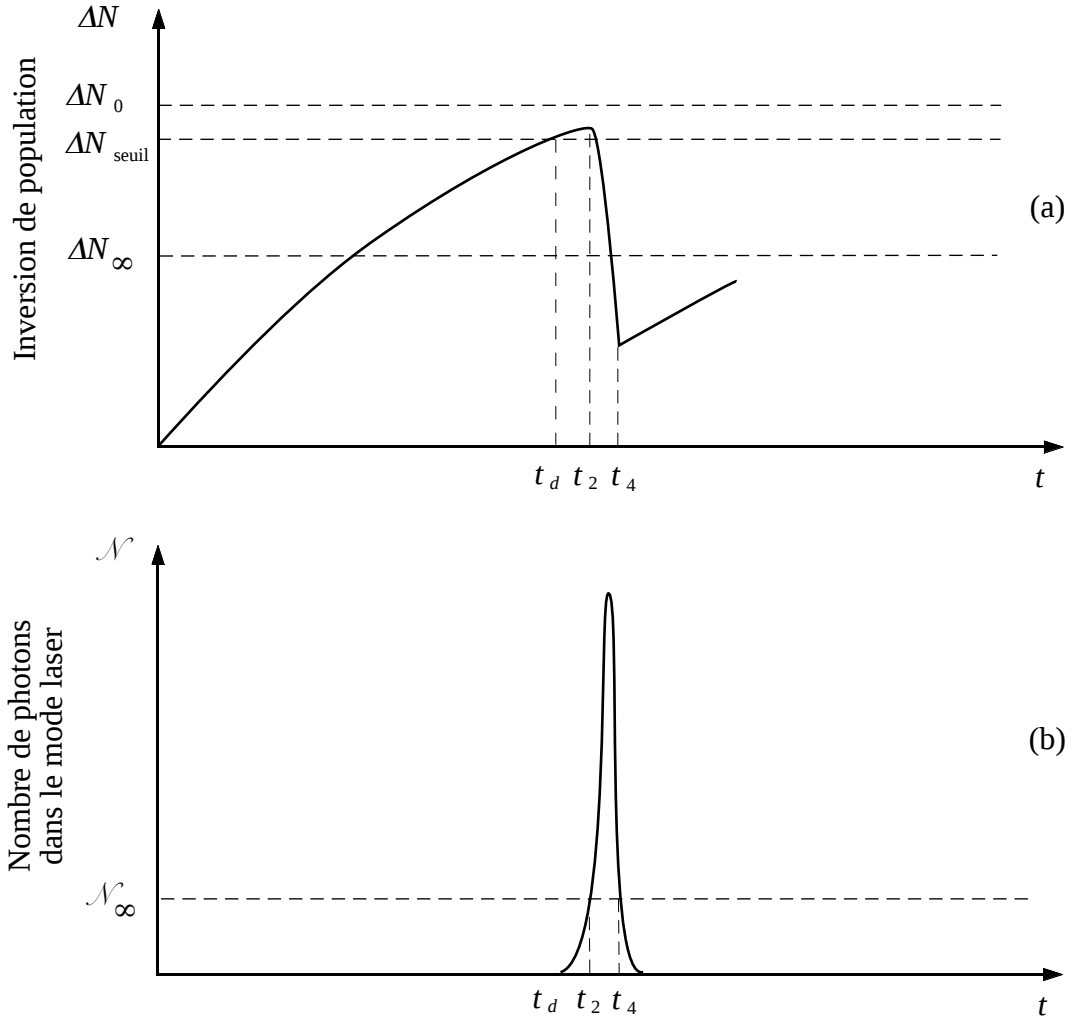


FIG. 5.9: *Laser déclenché par absorbant saturable. Le démarrage du laser est retardé jusqu'au moment où l'inversion de population franchit le seuil ΔN_{seuil} qui est élevé à cause de l'absorbant. Lorsque le nombre de photons $\mathcal{N}$ augmente, l'absorbant devient transparent, et tout se passe comme si le seuil était abaissé vers ΔN_∞ : la croissance de $\mathcal{N}$ est auto-accélérée.*

A.1) comporte un terme de relaxation dont la constante de temps, γ_{cav}^{-1} , constitue une limite naturelle à la vitesse de variation de l'intensité du mode. On a ainsi trouvé (§5.3.4, équation (5.82)), que la durée des impulsions brèves produites par un laser déclenché sont de quelques γ_{cav}^{-1} . On peut bien sûr diminuer cette durée en raccourcissant la cavité laser et en augmentant la transmission du coupleur de sortie (équation (T3) de la table A.1) $\gamma_{\text{cav}} = \frac{c}{L_{\text{cav}}}(T + \alpha)$, mais il est difficile, pour les lasers habituels, de descendre nettement sous la nanoseconde.

Il est clair qu'une telle limitation ne s'applique pas si on considère un laser multimode.

En effet, deux modes différents ω_k et $\omega_{k'}$ peuvent donner lieu à un battement

$$|\omega_k - \omega_{k'}| = |k - k'| 2\pi \frac{c}{L_{\text{cav}}}$$

de période beaucoup plus courte que γ_{cav} si $|k - k'|$ est grand devant 1. On peut ainsi obtenir des évolutions extrêmement rapides, bien que l'évolution de l'amplitude de chaque mode puisse rester très lente, voire stationnaire.

Cette idée est mise en œuvre dans les lasers à modes synchronisés, où on parvient à synchroniser entre eux les battements entre les nombreux modes d'un laser multimode.

5.4.2 Lasers à plusieurs modes incohérents

On considère un laser continu multimode longitudinal, obtenu avec un milieu amplificateur à élargissement inhomogène (pas de saturation croisée, cf. chapitre 4).

La lumière émise comporte plusieurs composantes monochromatiques correspondant aux divers modes, et leurs *phases sont a priori incorréllées*. Le champ électrique à la sortie d'un tel laser est égal à :

$$E(t) = \sum_{k=0}^{N-1} E_0 \cos(\omega_k t + \varphi_k) = \sum_k \frac{E_0}{2} e^{-i\varphi_k} e^{-i\omega_k t} + c.c. \quad (5.92)$$

où N est le nombre de modes oscillants et les φ_k sont des variables aléatoires incorréllées. Nous avons supposé pour simplifier que tous les modes ont la même amplitude constante E_0 . La fréquence ω_k de chaque mode est de la forme

$$\omega_k = \omega_0 + k\Delta \quad (5.93)$$

où $\Delta/2\pi = c/L_{\text{cav}}$ (intervalle entre modes) et ω_0 est la fréquence du mode $k = 0$.

L'intensité lumineuse, moyennée sur un temps long devant la période optique, mais court devant $1/N\Delta$ (ce qui est en pratique le signal auquel on peut avoir accès avec les photodétecteurs les plus rapides dont le temps de réponse est de l'ordre de 10 ps) est égale à :

$$I(t) = \frac{N E_0^2}{2} + E_0^2 \sum_k \sum_{j>k} \cos[(\omega_j - \omega_k)t + \varphi_j - \varphi_k] \quad (5.94)$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons éliminé les termes oscillant à $\omega_j + \omega_k$, dont la période ($\sim 10^{-15}$ s) est courte devant l'intervalle de moyennage (10^{-12} s).

Le terme 5.4.3 fait apparaître une *intensité moyenne*

$$\bar{I} = \frac{N E_0^2}{2} \quad (5.95)$$

et de *fluctuation* dont l'écart type $\Delta I = \left[\overline{(I(t) - \bar{I})^2} \right]^{1/2}$, pour des variables aléatoires incorréllées φ_k , est calculable à partir de (5.4.3) et est égale, dans la limite $N \gg 1$, à

$$\Delta I = \bar{I} \quad (5.96)$$

La variation de l'intensité d'un laser multimode, en fonction du temps, présente donc des fluctuations importantes de l'ordre de $\bar{I}$ comme le schématise la figure 5.10

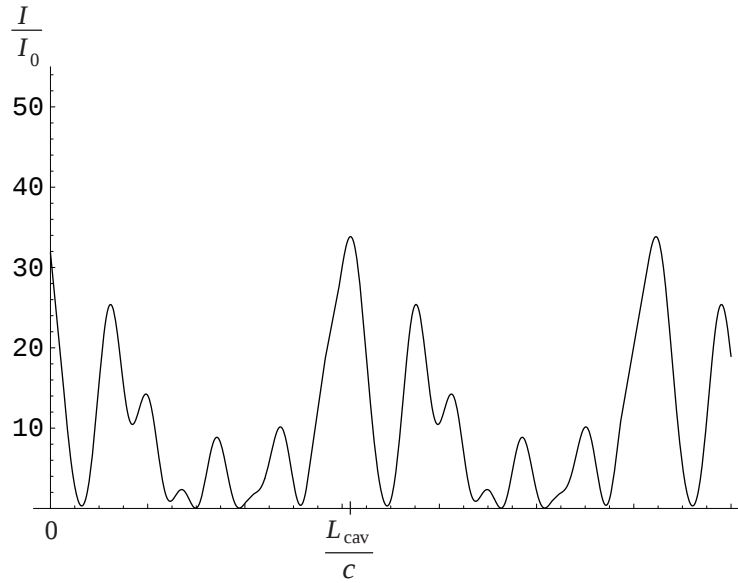


FIG. 5.10: **Intensité d'un laser multimode en fonction du temps.** On en a sommé les champs de 10 modes de même intensité (I_0) et équidistants. Leurs phases sont des variables aléatoires non corrélées. L'intensité fluctue beaucoup. La valeur moyenne vaut $10 I_0$.

Comme prévu, l'échelle de temps de ces fluctuations est inférieure à l'inverse Δ^{-1} de la fréquence de battement entre deux modes adjacents.

5.4.3 Laser à modes synchronisés

Supposons maintenant qu'on a réussi à synchroniser les divers modes, c'est-à-dire que les phases φ_k (équation (5.92)) ne sont plus des variables aléatoires non-corrélées. Pour simplifier, nous prenons toutes les phases égales

$$\varphi_j = \varphi_k = \varphi = 0 \quad (5.97)$$

L'intensité lumineuse vaut alors

$$\begin{aligned} I(t) &= \overline{[E(t)]^2} = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} E_0 e^{-i(\omega_0 + k\Delta)t} \right|^2 \\ &= \frac{E_0^2}{2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ik\Delta t} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.98)$$

La somme se fait sans difficulté (série géométrique), et on obtient

$$I(t) = \frac{E_0^2}{2} \left| \frac{\sin(N\Delta\frac{t}{2})}{\sin(\Delta\frac{t}{2})} \right|^2 \quad (5.99)$$

La figure 5.11 montre l'allure de $I(t)$. Le laser émet des **impulsions lumineuses** dont la période de répétition T est :

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Delta} = \frac{L_{\text{cav}}}{c} \quad (5.100)$$

c'est-à-dire le temps de rebouclage (ou d'aller-retour) dans la cavité. Ceci signifie qu'il n'y a qu'une *seule impulsion* circulant dans la cavité (cas d'une cavité en anneau). Par ailleurs, l'intensité de chaque impulsion est égale à

$$\Rightarrow I_{\text{max}} = \frac{N^2 E_0^2}{2} \quad (5.101)$$

ou encore en utilisant (5.95)

$$\Rightarrow I_{\text{max}} = N\bar{I} \quad (5.102)$$

La largeur temporelle de chaque impulsion est

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{2\pi}{N\Delta} = \frac{T}{N} = \frac{1}{N} \frac{L_{\text{cav}}}{c} \quad (5.103)$$

Les impulsions sont d'autant plus *intenses* et *plus courtes* que le nombre de modes oscillant N est *élevé*, mais nous constatons que l'énergie moyenne par impulsion, qui est proportionnelle au produit $I_{\text{max}} \Delta T$, est indépendante de N .

En résumé, la puissance moyenne $N\bar{I}$ sortant du laser est distribuée dans des impulsions brèves, émise à la cadence $\frac{c}{L_{\text{cav}}}$, chaque impulsion ayant l'énergie

$$U_{\text{impulsion}} = \bar{I} \frac{L_{\text{cav}}}{c} \quad (5.104)$$

Mais lorsqu'on augmente le nombre N de modes (à intensité moyenne et à cadence de répétitions données), on constate que chaque impulsion est de plus en plus brève, et son maximum est de plus en plus intense.

La course aux impulsions brèves requiert des largeurs de bande d'amplification

$$[\Delta\omega]_{\text{ampli}} = N \frac{c}{L_{\text{cav}}} \quad (5.105)$$

les plus élevées possibles, puisque, en vertu de (5.103), on a la relation de Fourier

$$[\Delta\omega]_{\text{ampli}} \times [\Delta T]_{\text{impulsion}} = 1 \quad (5.106)$$

Avec cette méthode, on peut obtenir à partir d'un laser à argon ionisé commercial des impulsions de durée 80 ps, répétées toutes les 12 ns (cf. le tableau du § C.1 du chapitre 3) ; avec un laser à colorant ou un laser à saphir dopé au titane, des impulsions plus courtes que 100 fs sont aisément obtenues. Ce sont ces impulsions qui, amplifiées et encore affinées, permettent d'obtenir des impulsions de quelques femtosecondes.

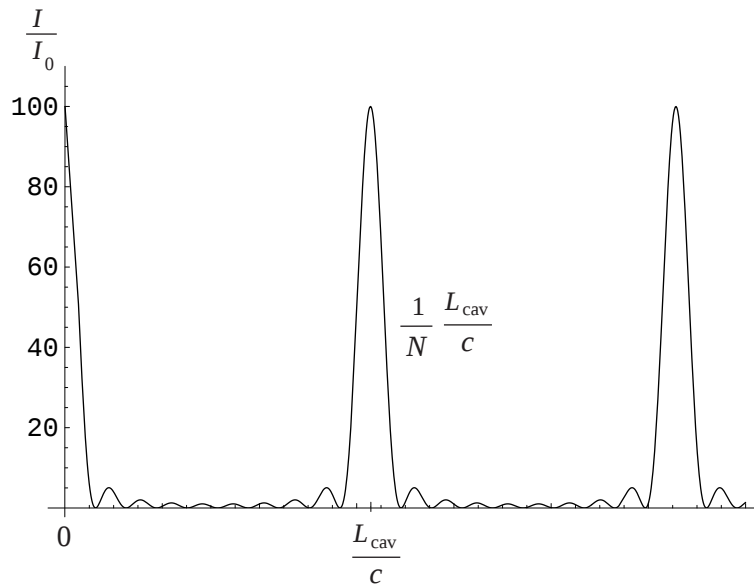


FIG. 5.11: **Intensité d'un laser à modes synchronisés en fonction du temps.** La courbe ci-dessus représente l'intensité résultant de l'addition cohérente des champs de 10 modes lasers de même amplitude et équidistants (séparation entre modes $\Delta = 2\pi c/L_{\text{cav}}$). Noter que l'échelle verticale est 2 fois plus grande que dans la figure 5.10. L'intensité moyenne vaut $10 I_0$.

5.4.4 Synchronisation des modes : verrouillage de phase

À priori, les divers modes émis par un laser de profil de gain inhomogène, sont incohérents. Diverses méthodes, actives ou passives, permettent de synchroniser les modes entre eux, ou encore de *les verrouiller en phase*.

On peut par exemple *moduler les pertes*⁷ de la cavité à la fréquence Δ . Considérons, en effet, un mode particulier de fréquence ω_k dont l'amplitude E est modulée à la fréquence

⁷Pour cela on utilise, par exemple, un modulateur électrooptique ou acousto-optique.

Δ :

$$E = E_0[1 + m \cos(\Delta t)]$$

Le champ électrique correspondant s'écrit :

$$E(t) = E_0[1 + m \cos(\Delta t)] \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

soit encore en transformant cette expression pour faire apparaître les fréquences $(\omega_k + \Delta)$ et $(\omega_k - \Delta)$ des deux modes voisins du mode ω_k :

$$E(t) = E_0 \left[\cos(\omega_k t + \varphi_k) + \frac{m}{2} \cos((\omega_k + \Delta)t + \varphi_k) + \frac{m}{2} \cos((\omega_k - \Delta)t + \varphi_k) \right] \quad (5.107)$$

La modulation du mode k crée des composantes aux fréquences de modes $k - 1$ et $k + 1$. Si certaines conditions sont réunies, ces composantes, qui sont en phase avec le mode k , vont *verrouiller la phase* des modes $k - 1$ et $k + 1$ sur celle du mode k . Le processus s'étend de proche en proche à tous les modes, qui sont ainsi synchronisés.

Une analyse *temporelle* peut être substituée à cette analyse spectrale. Considérons une impulsion circulant dans le laser : le gain pour cette impulsion sera maximum si elle passe dans le modulateur au moment où celui-ci a le minimum de pertes. Cette situation favorable sera obtenue si la période de modulation est exactement égale à la période de rebouclage de l'impulsion dans la cavité donnée par la condition (5.100).

Remarque

Le rôle du modulateur n'est pas totalement identique selon que l'amplificateur présente un élargissement homogène ou inhomogène (voir §3.C.1). Dans le cas d'un élargissement inhomogène, les divers modes oscillent naturellement et le seul but du modulateur est de coupler leurs phases. Dans le cas d'un élargissement homogène, le modulateur provoque, en outre, l'apparition de modes qui, en son absence, n'oscilleraient pas spontanément.

Dans la période récente, on a vu apparaître des méthodes passives permettant d'obtenir la synchronisation des modes, sans avoir recours à des systèmes électroniques dont la fréquence doit être exactement ajustée sur le temps de rebouclage L_{cav}/c , susceptible de fluctuer. Ainsi, on peut placer dans la cavité un milieu absorbant saturable (cf. §5.3.5). Celui-ci se comporte alors comme un obturateur qui s'ouvre au moment précis où l'impulsion intense circulant dans la cavité (cf. l'analyse temporelle ci-dessus) se présente sur lui. On notera que le processus permettant ainsi le verrouillage des modes (« mode locking ») est un processus non-linéaire. Il existe plusieurs autres méthodes, basées sur des comportements non-linéaires établissant un lien entre les pertes dans la cavité et l'intensité laser, et conduisant à l'émission périodique d'impulsions très brèves, de durée inférieure à la picoseconde.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que le démarrage et plus généralement la dynamique des lasers, présente une grande variété de comportements, contrôlés par un petit nombre

de paramètres, essentiellement les temps de réponse des atomes et des modes de la cavité laser (et éventuellement d'éléments non-linéaires insérés dans la cavité). La hiérarchie de ces temps de réponse détermine le scénario observé.

Il est remarquable qu'une telle richesse soit obtenue avec deux équations différentielles couplées extrêmement simples. La raison en est bien sûr l'existence de termes non-linéaires.

Si on considère des milieux laser où la polarisation atomique ne peut pas être éliminée adiabatiquement (§ 5.1.2), on a un jeu de 3 équations couplées donnant lieu à des comportements encore beaucoup plus extraordinaires. Ces systèmes sont en fait de remarquables modèles d'études des évolutions chaotiques, et il s'agit d'une branche très active de la physique des lasers, où les interactions entre expérimentateurs et théoriciens, physiciens et mathématiciens, sont très fécondes.

Mais l'importance des notions vues dans ce chapitre peut aussi se mesurer à l'aune des applications des lasers en impulsions brèves. Celles-ci vont de l'étude des phénomènes ultra-brefs en physique, chimie, biologie, aux télécommunications optiques à très haut débit. Tiré par ces applications, le domaine des impulsions brèves et énergétiques est un grand demandeur de développements technologiques souvent extrêmement subtils, et il continuera sans aucun doute à apporter des connaissances nouvelles sur des états mal connus de la matière (plasmas), susceptibles de déboucher sur des applications de portée énorme (fusion thermonucléaire contrôlée). Quant aux lasers à mode verrouillés en phase, ils ont connu récemment (2001) des développements spectaculaires qui pourraient conduire bientôt à des horloges d'une exactitude meilleure que les meilleures horloges actuelles (de l'ordre de 10^{-14}) par plusieurs ordres de grandeur⁸.

⁸Voir par exemple le site <http://www.mpg.de/~haensch/chain/chain/html>.

Chapitre 6

Description statistique de la lumière émise par un laser. Largeur de raie, cohérence temporelle

6.1 Importance d'une description statistique de la lumière

Au chapitre 4, nous avons vu que l'amplitude du champ d'un mode laser est de la forme

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{A}e^{-i\omega t} = Ae^{i\phi}e^{-i\omega t} \quad (6.1)$$

A étant un nombre parfaitement déterminé (Équation (4.4.54)), de même que ω (Équation (4.4.19)). En ce qui concerne la phase ϕ , la discussion du paragraphe 4.3.2 nous a amenés à la considérer comme une variable aléatoire équipartie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, puisque rien dans le problème ne donne une valeur particulière à cette phase. Néanmoins, la discussion du paragraphe 4.3.2 sous-entend implicitement que pour un laser donné, qui est un échantillon particulier extrait d'un ensemble statistique, ϕ possède une valeur bien déterminée, de sorte que le champ de ce laser particulier est décrit par (6.1) où la variable ϕ a pris une valeur précise.

Dans un laser réel, une telle conception est irréaliste, car il existe de nombreuses causes de fluctuations incontrôlées. Ainsi, le taux de pompage peut fluctuer, entraînant des fluctuations de l'amplitude A . Il en est de même de la longueur de la cavité, ce qui provoque des fluctuations de la fréquence ω . Les mouvements d'ensemble de la cavité provoquent pour leur part des fluctuations de la phase ϕ . Vu les ordres de grandeur en jeu, il est hors de question de négliger ces phénomènes : un déplacement de la cavité d'une longueur d'onde provoque une fluctuation de phase de 2π ; une variation de longueur de cavité d'une longueur d'onde provoque un changement de fréquence de plusieurs dizaines de mégahertz.

Même si on pouvait rendre complètement négligeables ces fluctuations techniques, il resterait dans un laser un processus aléatoire inévitable, c'est l'émission spontanée de photons dans le mode laser, à partir du niveau supérieur du milieu amplificateur. Comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, ceci entraîne des fluctuations aléatoires de l'amplitude A et de la phase ϕ du champ dans le mode.

Une description réaliste du champ laser est donc nécessairement de nature statistique. En fait, il en est de même pour n'importe quelle lumière, qu'elle soit émise par un laser ou par une source classique. L'optique statistique est donc un outil essentiel, pour donner une description correcte de la lumière, considérée comme un champ électromagnétique classique. Un grand nombre de propriétés de la lumière souvent admises sans justification – ou par habitude – reposent en fait sur la nature aléatoire du champ.

Ainsi, c'est ce caractère aléatoire qui amène à introduire, dans les cours d'optique, des notions subtiles comme la cohérence, ou à énoncer des propriétés qui sont loin d'aller de soi : la possibilité de décomposer une lumière polychromatique en composantes incohérentes (pourquoi pas cohérentes?), ou la lumière naturelle en composantes de polarisation orthogonales incohérentes ... Toutes ces notions délicates ne peuvent véritablement se comprendre que dans le cadre d'une description statistique de la lumière.

Mais la portée des notions que nous allons introduire dans ce chapitre va au-delà de l'optique statistique. Il existe peu de domaines où on ne soit pas amené à rencontrer les phénomènes de bruit, de mouvement Brownien. Le formalisme introduit ici se généralise sans difficulté aux autres domaines de la physique, et il est d'une très grande utilité, aussi bien pour l'ingénieur que pour le théoricien. Certains concepts et résultats qui seront vus dans ce chapitre (théorème de Wiener-Khintchine, équation de Langevin, relation fluctuations-dissipation...) s'utilisent dans toute la physique.

Enfin, on ne saurait sous-estimer l'importance d'une bonne maîtrise des concepts statistiques classiques (qui sont ceux utilisés dans ce chapitre), pour mieux comprendre les concepts statistiques quantiques, et en particulier ceux qui sont à l'œuvre en optique quantique.

6.2 Rappels sur les processus aléatoires

6.2.1 Définitions

Un processus aléatoire $x(t)$ peut être défini comme un ensemble statistique de fonctions, dont chaque réalisation est associée à un tirage de variables aléatoires. Pour illustrer cette notion, nous considérons le processus aléatoire $V(t)$ qui représente la vitesse (plus exactement sa composante suivant un axe) d'une grosse particule Brownienne, immergée dans un fluide visqueux, qui subit des chocs incessants : sa vitesse présente donc de brusques variations, qui l'écartent de la valeur nulle vers laquelle elle relaxe. On peut

l'écrire

$$V(t) = \sum_{\ell} V_{\ell} H(t - t_{\ell}) e^{-\alpha(t-t_{\ell})} \quad (6.2)$$

où $H(u)$ est la fonction « marche » de Heaviside ($H(u) = 0$ pour $u \leq 0$; $H(u) = 1$ pour $u > 0$). Les instants aléatoires t_{ℓ} sont répartis uniformément sur l'axe des temps (densité μ). Les amplitudes V_{ℓ} des changements de vitesse sont des variables aléatoires de valeur moyenne nulle, indépendantes, et de même variance :

$$\langle V_{\ell} \rangle = 0 \quad (6.3a)$$

$$\langle V_{\ell} V_{\ell'} \rangle = \sigma_V^2 \delta_{\ell\ell'} \quad (6.3b)$$

Les crochets $\langle \rangle$ désignent une moyenne statistique (moyenne d'ensemble).

Si on considère un tirage particulier de l'ensemble des temps t_{ℓ} et des amplitudes V_{ℓ} , on obtient une réalisation particulière du processus (voir la figure 6.1). C'est l'ensemble de ces réalisations qui constitue le processus.

En fait, on peut également considérer le processus $x(t)$ comme un ensemble infini de variables aléatoires, paramétrées par le temps. Ceci nous permet de définir des propriétés statistiques à un temps, comme la valeur moyenne à un instant donné

$$\langle x(t) \rangle = \langle x \rangle(t) \quad (6.4)$$

et la variance (dont la racine carrée est l'écart quadratique moyen σ_x) :

$$\sigma_x^2(t) = \langle [x(t) - \langle x \rangle(t)]^2 \rangle = \langle x^2(t) \rangle - \left(\langle x \rangle(t) \right)^2 \quad (6.5)$$

La connaissance de $\langle x \rangle(t)$ et $\sigma_x(t)$ ne donne aucune information sur la façon dont le processus fluctue au cours du temps. Il semble clair que si on considère deux instants t_1 et t_2 extrêmement voisins, $x(t_1)$ et $x(t_2)$ seront corrélés, tandis que si l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ est très grand, $x(t_1)$ et $x(t_2)$ seront indépendants. Pour caractériser de façon quantitative cette propriété, on introduit la fonction d'autocorrélation

$$\Gamma_x(t_1; t_2) = \langle x(t_1) x(t_2) \rangle. \quad (6.6)$$

Cette propriété joue un rôle essentiel, comme nous allons le voir maintenant.

6.2.2 Processus aléatoire stationnaire et ergodique

On rencontre souvent des *processus stationnaires*, dont les propriétés sont invariantes par translation dans le temps. La moyenne est alors indépendante du temps

$$\langle x(t) \rangle = \langle x \rangle \quad (6.7)$$

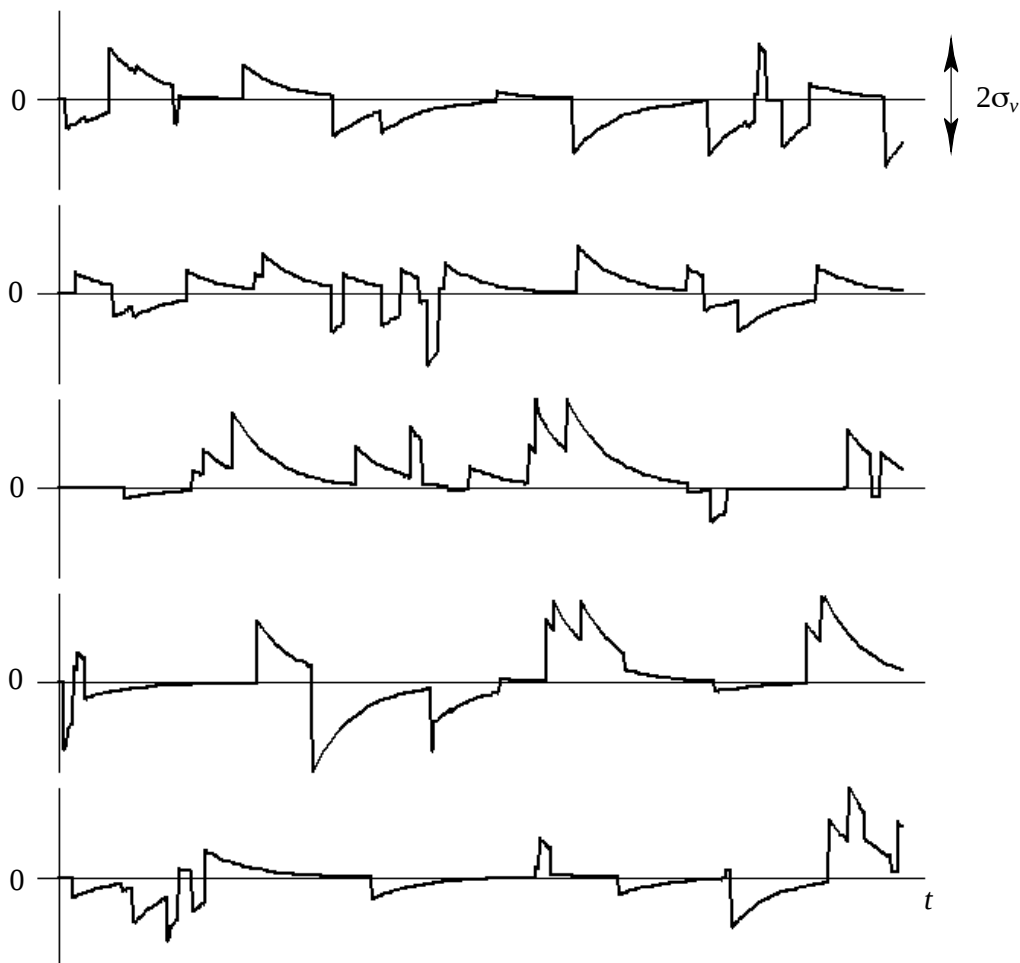


FIG. 6.1: Plusieurs réalisations du processus aléatoire représentant l'évolution au cours du temps d'une composante de vitesse d'une particule Brownienne. Ce processus a une valeur moyenne nulle, et un écart quadratique moyen σ_v .

tandis que la fonction d'autocorrélation ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_2 - t_1) = \Gamma_x(\tau) \quad (6.8)$$

Nous nous limiterons à ce type de processus.

Nous admettrons de plus que tous les processus stationnaires que nous rencontrons sont *ergodiques* : les moyennes temporelles effectuées sur une réalisation particulière pendant un temps « suffisamment long » coïncident avec les moyennes d'ensemble correspondantes. Ainsi

$$\frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \langle x \rangle \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau) dt = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \Gamma_x(\tau) \quad (6.10)$$

6.2.3 Propriétés de la fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation $\Gamma_x(\tau)$ possède un certain nombre de propriétés générales

$$(i) \quad \Gamma_x(-\tau) = \Gamma_x(\tau) \quad (6.11)$$

(Il suffit d'utiliser la stationnarité pour le démontrer)

$$(ii) \quad \Gamma_x(0) > 0 \quad (6.12)$$

$$(iii) \quad |\Gamma_x(\tau)| \leq \Gamma_x(0) \quad (6.13)$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$(iv) \quad \Gamma_x(\infty) = \langle x \rangle^2 \quad (6.14)$$

En effet, si τ devient très grand, les variables aléatoires $x(t)$ et $x(t + \tau)$ sont décorréliées. Ceci permet d'introduire un temps de corrélation τ_c , qui caractérise la largeur de la fonction d'autocorrélation, et qui est tel que

$$(iv \text{ bis}) \quad \Gamma_x(\tau \gg \tau_c) \simeq \langle x \rangle^2 \quad (6.15)$$

On peut illustrer ces propriétés en calculant la fonction d'autocorrélation du processus (6.2) (vitesse d'une particule Brownienne)

$$\Gamma_V(\tau) = \left\langle \sum_{\ell} \sum_{\ell'} V_{\ell} V_{\ell'} H(t - t_{\ell}) e^{-\alpha(t - t_{\ell})} H(t - t_{\ell'} + \tau) e^{-\alpha(t - t_{\ell'} + \tau)} \right\rangle \quad (6.16)$$

Les variables aléatoires V_{ℓ} et t_{ℓ} ne sont pas corrélées, et on peut factoriser les moyennes d'ensembles. En utilisant (6.3b), on obtient

$$\Gamma_V(\tau) = \sigma_V^2 \sum_{\ell} \left\langle H(t - t_{\ell}) H(t - t_{\ell} + \tau) e^{-2\alpha(t - t_{\ell})} \right\rangle e^{-\alpha\tau} \quad (6.17)$$

En utilisant l'ergodisme, et le fait qu'il y a μ points t_{ℓ} par unité de temps en moyenne, on transforme (6.17) en

$$\Gamma_V(\tau) = \sigma_V^2 e^{-\alpha\tau} \mu \int H(t - t_{\ell}) H(t - t_{\ell} + \tau) e^{-2\alpha(t - t_{\ell})} dt \quad (6.18)$$

Si $\tau \geq 0$, l'intégrale vaut

$$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha u} du = \frac{1}{2\alpha} . \quad (6.19)$$

Si $\tau \leq 0$, l'intégrale vaut

$$\int_{-\tau}^{\infty} e^{-2\alpha u} du = \frac{e^{2\alpha\tau}}{2\alpha} . \quad (6.20)$$

Finalement, on obtient

$$\Gamma_V(\tau) = \sigma_V^2 \frac{\mu}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} . \quad (6.21)$$

La figure (6.2) montre $\Gamma_V(\tau)$, qui possède évidemment les propriétés (i) à (iv).

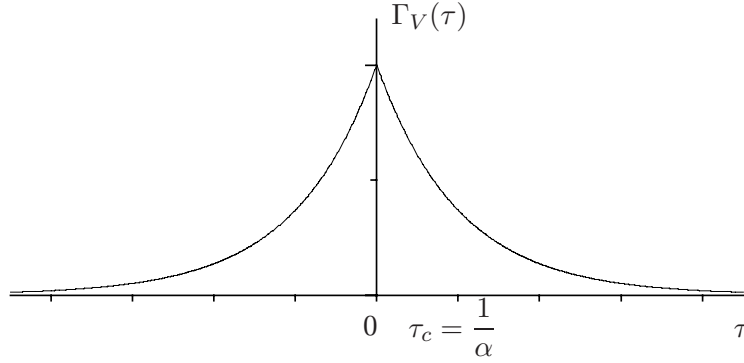


FIG. 6.2: Fonction d'autocorrélation du processus de la figure 6.1. On note qu'elle est paire, maximale à l'origine, et qu'elle tend vers 0 ($\langle V \rangle = 0$) pour $\tau \gg \tau_c$.

6.2.4 Processus aléatoire complexe, stationnaire, ergodique

Les définitions ci-dessus se généralisent sans grande difficulté à un processus aléatoire complexe $z(t)$. Il faut néanmoins prendre garde qu'à chaque instant z est en fait un ensemble de deux variables aléatoires réelles (ou une variable aléatoire à deux dimensions)

$$z = x + iy = \rho e^{i\varphi}. \quad (6.22)$$

Un processus aléatoire stationnaire complexe est d'abord caractérisé par ses propriétés à un temps. La valeur moyenne est évidemment

$$\langle z(t) \rangle = \langle z \rangle = \langle x \rangle + i \langle y \rangle \quad (6.23)$$

En ce qui concerne les moments d'ordre deux, il en existe quatre, que l'on peut caractériser par la matrice des covariances à un temps

$$[\sigma_z^2] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (6.24a)$$

où les variances σ_x^2 et σ_y^2 sont définies par

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (6.24b)$$

$$\sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 \quad (6.24c)$$

Le terme non diagonal est symétrique

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (6.24d)$$

Il obéit à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sigma_{xy} \leq (\sigma_x \cdot \sigma_y)^{1/2} \quad (6.25)$$

Le rapport $\sigma_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)^{1/2}$ est le coefficient de corrélation entre les parties réelle et imaginaire.

Les propriétés d'ordre deux que nous venons de définir sont des *propriétés à un temps*. Pour caractériser l'*évolution temporelle* du processus (supposé stationnaire), on pourrait introduire des quantités analogues mais à *deux temps*. En pratique, pour les problèmes qui nous intéressent, nous nous contenterons de la *fonction d'autocorrélation complexe* définie par

$$\Gamma_z(\tau) = \langle z^*(t) z(t + \tau) \rangle \quad (6.26)$$

et qui vaut donc (avec des notations évidentes)

$$\Gamma_z(\tau) = \Gamma_x(\tau) + \Gamma_y(\tau) + i[\Gamma_{xy}(\tau) - \Gamma_{xy}(-\tau)] \quad (6.27)$$

Les fonctions d'autocorrélation complexes possèdent de nombreuses propriétés utiles, dont nous citons ici les plus importantes, qui généralisent celles vues au paragraphe 6.2.2 :

(i) Symétrie par rapport à l'origine

$$\Gamma_z(-\tau) = \Gamma_z^*(\tau) \quad (6.28)$$

(en vertu de (6.27) et de (6.11)).

(ii) Pour $\tau = 0$, Γ_z est donc réel, et positif

$$\Gamma_z(0) > 0 \quad (6.29)$$

(iii) Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\Gamma_z(\tau)| \leq \Gamma_z(0) \quad (6.30)$$

(iv) Si τ tend vers l'infini, les variables aléatoires $z(t)$ et $z(t + \tau)$ sont décorrélées

$$\Gamma_z(\tau \rightarrow \infty) = \langle z^*(t) \rangle \langle z(t + \tau) \rangle = |\langle z \rangle|^2 \quad (6.31)$$

Comme au paragraphe 6.2.2, on pourra donc définir un temps de corrélation τ_c , tel que

$$(\text{iv bis}) \quad \Gamma_z(\tau \gg \tau_c) \simeq |\langle z \rangle|^2 \quad (6.32)$$

6.2.5 Densité spectrale de puissance

Rappelons que si une fonction complexe $f(t)$ est de module carré sommable, on peut définir sa transformée de Fourier $\tilde{f}(\omega)$ telle que

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (6.33)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.34)$$

Considérons un processus aléatoire complexe stationnaire $z(t)$. À cause de la stationnarité, le carré du module de $z(t)$ n'est certainement pas sommable, et on ne peut donc définir de transformée de Fourier. En revanche, si on considère la fonction $z_T(t)$, égale à $z(t)$ sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, et nulle en dehors, chaque réalisation $z_T(t)$ possède une transformée de Fourier $\widetilde{z}_T(\omega)$, et il est alors possible de définir la *densité spectrale de puissance* par la relation

$$S_z(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |\widetilde{z}_T(\omega)|^2 \rangle \quad (6.35)$$

Cette limite existe dans la plupart des cas présentant un intérêt physique.

On peut facilement se convaincre que pour un signal aléatoire la phase d'une composante de Fourier n'a pas de signification particulière, et que seule le module de l'amplitude à une fréquence donnée a un intérêt physique. Le spectre de puissance a donc une signification physique profonde.

De plus, le spectre de puissance possède un certain nombre de propriétés intéressantes, qui en font un outil très utile. On a ainsi la relation

$$\Rightarrow \quad \langle |z(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\omega) d\omega \quad (6.36)$$

Pour la démontrer, il suffit d'écrire l'égalité de Parseval entre une fonction et sa transformée de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (6.37)$$

appliquée à $z_T(t)$

$$\int |z_T(t)|^2 dt = \int |\widetilde{z}_T(\omega)|^2 d\omega. \quad (6.38)$$

En prenant la moyenne statistique des deux membres, puis en passant à la limite après avoir divisé par T , on obtient (6.36).

Remarque

La forme exacte de l'équation (6.38), sans aucun facteur 2π , est liée à la définition (6.33) de la transformée de Fourier.

La relation (6.36) permet de justifier l'appellation « densité spectrale de puissance ». Si par exemple la variable complexe $z(t)$ représente le champ électrique complexe d'une onde progressive, $\langle |z(t)|^2 \rangle$ est (à un coefficient multiplicatif près) le vecteur de Poynting moyen, c'est-à-dire la puissance totale moyenne transportée par l'onde (à travers une surface donnée). Alors, $S_z(\omega)d\omega$ apparaît comme la puissance moyenne transportée dans une bande étroite $d\omega$ autour de ω , les puissances moyennes transportées dans les diverses bandes de fréquence s'ajoutant directement.

Plus généralement, on montre que si on fait passer le signal $z(t)$ à travers un filtre linéaire de gain $G(\omega)$, le signal aléatoire $z'(t)$ obtenu en sortie a pour densité spectrale de puissance

$$S_{z'}(\omega) = S_z(\omega) |G(\omega)|^2 \quad (6.39)$$

En particulier, si le filtre est un filtre passe bande centré autour de ω_0 , de largeur $\Delta\omega$, tel que

$$|G(\omega)|^2 = \text{rect} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right) \quad (6.40)$$

la puissance en sortie du filtre est

$$\langle |z'|^2 \rangle = S_z(\omega) \Delta\omega \quad (6.41)$$

En balayant la fréquence centrale du filtre, on peut ainsi déterminer la totalité du spectre de puissance $S_z(\omega)$. En électronique, on dispose effectivement d'instruments, les analyseurs de spectre, qui sont fonctionnellement équivalents à un filtre passe-bande étroit balayable et grâce auxquels on peut mesurer la densité spectrale de puissance d'un signal. En optique, les spectromètres à prisme ou à réseau réalisent également cette fonction¹.

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire est une quantité fondamentale. D'une part, elle est mesurable. D'autre part, nous allons montrer qu'elle est directement reliée à la fonction d'autocorrélation dont on a vu l'importance, et qui est souvent la quantité la plus simple à manipuler dans les modèles théoriques.

6.2.6 Théorème de Wiener-Khintchine

Ce théorème se démontre simplement en généralisant la démonstration du paragraphe 6.2.5. Il suffit de noter que

$$z_T''(t) = z_T(t + \tau) \quad (6.42a)$$

a pour transformée de Fourier

$$\widetilde{z_T''}(\omega) = \widetilde{z_T}(\omega) e^{-i\omega\tau} \quad (6.42b)$$

Alors (en négligeant les effets de bords), le théorème de Parseval permet d'écrire

$$\int [z_T(t)]^* z_T''(t) dt = \int [\widetilde{z_T}(\omega)]^* \widetilde{z_T''}(\omega) d\omega \quad (6.43)$$

En prenant la moyenne statistique, on a

$$\int_T \langle z^*(t) z(t + \tau) \rangle dt = \int \langle |z_T(\omega)|^2 \rangle e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (6.44)$$

En divisant les deux membres par T , et en passant à la limite, on obtient le théorème de Wiener-Khintchine

$$\Rightarrow \Gamma_z(\tau) = \int S_z(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (6.45)$$

La fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire est la transformée de Fourier de sa densité spectrale de puissance, à un facteur $\sqrt{2\pi}$ près.

¹On notera que ces appareils ne distinguent en général pas entre fréquences positives et négatives. Dans ce cas, il convient de multiplier par 2 les seconds membres de (6.40) et (6.41).

Remarque

On prendra garde au fait que lorsque la transformée de Fourier a été définie par les équations (6.33) et (6.34) qui comportent des facteurs $\sqrt{2\pi}$, la relation (6.45) ne comporte pas de facteur $\sqrt{2\pi}$. On en déduit la relation réciproque

$$S_z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \Gamma_z(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.46)$$

Pour illustrer le théorème de Wiener-Khintchine, calculons à titre d'exemple la densité spectrale de puissance associée au processus aléatoire de la figure 6.1, dont nous connaissons la fonction d'autocorrélation (6.21). D'après (6.46), on a

$$S_V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sigma_V^2 \frac{\mu}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{i\omega t} dt. \quad (6.47)$$

L'intégrale vaut

$$\frac{-1}{-\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

et on trouve

$$S_V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sigma_V^2 \mu \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (6.48)$$

On a une Lorentzienne, centrée à la fréquence nulle, et de demi-largeur α (figure 6.3). Les fluctuations de V s'effectuent donc à des fréquences inférieures à α .

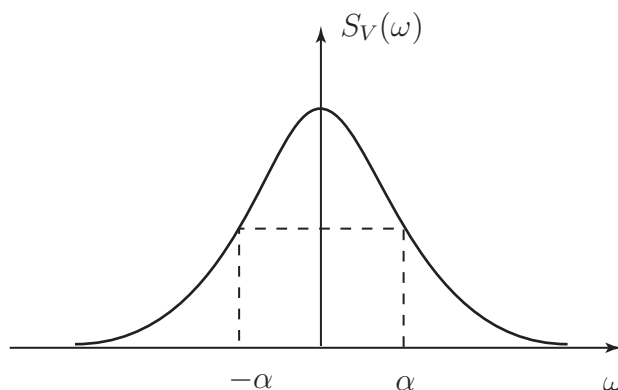


FIG. 6.3: Densité spectrale de puissance associée au processus de la figure 6.1. En vertu du théorème de Wiener-Khintchine, il s'agit de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de la figure 6.2. On obtient un profil Lorentzien, de demi-largeur à mi-hauteur α .

Le théorème de Wiener-Khintchine est fondamental dans de nombreux domaines de la physique. En optique classique, il permet de relier le spectre obtenu par exemple avec un spectrographe à prisme ou à réseau, avec la description théorique qui est nécessairement statistique. Il se généralise directement en optique quantique.

On peut, pour certains types de processus aléatoires qui se rencontrent par exemple dans la description de la lumière émise par une source traditionnelle, en donner une interprétation intéressante. De tels processus aléatoires peuvent se développer, dans l'intervalle T , sous la forme

$$z(t) = \sum_k b_k e^{-i\omega_k t} \quad (6.49)$$

avec, k étant un entier relatif

$$\omega_k = k \frac{2\pi}{T} \quad (6.50)$$

Dans le développement de Fourier (6.49), les coefficients b_k sont des *variables aléatoires complexes non-corrélées*, c'est-à-dire telles que

$$\langle b_k^* b_\ell \rangle = s_k \delta_{k\ell} \quad (6.51)$$

On en déduit alors immédiatement

$$\begin{aligned} \langle z^*(t) z(t + \tau) \rangle &= \sum_k \sum_\ell \langle b_k^* b_\ell \rangle e^{i\omega_k t} e^{-i\omega_\ell (t + \tau)} \\ &= \sum_k s_k e^{-i\omega_k \tau} \end{aligned} \quad (6.52)$$

En remplaçant, à la limite $T \rightarrow \infty$, la somme discrète $\sum_k$ par l'intégrale $(\Delta\omega)^{-1} \int d\omega$ (avec $\Delta\omega = 2\pi/T$), on retrouve le théorème de Wiener-Khintchine (6.45), en identifiant les coefficients s_k et le spectre sous la forme

$$s_k = S(\omega_k) \Delta\omega \quad (6.53)$$

Dans cet exemple, le théorème de Wiener-Khintchine est relié au fait que les composantes de fréquences différentes sont non-corrélées (incohérentes). On peut considérer qu'il s'agit d'une justification de la règle énoncée dans les cours élémentaires d'optique, suivant laquelle les phénomènes d'interférence en lumière polychromatique peuvent se calculer en ajoutant les figures d'interférences calculées séparément pour chaque composante monochromatique.

Remarques

(i) Il convient de se souvenir que le théorème de Wiener-Khintchine a une portée plus générale que le développement (6.49), car la propriété (6.51) n'est pas vraie pour tous les processus aléatoires, en particulier elle n'est pas vraie pour l'amplitude complexe d'un laser monomode très au-dessus du seuil.

(ii) On peut comprendre que $\Gamma_z(\tau)$ et la densité spectrale $S_z(\omega)$ jouent un rôle essentiel : ce sont en effet des quantités invariantes par changement d'origine des temps, ce qui respecte la propriété de stationnarité du processus. Au contraire, un échantillon donné $z(t)$, ou sa transformée de Fourier, dépendent du choix arbitraire de l'origine des temps. Ce ne sont donc pas des quantités fondamentales.

6.2.7 Processus aléatoire quasi-monochromatique

On rencontre souvent des signaux quasi-monochromatiques, dont le spectre est limité à une bande de fréquences étroite, de demi-largeur $\Delta\omega$, autour d'une fréquence centrale ω_0 . C'est par exemple le cas du champ électrique aléatoire $E(t)$ dont on a représenté le spectre sur la figure 6.4.a, et qui est associé à une raie spectrale étroite. Comme $E(t)$ est réel, son spectre est symétrique. Nous pouvons associer à tout échantillon particulier $E(t)$ son signal analytique $\mathcal{E}(t)$, obtenu en ne gardant que les fréquences positives dans la transformée de Fourier de $E(t)$. On a donc

$$E(t) = \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}^*(t) \quad (6.54)$$

En considérant l'ensemble des échantillons $E(t)$, on définit le processus aléatoire complexe $\mathcal{E}(t)$, dont la densité spectrale de puissance, représentée sur la figure 6.4.b, est une raie unique centrée en ω_0 . Il est alors naturel d'écrire

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{A}(t)e^{-i\omega_0 t} = A(t)e^{i\phi(t)}e^{-i\omega_0 t} \quad (6.55)$$

et la quantité $\mathcal{A}(t)$, que nous appellerons « amplitude complexe », a un spectre centré autour de la fréquence nulle (figure 6.4.c). Le processus aléatoire $\mathcal{A}(t)$ (et en particulier son amplitude $A(t)$ et sa phase $\phi(t)$) fluctuent donc à une échelle de temps qui ne peut être plus rapide que $\Delta\omega^{-1}$.

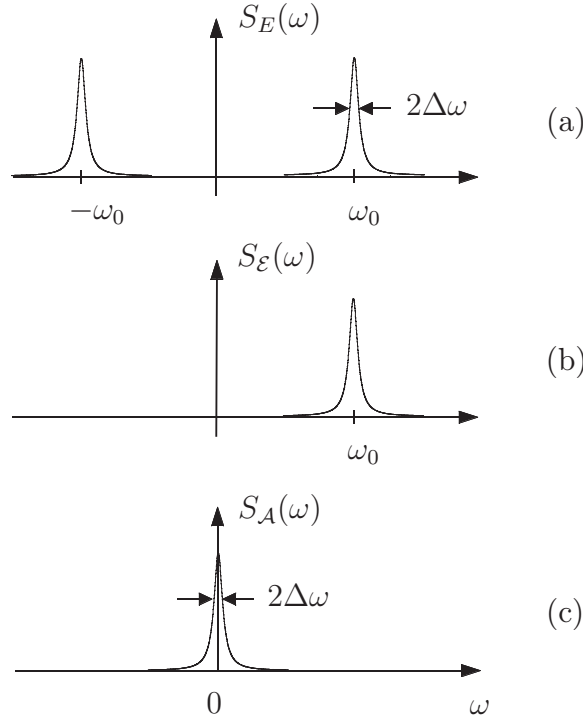


FIG. 6.4: Densité spectrale de puissance d'un champ réel aléatoire quasimonochromatique (a), de son signal analytique (b), de son enveloppe complexe $\mathcal{A}(t)$ définie par (6.55).

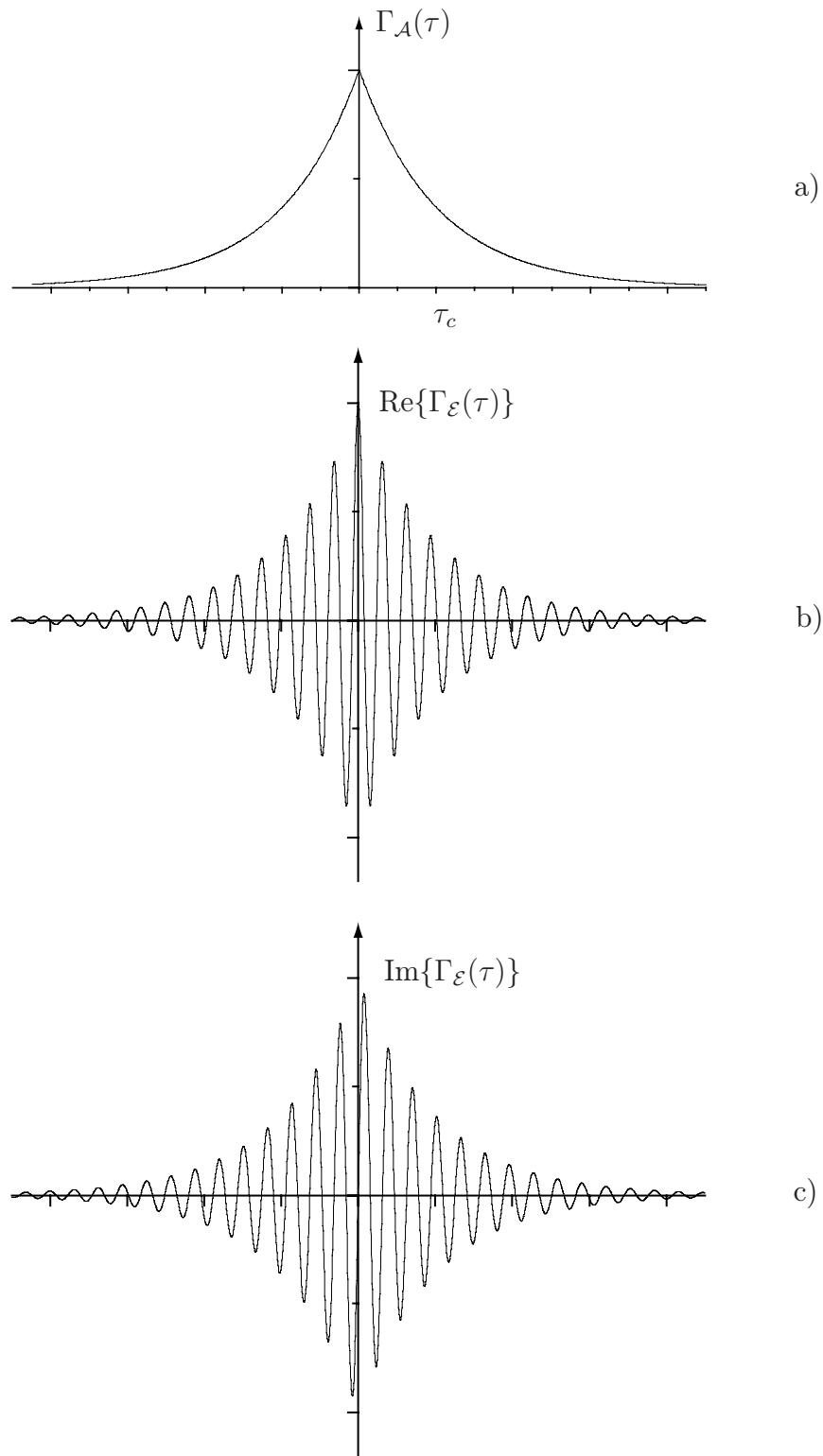


FIG. 6.5: Fonctions d'autocorrélation de l'amplitude complexe et du champ complexe, pour une raie quasi monochromatique.

Le théorème de Wiener-Khintchine nous permet de calculer la fonction d'autocorrélation de $\mathcal{A}(t)$. Si $S_{\mathcal{A}}(\omega)$ est pair, $\Gamma_{\mathcal{A}}(\tau)$ est une fonction réelle (figure 6.5.a). Sa largeur, qui permet de définir le temps de corrélation, vaut

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\omega} \quad (6.56)$$

La fonction d'autocorrélation du champ complexe s'exprime simplement en fonction de $\Gamma_{\mathcal{A}}(\tau)$. En utilisant (6.55), on a

$$\Gamma_{\mathcal{E}}(\tau) = \Gamma_{\mathcal{A}}(\tau) e^{-i\omega_0\tau} \quad (6.57)$$

Les parties réelle et imaginaire de $\Gamma_{\mathcal{E}}(\tau)$ (figures 6.5.b et 6.5.c) sont donc des fonctions oscillantes en cosinus et en sinus, dont l'enveloppe est $\Gamma_{\mathcal{A}}(\tau)$. Le temps de corrélation est donc le même pour $\mathcal{A}(t)$ et pour $\mathcal{E}(t)$. En optique, ce temps de corrélation s'appelle la *cohérence temporelle*.

6.3 Émission spontanée dans un mode laser : équation de Langevin

6.3.1 Rôle de l'émission spontanée

On sait qu'un atome porté dans un état excité est susceptible de se désexciter spontanément vers n'importe quel niveau inférieur, en émettant un photon (cf. Chapitre 2, Paragraphe 1.3). Ainsi, dans notre modèle d'atomes à deux niveaux, les atomes portés dans le niveau $|b\rangle$ peuvent passer dans le niveau $|a\rangle$ indépendamment du processus d'émission stimulée qui est lié au champ laser déjà présent. Jusqu'ici nous avons négligé ce phénomène, d'une part devant la désexcitation de $|b\rangle$ vers d'autres niveaux (taux Γ_D), et d'autre part devant les transitions stimulées responsables de l'effet laser. Cette approximation était justifiée au niveau de l'établissement des équations du laser, et en particulier du calcul du coefficient d'amplification.

Pourtant, l'émission spontanée dans le mode laser constitue un phénomène important à plusieurs égards. D'abord, comme nous l'avons déjà indiqué (chapitre 5), c'est ce phénomène qui permet au laser de démarrer lorsque le mode est initialement vide : ce n'est qu'à la suite d'une première émission spontanée, que le champ peut croître jusqu'à atteindre la valeur stationnaire calculée au chapitre 4.

De plus, et c'est cet aspect qui nous intéresse ici, le champ émis par émission spontanée est sans relation de phase particulière avec le champ laser déjà établi dans le mode, auquel il vient se rajouter. Le champ laser subit alors une modification aléatoire d'amplitude et de phase (cf. Figure 6.6).

Sous l'effet des émissions spontanées successives, le champ laser fluctue donc en amplitude et en phase. Ces fluctuations constituent des caractéristiques importantes de la lumière laser, que nous nous proposons d'étudier dans la suite de ce chapitre.

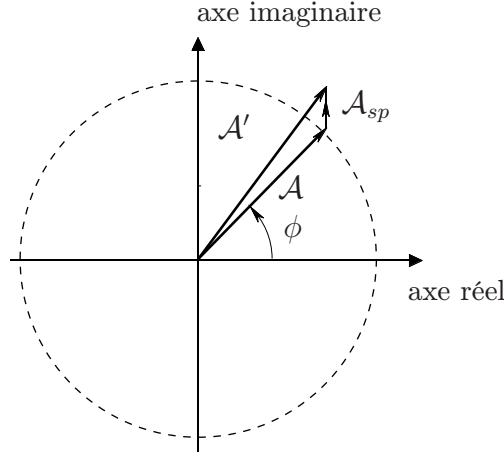


FIG. 6.6: Champ laser représenté par son amplitude $\mathcal{A}$ dans le plan complexe (vecteur de Fresnel). À la suite de l'émission spontanée d'amplitude complexe $\mathcal{A}_{sp}$ dans le mode laser (la phase de $\mathcal{A}_{sp}$ est quelconque) le champ laser devient $\mathcal{A}'$: l'amplitude et la phase ont varié.

6.3.2 Évolution entre deux émissions spontanées

Dans ce chapitre, nous nous restreignons au cas d'un laser monomode de type A, où le temps de relaxation des atomes $(\Gamma_1)^{-1}$ est plus court que le temps d'évolution du mode $(\gamma_{cav})^{-1}$. Nous avons vu que l'amplitude complexe du champ du mode laser obéit alors à l'équation

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\gamma_{cav}}{2} \left(-1 + \frac{r}{1 + \frac{2\mathcal{A}^2}{I_{sat}}} \right) \mathcal{A} \quad (6.58)$$

Comme nous nous intéressons aux petites fluctuations, nous écrivons l'amplitude $\mathcal{A}$ sous la forme

$$\mathcal{A} = [A_0 + a(t)]e^{i\phi} \quad (6.59)$$

où A_0 est solution stationnaire de (6.58)

$$A_0 = \sqrt{r-1} \sqrt{\frac{I_{sat}}{2}} \quad (6.60)$$

Rappelons que l'équation stationnaire $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0$ ne contraint pas ϕ , qui peut prendre n'importe quelle valeur.

Sous l'effet de l'émission spontanée (et éventuellement de perturbations comme les vibrations des miroirs, ou les fluctuations du gain), l'amplitude $\mathcal{A}(t)$ va présenter des fluctuations, et nous la décrirons donc comme un processus aléatoire complexe.

La décomposition (6.59) permet de faire apparaître deux processus aléatoires réels, $a(t)$ et $\phi(t)$. Nous remplaçons $\mathcal{A}(t)$ par son expression (6.59) dans l'équation d'évolution

(6.60), et nous ne gardons que les termes d'ordre 1 en $a(t)$ (les termes d'ordre 0 s'éliminent en vertu de (6.60)). On obtient

$$\frac{da}{dt} + i(A_0 + a)\frac{d\phi}{dt} = -\gamma_{\text{cav}}\frac{r-1}{r}a \quad (6.61)$$

La partie imaginaire donne l'évolution de la phase

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad (6.62)$$

Entre deux émissions spontanées, la phase n'évolue pas.

La partie réelle de (6.61) donne l'évolution de l'amplitude

$$\Rightarrow \frac{da}{dt} = -\gamma_{\text{cav}}\frac{r-1}{r}a \quad (6.63)$$

Après une émission spontanée à l'instant t_i , l'amplitude relaxe vers sa valeur stationnaire

$$a(t) = a(t_i)H(t - t_i) \exp \left[-\gamma_{\text{cav}}\frac{r-1}{r}(t - t_i) \right] \quad (6.64)$$

La figure (6.7) donne un exemple d'évolution possible du module $A_0 + a(t)$ de l'amplitude du mode.

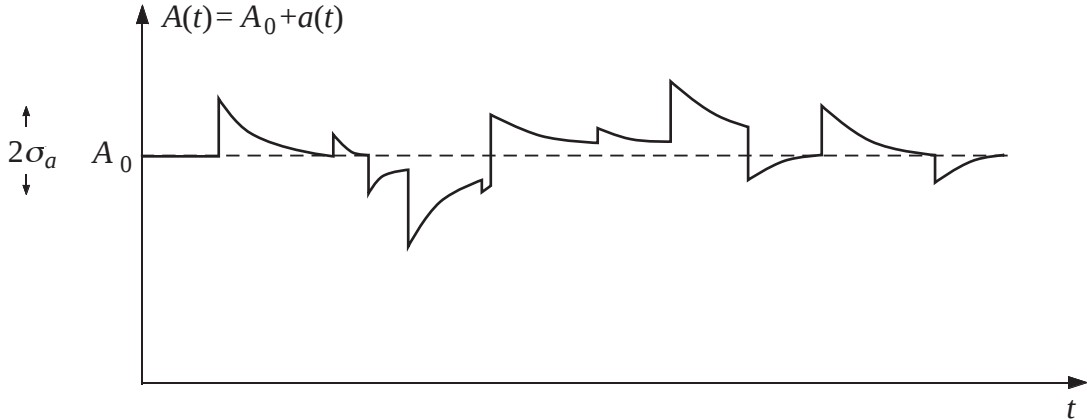


FIG. 6.7: Évolution aléatoire du module de l'amplitude $A(t)$ du champ laser. À chaque émission spontanée (de phase aléatoire) $A(t)$ est écarté aléatoirement de sa valeur d'équilibre A_0 , vers laquelle il relaxe sous l'effet du terme de saturation du gain. Pour un laser très au-dessus du seuil, la fluctuation relative σ_a/A_0 est de l'ordre de $\mathcal{N}^{-1/2}$, $\mathcal{N}$ étant le nombre de photons dans le mode laser : noter que la valeur de σ_a est très exagérée sur la figure.

6.3.3 Terme d'évolution dû à l'émission spontanée

On sait que l'émission spontanée est un phénomène qui relève fondamentalement de la théorie complètement quantique de l'interaction atome-rayonnement. Dans le contexte

de la théorie semi-classique que nous utilisons, où nous ne considérons que des champs classiques, nous admettrons que l'on peut rendre compte de façon heuristique de l'émission spontanée de la façon suivante.

Lorsqu'une émission spontanée a lieu dans le mode laser, l'amplitude complexe $\mathcal{A}(t)$ change brutalement. On peut traduire cette variation par un terme supplémentaire dans l'équation d'évolution (6.58) du mode p que nous écrirons (en écrivant explicitement l'indice p , pour rappeler qu'il s'agit de l'émission spontanée dans ce mode particulier)

$$\left[\frac{d\mathcal{A}_p}{dt} \right]_{\text{sp}} = \zeta(t) \quad (6.65)$$

où $\zeta(t)$ est un processus aléatoire stationnaire, de valeur moyenne nulle

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad (6.66)$$

Sa fonction d'autocorrélation est très courte, et nous la représentons par une « fonction de Dirac » sous la forme

$$\Gamma_\zeta(\tau) = N_b \Gamma_p^{\text{sp}} (A_p^{\text{1phot}})^2 \delta(\tau) \quad (6.67)$$

Dans cette expression, A_p^{1phot} est l'amplitude du champ associé à 1 photon dans le mode p . En écrivant que l'énergie correspondante vaut $\hbar\omega_p$, on a donc

$$A_p^{\text{1phot}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_p}{2\varepsilon_0 V_{\text{cav}}}} \quad (6.68)$$

Par ailleurs, N_b est le nombre d'atomes (interagissant avec le mode laser) dans le niveau supérieur de la transition laser, et Γ_p^{sp} est le *taux d'émission spontanée dans le mode laser* pour un atome dans le niveau b , de sorte que $N_b \Gamma_p^{\text{sp}}$ est le nombre d'émissions spontanées par seconde dans le mode p .

Nous ne chercherons pas à démontrer la formule (6.67) de façon rigoureuse, mais nous pouvons la justifier. Si nous admettons qu'à chaque émission spontanée dans la cavité vide et supposée parfaite le champ augmente brutalement, on peut écrire l'amplitude supplémentaire due à l'émission spontanée

$$[\mathcal{A}_p(t)]_{\text{sp}} = \sum_j A_p^{\text{1phot}} H(t - t_j) e^{i\varphi_j} \quad (6.69)$$

Les instants t_j d'émission spontanée sont aléatoires, et il y en a en moyenne $N_b \Gamma_p^{\text{sp}}$ par unité de temps. Les phases φ_j sont des variables aléatoires indépendantes, équiparties sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. La fonction $H(u)$ (fonction de Heaviside) est la « fonction marche » qui vaut 0 pour $u < 0$, et 1 pour $u \geq 0$. On sait que sa dérivée est la « fonction de Dirac ». On peut alors, en utilisant (6.69) et (6.65), évaluer la fonction d'autocorrélation de $\zeta(t)$

$$\Gamma_\zeta(\tau) = (A_p^{\text{1phot}})^2 \left\langle \sum_j \sum_k e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} \delta(t - t_j) \delta(t - t_k - \tau) \right\rangle \quad (6.70)$$

Comme φ_j et φ_k sont indépendantes

$$\langle e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} \rangle = \delta_{jk} \quad (6.71)$$

(où δ_{jk} est le symbole de Kronecker), et (6.70) se réduit à

$$\Gamma_\zeta(\tau) = (A_p^{\text{1phot}})^2 \sum_j \langle \delta(t - t_j) \delta(t - t_j - \tau) \rangle \quad (6.72)$$

Il suffit alors de remplacer la sommation discrète $\sum_j$ par la somme continue $N_b \Gamma_p^{\text{sp}} \int dt'$ (car $N_b \Gamma_p^{\text{sp}}$ est la « densité » des points t_j sur l'axe des temps) pour obtenir l'expression (6.67). On a en effet

$$\langle \sum_j \delta(t - t_j) \delta(t - t_j - \tau) \rangle \rightarrow N_b \Gamma_p^{\text{sp}} \int dt' \delta(t - t') \delta(t - t' + \tau) = N_b \Gamma_p^{\text{sp}} \delta(\tau) \quad (6.73)$$

6.3.4 Taux d'émission spontanée dans un mode de la cavité

Pour pouvoir utiliser la formule (6.67), il nous faut connaître la valeur du taux Γ_p^{sp} d'émission spontanée dans un mode de la cavité, pour un atome excité dans l'état b .

Nous admettrons le résultat suivant, qui peut être obtenu à partir de la théorie de l'émission spontanée dans le cadre de l'optique quantique : le taux d'émission spontanée est égal au taux d'émission stimulée lorsqu'il y a un photon résonnant dans le mode. En d'autres termes, si nous considérons le terme de couplage de l'équation (V.5.22), nous obtenons Γ_p^{sp} en prenant le nombre de photons $\mathcal{N}$ déjà présents dans le mode égal à 1. On a donc

$$\Gamma_p^{\text{sp}} = \kappa \quad (6.74)$$

Cette relation permet d'exprimer simplement le taux $N_b \Gamma_p^{\text{sp}}$ d'émission spontanée dans le mode p , intervenant dans l'équation (6.67). En nous limitant au cas d'un laser à 4 niveaux, on sait qu'en régime stationnaire

$$N_b = \Delta N_\infty = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{\kappa} \quad (6.75)$$

et donc

$$\Rightarrow N_b \Gamma_p^{\text{sp}} = \gamma_{\text{cav}} \quad (\text{laser à 4 niveaux}) \quad (6.76)$$

Pour un laser quelconque, le taux d'émission spontané dans le mode laser vaut, en régime stationnaire

$$\Rightarrow N_b \Gamma_p^{\text{sp}} = \frac{N_b}{N_b - N_a} \gamma_{\text{cav}}. \quad (6.77)$$

Dans la suite, nous nous limiterons au cas du laser à 4 niveaux pour ne pas alourdir les formules.

6.3.5 Équations de Langevin pour l'amplitude et la phase

Si on rajoute le terme (6.65) d'émission spontanée à l'équation d'évolution (6.58), on obtient une équation qui possède un terme source constitué d'une succession d'impulsions très brèves, à des instants aléatoires. Une équation de ce type a été introduite par Langevin à propos du mouvement Brownien. De très nombreux phénomènes sont régis par des équations de ce type.

Après la linéarisation vis-à-vis des petites fluctuations $a(t)$, on obtient l'équations de Langevin associée à (6.61) :

$$\frac{da}{dt} + i(A_0 + a)\frac{d\phi}{dt} + \gamma_{\text{cav}}\frac{r-1}{r}a = \zeta(t)e^{-i\phi(t)} \quad (6.78)$$

Le processus aléatoire complexe $\zeta(t)$ a été introduit au paragraphe 6.3.3. Il s'agit d'une succession, à des instants aléatoires, d'impulsions complexes de module A^{1phot} , et de phase aléatoire. Nous avons évalué le taux (moyen) de ces impulsions (Équation 6.76), et en définitive $\zeta(t)$ est caractérisé par une fonction d'autocorrélation

$$\Gamma_{\zeta}(\tau) = \gamma_{\text{cav}}(A^{\text{1phot}})^2 \delta(\tau) \quad (6.79)$$

Comme le processus $\zeta(t)$ est manifestement invariant par rotation dans le plan complexe, le processus $\zeta(t)e^{-i\phi(t)}$ apparaissant dans (6.78) a les mêmes propriétés statistiques que $\zeta(t)$.

En prenant les parties réelles et imaginaires de (6.78) nous obtenons

$$\Rightarrow \quad \frac{da}{dt} + \gamma_{\text{cav}}\frac{r-1}{r}a = \zeta_1(t) \quad (6.80)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{A_0}\zeta_2(t) \quad (6.81)$$

où $\zeta_1(t)$ et $\zeta_2(t)$ sont deux processus aléatoires réels indépendants, ayant les mêmes propriétés statistiques que les parties réelle ou imaginaire de $\zeta(t)$, c'est-à-dire

$$\langle \zeta_1 \rangle = \langle \zeta_2 \rangle = 0 \quad (6.82)$$

$$\Gamma_{\zeta_1}(\tau) = \Gamma_{\zeta_2}(\tau) = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}(A^{\text{1phot}})^2 \delta(\tau) \quad (6.83)$$

La première équation de Langevin (6.80) est analogue à l'équation d'évolution d'une composante de la vitesse d'une particule Brownienne, soumise à l'amortissement visqueux du fluide dans lequel elle est plongée, et aux chocs incessants des molécules du fluide.

La deuxième équation de Langevin (6.81) correspond à une marche au hasard à une dimension, dont le coefficient de diffusion (produit du carré moyen du pas élémentaire par la moitié du taux moyen des pas) vaut

$$D = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{4} \left(\frac{A^{\text{1phot}}}{A_0} \right)^2 \quad (6.84)$$

On peut donc se représenter l'évolution de la phase comme une marche au hasard de pas élémentaire (petit devant 2π)

$$\delta\varphi = \frac{A^{\text{1phot}}}{A_0} \quad (6.85)$$

se produisant à un taux $\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}$. Nous y reviendrons dans la partie 6.5.

Ces deux équations de Langevin vont nous permettre d'étudier respectivement les fluctuations d'amplitude et de phase d'un laser, sous l'effet de l'émission spontanée.

6.4 Fluctuations d'amplitude d'un mode laser

6.4.1 Solution stationnaire de l'équation de Langevin

L'équation (6.80) se met sous la forme habituelle dans l'étude du mouvement Brownien

$$\frac{da}{dt} + \alpha a = \zeta_1(t) \quad (6.86)$$

où α est un coefficient d'amortissement, et la fonction d'autocorrélation de $\zeta_1(t)$ vaut

$$\Gamma_{\zeta_1}(\tau) = \langle \zeta_1(t) \zeta_1(t + \tau) \rangle = 2 D_a \delta(\tau) \quad (6.87)$$

où D_a est un coefficient de diffusion qui s'exprime à l'aide de (6.83). Ce coefficient de diffusion a la forme habituelle d'un taux (nombre de pas par seconde) multiplié par le carré du pas élémentaire du processus de diffusion.

Le processus aléatoire $a(t)$ solution de ces équations atteint rapidement un état stationnaire, dont on peut calculer les caractéristiques. Pour cela, intégrons formellement (6.86), ce qui donne

$$a(t) = \int_{-\infty}^t dt' \zeta_1(t') e^{-\alpha(t-t')} \quad (6.88)$$

On peut en déduire la variance de $a(t)$

$$\langle a^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \langle \zeta_1(t') \zeta_1(t'') \rangle e^{-\alpha(2t-t'-t'')} \quad (6.89)$$

En utilisant (6.87), on obtient

$$\Rightarrow \quad \langle a^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^t dt' 2D_a e^{-2\alpha(t-t')} = \frac{D_a}{\alpha} \quad (6.90)$$

Ce résultat remarquable, établi par Einstein dans le cas du mouvement Brownien, a une interprétation simple : le régime stationnaire résulte d'une compétition entre un terme de diffusion, qui tend à augmenter la variance $\langle a^2 \rangle$ suivant la loi

$$\left[\frac{d}{dt} \langle a^2 \rangle \right]_{\text{diff}} = 2D_a \quad (6.91)$$

et un terme d'amortissement

$$\left[\frac{d}{dt} \langle a^2 \rangle \right]_{\text{amort}} = -2\alpha \langle a^2 \rangle \quad (6.92)$$

Remarque

La relation d'Einstein originale s'applique à la vitesse d'une particule à l'équilibre thermodynamique. En écrivant le principe d'équipartition de l'énergie, on obtient

$$\frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} m \langle v_i^2 \rangle$$

d'où on déduit

$$\frac{D}{\alpha} = \frac{k_B T}{m} \quad (6.93)$$

C'est cette dernière relation qui est la relation d'Einstein au sens habituel. Elle montre que fluctuations (D) et dissipation (α) sont liés par une relation qui met en jeu la température.

6.4.2 Fluctuations d'amplitude pour un laser très au-dessus du seuil

En régime stationnaire, le module de l'amplitude $A(t)$ du mode laser est donc un processus aléatoire dont nous admettons qu'il est stationnaire et ergodique. Sa valeur moyenne

$$\langle A(t) \rangle = A_0 = \sqrt{(r-1) \frac{I_{\text{sat}}}{2}} \quad (6.94)$$

est obtenue en prenant la solution stationnaire de l'équation d'évolution vue au chapitre 4. La variance des fluctuations est donnée par le résultat (6.90), où les coefficients α et D sont obtenus en identifiant (6.86) et (6.80), (6.84) et (6.87).

$$\alpha = \gamma_{\text{cav}} \frac{r-1}{r} \quad (6.95)$$

$$D = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{4} (A^{\text{1ph}})^2 \quad (6.96)$$

On obtient ainsi :

$$\sigma_a^2 = \langle a^2 \rangle = \frac{D}{\alpha} = \frac{(A^{\text{1ph}})^2}{4} \frac{r}{(r-1)} \quad (6.97)$$

Pour un laser très proche du seuil d'oscillation, $(r-1)$ est petit devant 1, et le deuxième terme de (6.97) peut devenir très grand. En revanche, dès que r est grand devant 1 (cas d'un laser très au-dessus du seuil), la formule (6.97) montre que les fluctuations d'amplitude sont de l'ordre de

$$[\sigma_a]_{r \gg 1} \approx \frac{A^{\text{1ph}}}{2} \quad (6.98)$$

En introduisant le nombre $\mathcal{N}$ de photons dans le mode laser

$$\mathcal{N} = \left(\frac{A_0}{A^{\text{1ph}}} \right)^2 \quad (6.99)$$

on obtient la valeur relative des fluctuations d'amplitude

$$\frac{[\sigma_a]_{r \gg 1}}{A_0} \approx \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{N}}} \quad (6.100)$$

On a vu que le nombre de photons stockés dans une cavité laser est très grand, souvent très supérieur à 10^{10} (sauf dans les lasers à semi-conducteurs qui ont des cavités microscopiques). On voit donc que les fluctuations relatives d'amplitude du champ laser sont très modérées : un laser monomode très au-dessus du seuil est a priori une source de lumière dont l'intensité est très stable.

Remarques

(i) Il convient de ne pas confondre les fluctuations étudiées ici, qui sont les fluctuations d'amplitude du champ dans la cavité laser dues à l'émission spontanée, avec le bruit de grenaille (« shot noise ») apparaissant dans le processus de détection photoélectrique, et qui serait présent même si l'amplitude du laser était rigoureusement constante. Si on s'intéresse aux fluctuations du signal de photodétection, les deux fluctuations s'ajoutent.

(ii) On n'attachera pas trop d'importance à la valeur exacte du coefficient numérique de l'équation (6.100). Il existe en effet d'autres causes de fluctuations fondamentales, liées à la nature discrète (quantifiée) des échanges d'énergie entre le champ laser et les atomes. Le terme correspondant est du même ordre que celui que nous avons calculé, auquel il vient se rajouter.

(iii) Nous avons discuté ici les fluctuations fondamentales, qui constituent une limite inférieure. Il existe bien sûr de nombreuses causes techniques de fluctuations d'intensité : fluctuations du gain de l'amplificateur (par exemple parce que le nombre d'atomes, ou le mécanisme de pompage fluctuent) ; vibrations de la cavité qui conduisent à un défaut d'alignement et donc à des pertes modulées. Ces bruits techniques sont souvent beaucoup plus importants que celui que nous venons de calculer. Il est pourtant très important de comprendre la limite fondamentale afin de pouvoir identifier et réduire les imperfections techniques. C'est ainsi qu'on obtient des lasers dont le bruit approche de la limite fondamentale, ce que l'on sait faire aujourd'hui.

6.4.3 Densité spectrale des fluctuations d'amplitude

S'il est important d'avoir caractérisé l'amplitude σ_a des fluctuations d'amplitude du champ laser, il est également utile de savoir quelles sont les fréquences de fluctuation les plus importantes. En d'autres termes, nous souhaitons connaître la densité spectrale de puissance $S_a(\Omega)$ de $a(t)$. Nous l'obtiendrons grâce au théorème de Wiener-Khintchine, et nous calculerons donc la fonction d'autocorrélation du processus aléatoire réel $a(t)$. En partant de (6.86) et en généralisant le calcul ayant donné σ_a^2 , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Gamma_a(\tau) &= \langle a(t)a(t+\tau) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' 2D_a \delta(t' - t'') \exp[-\alpha(2t + \tau - t' - t'')] \end{aligned} \quad (6.101)$$

Pour terminer le calcul, il faut faire attention au signe de τ . On trouve finalement, après un calcul analogue à celui du paragraphe 6.2.4 (équations 6.26 à 6.29), la fonction paire

$$\Gamma_a(\tau) = \frac{D_a}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} = \sigma_a^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (6.102)$$

La transformée de Fourier (à $\sqrt{2\pi}$ près) nous donne la densité spectrale de puissance des fluctuations d'amplitude

$$\begin{aligned} S_a(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \Gamma_a(\tau) d\tau \\ &= \frac{D}{\alpha} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (6.103)$$

Il s'agit d'une Lorentzienne (cf. figure 6.3) dont la largeur est 2α , c'est-à-dire l'inverse du temps caractérisant le rappel de l'amplitude vers sa valeur d'équilibre sous l'effet du terme de saturation. Pour un laser très au-dessus du seuil ($r \gg 1$), cette largeur est de l'ordre de γ_{cav} (cf. Équation 6.95).

Remarque

En utilisant la transformée de Fourier inverse pour $\tau = 0$, on peut exprimer la variance σ_a^2 , comme $\Gamma_a(0)$, c'est-à-dire l'intégrale de $S_a(\omega)$ sur tout le spectre

$$\sigma_a^2 = \Gamma_\tau(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_a(\omega) d\omega = \frac{D}{\alpha} \quad (6.104)$$

On retrouve évidemment le résultat des paragraphes précédents.

6.4.4 Photodétecteur éclairé par un faisceau laser : fluctuations du photocourant

Si on mesure, avec un détecteur photoélectrique, la puissance du faisceau sortant du laser, le photocourant obtenu est proportionnel au carré du module de l'amplitude du champ laser, soit

$$I_d(t) = \eta e \mathcal{N}_p \frac{c}{L_{\text{cav}}} T = \eta e \frac{c}{L_{\text{cav}}} T \frac{2\varepsilon_0 V_{\text{cav}}}{\hbar\omega} |\mathcal{A}(t)|^2 \quad (6.105)$$

Dans cette formule, η s'appelle le « rendement quantique » du détecteur, e est la charge de l'électron. Le photocourant va fluctuer, et reproduire les fluctuations de $|\mathcal{A}(t)|^2 = [A(t)]^2$.

Pour un laser très au-dessus du seuil, on a vu que

$$|\mathcal{A}(t)| = A_0 + a(t) \quad (6.106)$$

a une fluctuation relative très petite devant 1. Il en est de même des fluctuations relatives du photocourant, et on a

$$\frac{\sigma_{I_d}}{I_d} = 2 \frac{\sigma_a}{A_0} \simeq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_p}} \quad (6.107)$$

De même, la fonction d'autocorrélation

$$\Gamma_{I_d}(\tau) = \langle I_d(t) I_d(t + \tau) \rangle \quad (6.108)$$

est proportionnelle à

$$\begin{aligned} \Gamma_{A^2}(\tau) &= \langle [A(t)]^2 \cdot [A(t + \tau)]^2 \rangle \simeq A_0^4 + 4A_0^2 \langle a(t) \cdot a(t + \tau) \rangle \\ &= A_0^4 + 4A_0^2 \Gamma_a(\tau) \end{aligned} \quad (6.109)$$

En soustrayant le terme constant A_0^4 (qui donne un pic à l'origine dans le spectre), on voit que la densité spectrale de puissance du photocourant est proportionnelle à celle $S_a(\Omega)$ des fluctuations d'amplitude (Équation (6.103)). Le coefficient de proportionnalité découle des équations ci-dessus. On l'obtient plus facilement en utilisant (6.80), et en se souvenant que

$$\sigma_{I_d} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{I_d}(\Omega) d\Omega \quad (6.110)$$

Remarque

Rappelons qu'il ne faut pas confondre les fluctuations décrites ici, dues à l'émission spontanée dans l'amplificateur laser, avec le bruit de grenaille de la photodétection qui a un spectre blanc.

6.5 Diffusion de phase. Largeur de raie d'un laser très au-dessus du seuil

6.5.1 Laser très au-dessus du seuil

Nous venons de voir que pour un laser très au-dessus du seuil, les fluctuations relatives de l'amplitude $A(t)$ du champ laser sont très petites, et l'extrémité du vecteur de Fresnel représentant l'amplitude complexe $\mathcal{A}_p(t)$ (Équation (6.25)) se trouve pratiquement sur le cercle de rayon A_0 (Figure 6.8).

Alors, on a vu que l'équation d'évolution de la phase est donnée par l'équation (6.81)

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{A_0} \zeta_2(t) \quad (6.111)$$

Le processus aléatoire $\zeta_2(t)$, lié à l'émission spontanée, est de moyenne nulle, et sa fonction d'autocorrélation, qui est égale à celle de $\zeta_1(t)$ (Équation (6.84)) vaut

$$\Gamma_{\zeta_2}(\tau) = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} (\mathcal{A}_p^{1\text{phot}})^2 \delta(\tau) \quad (6.112)$$

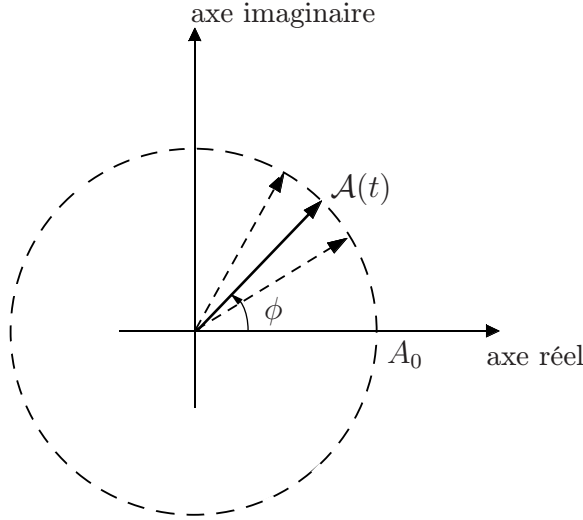


FIG. 6.8: Amplitude complexe du mode d'un laser très au-dessus du seuil. Le module est constant, et la phase effectue une marche aléatoire.

6.5.2 Diffusion de la phase

L'équation (6.111) est une équation de Langevin, décrivant l'évolution de la grandeur aléatoire $\phi(t)$ sous l'effet du terme fluctuant du second membre. Mais à la différence de l'équation (6.80), l'équation sans second membre ne possède aucun terme d'amortissement susceptible de rappeler $\phi(t)$ vers une valeur stationnaire, et la phase diffuse librement.

À chaque instant, la phase $\phi(t)$ est donc une variable aléatoire équipartie entre 0 et 2π . Il est important de ne pas confondre ce résultat avec la conclusion du paragraphe 4.3.4 du chapitre 4 (relatif à la brisure spontanée de symétrie). Nous avons alors conclu que l'amplitude du mode laser devait s'exprimer comme $A_0 e^{i\phi}$, en prenant ϕ comme une variable aléatoire, mais nous n'envisagions alors pas d'évolution temporelle de ϕ , dont la valeur restait constante pour une réalisation donnée. Il y a ici une notion nouvelle : la variable aléatoire ϕ diffuse librement au cours du temps. Nous pouvons résumer cette discussion en écrivant

$$\phi(t) = \phi_0 + \varphi(t) \quad (6.113)$$

expression dans laquelle ϕ_0 est une variable aléatoire équipartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, tandis que $\varphi(t)$ est un processus aléatoire obéissant à l'équation (6.111), et tel que $\varphi(0) = 0$.

Le problème de l'évolution de $\varphi(t)$ sous l'effet de la « force de Langevin » du second membre de (6.111) est bien connu : il s'agit d'une *marche au hasard à une dimension*, caractérisée par le coefficient de diffusion

$$D_\varphi = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{4} \left(\frac{A_p^{\text{phot}}}{A_0} \right)^2 \quad (6.114)$$

On peut la considérer comme constituée de pas élémentaires de valeur quadratique moyenne

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{A_p^{\text{1phot}}}{A_0} \quad (6.115)$$

le nombre moyen de pas par seconde étant γ_{cav} .

Pour simplifier les démonstrations, nous nous autorisons à considérer une version simplifiée de ce problème de marche au hasard à une dimension, en admettant que la phase $\varphi(t)$ varie exactement de $\pm\Delta\varphi$ (donnée par (6.115)) à chaque saut. On a donc, après N pas élémentaires

$$\varphi_N = \Delta\varphi \sum_{j=1}^N \varepsilon_j \quad (6.116)$$

où les ε_j sont des variables aléatoires indépendantes, valant ± 1 , de valeur moyenne nulle, c'est-à-dire que

$$\langle \varepsilon_j \rangle = 0 \quad (6.117)$$

$$\langle \varepsilon_j \varepsilon_{j'} \rangle = \delta_{ij} \quad (6.118)$$

On en déduit donc

$$\langle \varphi_N \rangle = 0 \quad (6.119)$$

et

$$\langle \varphi_N^2 \rangle = \Delta\varphi \sum_j \sum_{j'} \langle \varepsilon_j \varepsilon_{j'} \rangle = N \Delta\varphi^2. \quad (6.120)$$

En moyenne, au bout du temps t , le nombre N de pas vaut $\gamma_{\text{cav}} t$, et on écrira donc

$$\langle \varphi(t) \rangle = 0 \quad (6.121)$$

et

$$\sigma_\varphi^2(t) = \langle [\varphi(t)]^2 \rangle = 2D_\varphi t \quad (6.122)$$

Il faut faire attention au fait que le processus aléatoire $\varphi(t)$ n'est donc pas un processus stationnaire, puisque sa variance croît avec le temps.

En fait, $\varphi(t)$ est un *processus à accroissements stationnaires*, ce qui veut dire que

$$\Delta\varphi(t_1, t_2) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \quad (6.123)$$

est une variable aléatoire stationnaire, de valeur moyenne nulle

$$\langle \Delta\varphi(t_1, t_2) \rangle = 0 \quad (6.124)$$

et dont la variance

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = 2D_\varphi|t_2 - t_1| \quad (6.125)$$

ne dépend que de la différence $t_2 - t_1$.

On peut être plus précis, et montrer que $\Delta\varphi$ est une variable aléatoire gaussienne, dont la densité de probabilité est

$$p(\Delta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta\varphi}} \exp\left(-\frac{\Delta\varphi^2}{2\sigma_{\Delta\varphi}^2}\right) \quad (6.126)$$

En effet, la quantité φ_N (équation 6.116) résulte de l'addition d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes, ayant la même variance. On peut alors appliquer le théorème de la limite centrale, qui stipule que cette somme a une distribution gaussienne, dont la variance est la somme des variances élémentaires.

Nous constatons alors que, bien que $\varphi(t)$ ne soit pas un processus stationnaire, $\exp[i\varphi(t)]$ est un processus stationnaire. En effet, sa fonction d'autocorrélation s'écrit

$$\langle e^{-i\varphi(t_1)} e^{i\varphi(t_2)} \rangle = \langle e^{i\Delta\varphi(t_1, t_2)} \rangle$$

et la loi de probabilité (6.126) de $\Delta\varphi(t_1, t_2)$ ne dépend que de $t_2 - t_1$. Cette fonction d'autocorrélation se calcule aisément en utilisant (6.126), puisque

$$\langle e^{i\Delta\varphi} \rangle = \int e^{i\Delta\varphi} p(\Delta\varphi) d(\Delta\varphi)$$

n'est autre que la transformée de Fourier de $p(\Delta\varphi)$ prise pour la valeur 1 de la variable conjuguée. On sait que la transformée de Fourier d'une gaussienne d'écart type $\sigma_{\Delta\varphi}$ est une gaussienne d'écart-type $(\sigma_{\Delta\varphi})^{-1}$, et on obtient donc

$$\langle e^{-i\varphi(t_1)} e^{i\varphi(t_2)} \rangle = \exp\left[-\frac{\sigma_{\Delta\varphi}^2}{2}\right] = e^{-D|t_2 - t_1|} \quad (6.127)$$

Le processus aléatoire $\phi(t)$ (Équation (6.113)) est lui aussi un processus à accroissements stationnaires, et $\exp[i\phi(t)]$ est stationnaire. Comme ϕ_0 est équiparti sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a

$$\langle e^{i\phi(t)} \rangle = \langle e^{i\phi_0} \rangle = 0 \quad (6.128)$$

et la fonction d'autocorrélation du terme de phase vaut donc

$$\implies \langle e^{-i\phi(t_1)} e^{i\phi(t_2)} \rangle = e^{-D_\phi|t_2 - t_1|} \quad (6.129)$$

6.5.3 Cohérence temporelle. Largeur de raie

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la fonction d'autocorrélation de l'amplitude complexe $\mathcal{A}(t)$ du champ laser

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{A}}(\tau) &= \langle A(t)A(t+\tau)e^{i[\phi(t+\tau)-\phi(t)]} \rangle \\ &= \langle A(t)A(t+\tau) \rangle \langle e^{i[\phi(t+\tau)-\phi(t)]} \rangle\end{aligned}\quad (6.130)$$

Pour un laser très au-dessus du seuil, nous négligeons les fluctuations d'amplitude, et nous obtenons, en utilisant (6.129)

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(\tau) = A_0^2 e^{-D_\varphi |\tau|} \quad (6.131)$$

Le coefficient D_φ de diffusion de la phase est donné par (6.114).

En ce qui concerne le champ $\mathcal{E}(t)$, on a

$$\Gamma_{\mathcal{E}}(\tau) = A_0^2 e^{-D_\varphi |\tau|} e^{-i\omega_p \tau} \quad (6.132)$$

Les considérations du paragraphe 6.2.7 s'appliquent directement ici, et les fonctions d'autocorrélation $\Gamma_{\mathcal{A}}(\tau)$ et $\Gamma_{\mathcal{E}}(\tau)$ ressemblent à celles de la figure 6.5. On les a représentées sur la figure 6.9. Le temps de corrélation τ_c du champ, qui est aussi sa cohérence temporelle, vaut

$$\tau_c = \frac{1}{D_\varphi} \quad (6.133)$$

Le spectre de l'enveloppe complexe $\mathcal{A}$, obtenu en utilisant le théorème de Wiener-Khintchine, est une lorentzienne de demi-largeur

$$\Delta\omega = D_\varphi = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{4} \left[\frac{A_p^{\text{phot}}}{A_0} \right]^2 = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{4} \frac{1}{\mathcal{N}_p} \quad (6.134)$$

Pour le champ laser, le spectre est la même lorentzienne, mais centrée sur la fréquence du mode ω_p (voir figure 6.10, analogue à la figure 6.4)

$$S_{\mathcal{E}_p}(\omega) = \frac{A_0^2}{\pi} \frac{\Delta\omega}{(\omega - \omega_p)^2 + \Delta\omega^2} \quad (6.135)$$

Même pour un laser très au-dessus du seuil, *la lumière laser n'est donc pas parfaitement monochromatique, à cause du phénomène de diffusion de phase.*

La largeur de raie associée à ce phénomène s'appelle « largeur de Schawlow-Townes ». Le complément 3.6 montre comment on peut l'exprimer à l'aide de divers paramètres connus des lasers. Ici, nous nous contenterons de noter que cette largeur est inversement proportionnelle au nombre de photons $\mathcal{N}_p$ dans le mode laser (cf. (6.134)). On pourra alors se souvenir que si la largeur de Shawlow-Townes est extrêmement faible avec les lasers

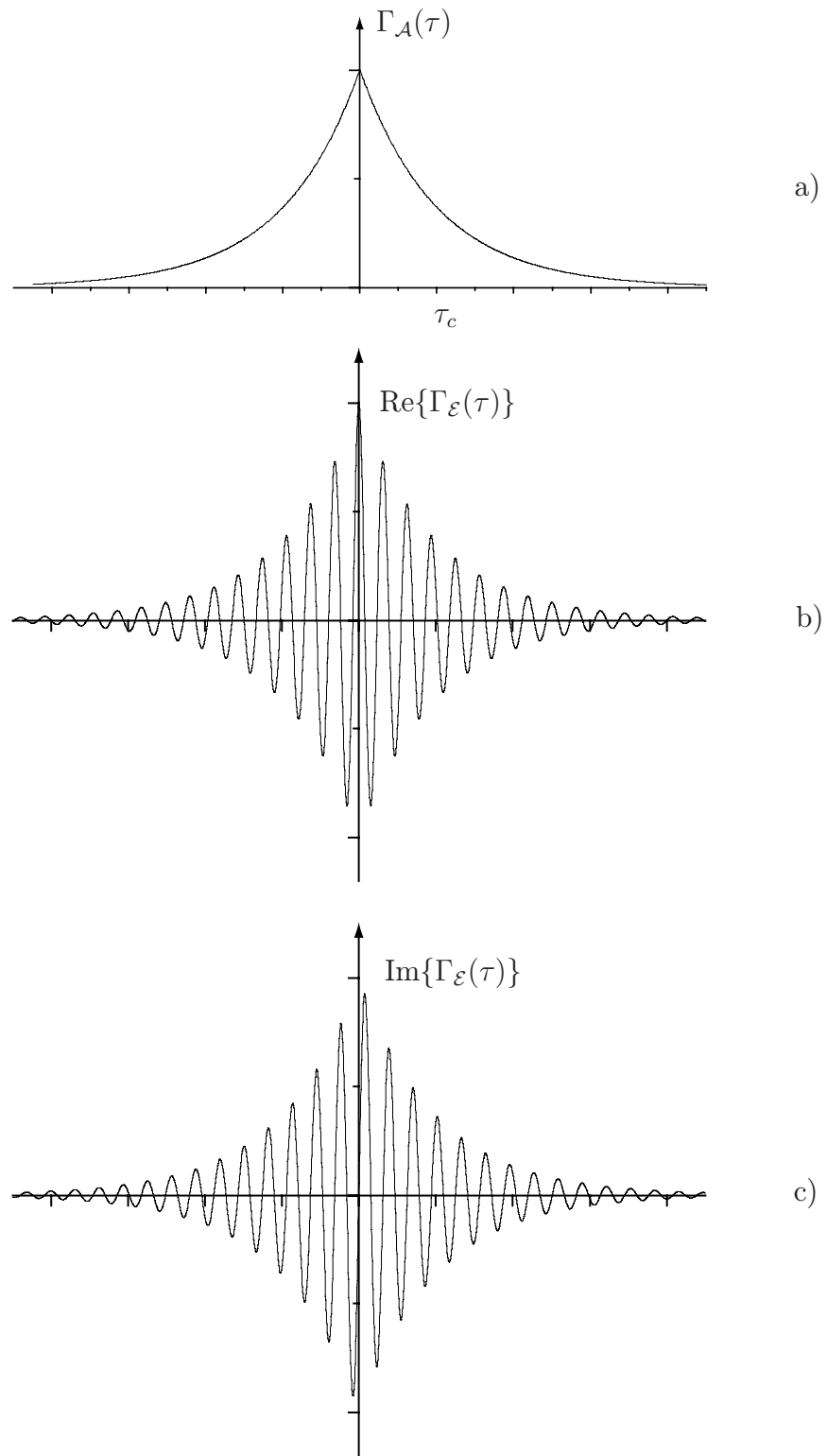


FIG. 6.9: Fonction d'autocorrélation du champ $\mathcal{E}(t) = \mathcal{A}(t)e^{-i\omega_p t}$ d'un laser monomode idéal très au-dessus du seuil. La cohérence temporelle τ_c est limitée par la diffusion de la phase.

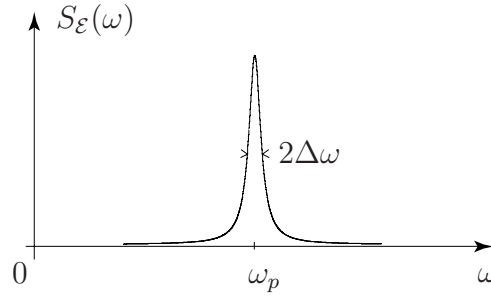


FIG. 6.10: Densité spectrale de puissance pour un laser idéal très au-dessus du seuil. La largeur de raie $\Delta\omega$ est due à la diffusion de la phase. Noter que la largeur est très exagérée : on a généralement $\Delta\omega \ll \omega_p$ (ω_p est la fréquence du laser).

usuels « macroscopiques » ($\Delta\omega/2\pi$ très inférieur au kHz) elle est de l'ordre du mégahertz pour les lasers à semi-conducteurs, dont les cavités ont des échelles très inférieures au millimètre. Cela représente encore des facteurs de qualité $\omega/\Delta\omega$ supérieurs à 10^8 , ce qui veut dire que la fonction d'autocorrélation du champ Γ_E possède plus de 10^8 oscillations dans le temps de cohérence $\tau_c = \Delta\omega^{-1}$ (Figure 6.9).

Remarques

- (i) Le lien entre largeur de raie spectrale et diffusion de la phase peut se comprendre en notant que si on écrit le champ

$$\mathcal{E}_p(t) = A_0 e^{i[\phi(t) - \omega_p t]}$$

la fréquence instantanée est

$$\omega(t) = -\frac{d}{dt}[\phi(t) - \omega_p t] = \omega_p - \frac{d\phi}{dt}$$

Un processus strictement monochromatique est donc lié à une phase parfaitement constante, et réciproquement une fluctuation de phase est associée à un élargissement spectral.

- (ii) Dans les lasers à semi-conducteur, il existe un couplage entre les fluctuations d'amplitude et les fluctuations de phase, qui vient rajouter des fluctuations de phase généralement supérieures à celles que nous avons étudié ici. La largeur de raie ultime est alors en général plus grand que la largeur de Schawlow-Townes (facteur de Henry).

6.6 Description de quelques expériences d'interférences avec des lasers

6.6.1 Interférences à deux ondes à partir d'un laser

Considérons l'expérience de la figure 6.11, où le faisceau laser est partagé en 2 faisceaux qui se recombinaient après avoir suivi des trajets différents. Les deux champs en sortie sont

de la forme

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = \sqrt{T'} \mathcal{E}_p \left(t - \frac{L'}{c} \right) \quad (6.136a)$$

$$\mathcal{E}''(\mathbf{r}, t) = \sqrt{T''} \mathcal{E}_p \left(t - \frac{L''}{c} \right) \quad (6.136b)$$

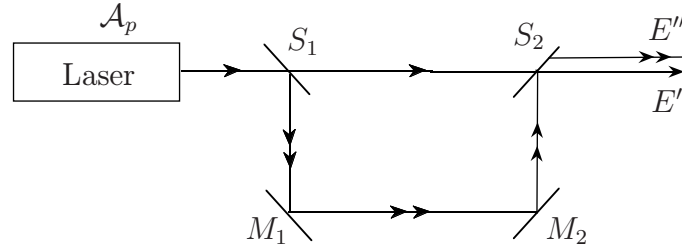


FIG. 6.11: Schéma de base d'une expérience d'interférences à deux ondes. Les champs $E'(\mathbf{r}, t)$ et $E''(\mathbf{r}, t)$ sont déphasés d'une quantité contrôlée par l'interféromètre.

Dans ces expressions, T' et T'' sont des coefficients rendant compte de la transmission de la puissance lumineuse le long de chaque voie, et décrivant en particulier l'action des lames séparatrices. Les longueurs optiques L' et L'' caractérisent les retards dus à la propagation depuis le laser, dont le champ est de la forme $\mathcal{E}_p(t)$. Nous considérerons L' et L'' comme indépendants de la fréquence ω_p du laser.

Un photo détecteur placé au point $\mathbf{r}$ est sensible à l'intensité lumineuse

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= 2|\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) + \mathcal{E}''(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &= 2[|\mathcal{E}'|^2 + |\mathcal{E}''|^2 + 2\mathcal{R}\{(\mathcal{E}')^* \mathcal{E}''\}] \end{aligned} \quad (6.137)$$

On peut récrire cette expression, avec des notations évidentes

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= 2[T'|\mathcal{E}_p(t - \frac{L'}{c})|^2 + T''|\mathcal{E}_p(t - \frac{L''}{c})|^2 \\ &\quad + 2\sqrt{T'T''}\mathcal{R}\{\mathcal{E}_p^*(t - \frac{L'}{c})\mathcal{E}_p(t - \frac{L''}{c})\}] \end{aligned} \quad (6.138)$$

Cette expression mérite d'être commentée. Pour l'instant, nous n'avons fait apparaître aucune moyenne, statistique ou temporelle. Il convient simplement de se souvenir que lorsqu'on écrit que le signal photoélectrique est proportionnel au carré du module du champ complexe, on suppose implicitement que le détecteur moyenne sur un nombre suffisant de périodes optiques pour que tous les termes qui pourraient osciller à la fréquence optique ω_p soient moyennés.

En pratique, tout détecteur moyenne effectivement sur une certaine durée θ , et nous observons en fait un courant « instantané », résultant d'une moyenne temporelle, proportionnel à l'intensité lumineuse moyennée :

$$i_\theta(t) = s I_\theta(\mathbf{r}, t) \quad (6.139)$$

Dans cette expression, s est la sensibilité, et I_θ est une moyenne temporelle

$$I_\theta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t dt' I(\mathbf{r}, t') \quad (6.140)$$

On voit alors que l'expression (6.138) fait intervenir une fonction d'autocorrélation temporelle

$$\Gamma_{\mathcal{E}_p}^{(\theta)}(t_1, t_1 + \tau) = \frac{1}{\theta} \int_{t_1}^{t_1 + \theta} dt_1 \mathcal{E}^*(t_1) \mathcal{E}(t_1 + \tau) \quad (6.141)$$

Nous considérerons d'abord le cas où θ est plus long que tous les temps caractéristiques du problème (temps de corrélation de l'amplitude et de la phase du champ laser). On admet de plus que le champ laser est un processus stationnaire et stochastique, et on peut remplacer la fonction d'autocorrélation temporelle $\Gamma_{\mathcal{E}_p}^{(\theta)}(t_1, t_1 + \tau)$ par la fonction d'autocorrélation statistique

$$\Gamma_{\mathcal{E}_p}(\tau) = \langle \mathcal{E}_p^*(t) \mathcal{E}_p(t + \tau) \rangle \quad (6.142)$$

On a alors un photocourant stationnaire

$$\begin{aligned} i &= 2s[(T + T'')\Gamma_{\mathcal{E}}(0) + 2\sqrt{T'T''}\mathcal{R}e\{\Gamma_{\mathcal{E}}(\tau)\}] \\ &= i_0 \left[1 + C\mathcal{R}e\left\{ \frac{\Gamma_{\mathcal{E}}(\tau)}{\Gamma_{\mathcal{E}}(0)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.143)$$

On a introduit le courant moyen

$$i_0 = 2s(T' + T'')\Gamma_{\mathcal{E}}(0) \quad (6.144)$$

et le contraste

$$C = 2 \frac{\sqrt{T'T''}}{T' + T''} \quad (6.145)$$

qui est un nombre compris entre 0 et 1.

Dans le cas d'un laser monomode, nous avons vu que

$$\frac{\Gamma_{\mathcal{E}}(\tau)}{\Gamma(0)} = \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}\right) e^{-i\omega_p \tau} \quad (6.146)$$

Si on fait varier

$$\tau = \frac{L' - L''}{c} \quad (6.147)$$

soit en déplaçant un miroir, le détecteur restant fixe, soit en déplaçant le détecteur dans le champ d'interférence, on voit des franges d'interférence de période $2\pi/\omega_p$, de contraste $C \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}\right)$. On voit qu'il est ainsi possible de déterminer la cohérence temporelle τ_c de la raie laser en mesurant l'évolution du contraste.

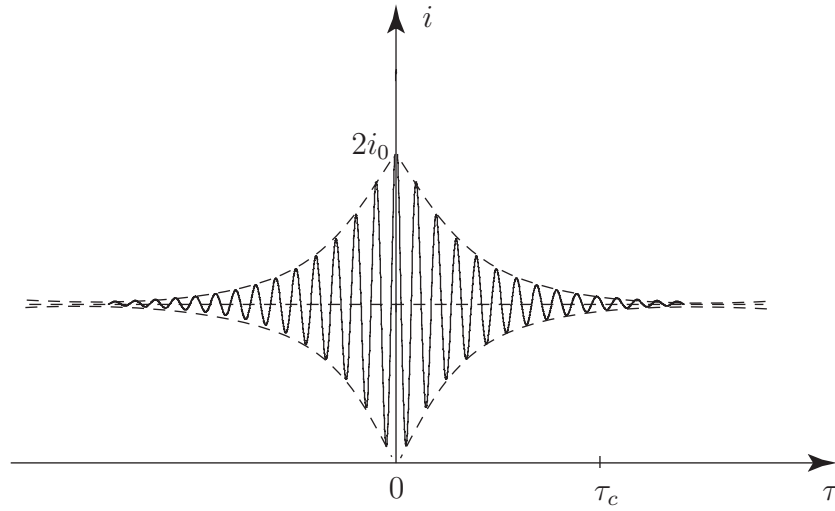


FIG. 6.12: Intensité détectée en fonction de la différence de marche dans un interféromètre à 2 ondes. Le contraste des franges tend vers 0 au-delà du temps de corrélation τ_c (cohérence temporelle). Noter que l'échelle n'est pas du tout respectée. Pour une raie laser visible de largeur 1 MHz, on a plus de 10^8 franges de bon contraste.

La formule (6.143) a en fait une portée beaucoup plus générale. Elle nous montre que pour un champ lumineux stationnaire et ergodique, un interféromètre fournit directement la fonction d'autocorrélation du champ. En faisant varier la différence de marche τ , on peut donc déterminer complètement $\Gamma_{\mathcal{E}}(\tau)/\Gamma_{\mathcal{E}}(0)$. Par transformation de Fourier, on obtient (en vertu du théorème de Wiener-Khintchine) le spectre de puissance $S_{\mathcal{E}}(\omega)$ de la lumière, qui est le signal que l'on obtiendrait en explorant le spectre avec un spectromètre à haute résolution (fonctionnellement un filtre optique de bande étroite, dont la fréquence centrale est balayable, suivi d'un photodétecteur). Cette remarque est à la base de la spectroscopie par transformée de Fourier, dans laquelle on enregistre un interférogramme $i(\tau)$ en balayant un miroir d'un interféromètre de Michelson, et on calcule la transformée de Fourier.

Remarques

(i) Le calcul ci-dessus, présenté dans le cas d'une raie laser, est valable quelle que soit la lumière analysée. En particulier, pour toute source stationnaire, la formule (6.143) montre qu'un interféromètre à deux ondes est en fait un autocorrélateur.

(ii) Dans le cas d'une source classique spatialement incohérente, la formule (6.143) reste valable mais le contraste C peut être très petit si on ne prend pas de précaution particulière pour assurer la cohérence des deux faisceaux qui interfèrent soit en limitant la largeur de la source, soit en plaçant le détecteur dans une surface de localisation des franges.

6.6.2 Discussion

Dans les cours élémentaires d'optique, on explique les franges d'interférence en modélisant la vibration lumineuse par un champ monochromatique

$$\mathcal{E}(t) = E_0 e^{i\phi} e^{-i\omega t} \quad (6.148)$$

La phase ϕ de l'oscillation est parfaitement déterminée.

Nous avons présenté ici une situation un peu moins simple, puisque la vibration laser peut se représenter d'une façon analogue

$$\mathcal{E}_p(t) = A_0 e^{i\phi} e^{-i\omega_p t} \quad (6.149)$$

mais ϕ est ici une variable aléatoire équipartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ (cf. Équation (6.88), de sorte qu'à chaque instant la valeur moyenne du champ est nulle

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = A_0 e^{-i\omega_p t} \langle e^{i\phi} \rangle = 0 \quad (6.150)$$

Il est clair que si on voulait identifier la vibration lumineuse avec la moyenne du champ, on serait incapable de rendre compte du phénomène d'interférence. Naturellement, si on fait attention à introduire la moyenne statistique d'une grandeur convenablement choisie (la fonction d'autocorrélation au paragraphe précédent), on trouve le résultat correct c'est-à-dire celui qui est accord avec l'observation.

On peut donner une interprétation plus intuitive en remarquant que pour une expérience donnée on a un échantillon particulier tiré d'un ensemble statistique : alors, dans l'équation (6.149), nous considérons la phase ϕ non pas comme une variable aléatoire mais comme une variable fixée (mais inconnue). On peut alors adopter la même interprétation des interférences que celle donnée pour un champ monochromatique (6.148). Or cette interprétation montre que la figure d'interférence ne dépend pas de la phase à l'origine, puisqu'elle dépend de la différence des phases des deux champs qui interfèrent

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = \sqrt{T'} A_0 \exp \left(i \left[\phi - \omega_p \left(t - \frac{L'}{c} \right) \right] \right) \quad (6.151a)$$

$$\mathcal{E}''(\mathbf{r}, t) = \sqrt{T''} A_0 \exp \left(i \left[\phi - \omega_p \left(t - \frac{L''}{c} \right) \right] \right) \quad (6.151b)$$

Le terme d'interférence

$$(\mathcal{E}')^* \mathcal{E}'' = \sqrt{T' T''} A_0^2 \exp \left[i \omega_p \left(\frac{L'' - L'}{c} \right) \right] \quad (6.152)$$

est donc le même, que l'on considère un échantillon particulier ou une moyenne statistique.

La situation est un peu plus subtile si on considère une différence de marche $L'' - L'$ suffisamment grande pour que le retard soit beaucoup plus grand que le temps de corrélation τ_c . Alors nous sommes amenés à représenter les deux champs qui interfèrent

(6.151a) et (6.151b) avec des phases ϕ' et ϕ'' qui sont des variables aléatoires non-corrélées. Le terme d'interférence s'écrit donc

$$(\mathcal{E}')^*(\mathcal{E}'') = \sqrt{T'T''}A_0^2 \exp \left[i\omega_p \left(\frac{L'' - L'}{c} \right) \right] e^{i(\phi' - \phi'')} \quad (6.153)$$

À ce point, on obtiendra un résultat différent suivant que l'on considère ϕ' et ϕ'' comme des échantillons particuliers fixés, ou au contraire comme des variables aléatoires sur lesquelles il convient de prendre la moyenne statistique.

Si on a un détecteur qui effectue une moyenne temporelle grande devant le temps de corrélation τ_c , les valeurs de ϕ' et ϕ'' fluctuent pendant le temps d'intégration, et le résultat de la mesure est donné par la moyenne statistique de (6.153) (nous admettons qu'il y a ergodisme). Or cette moyenne est nulle puisque ϕ' et ϕ'' sont des variables aléatoires indépendantes. Ce raisonnement prédit la disparition des franges lorsque le retard entre les deux voies de l'interféromètre est supérieur au temps de cohérence τ_c . C'est le résultat trouvé dans la partie 6.6.1.

Mais si nous supposons que le détecteur a un temps de réponse beaucoup plus court que τ_c , il n'y a pas de raison a priori d'effectuer une moyenne statistique : pendant un temps d'observation court devant τ_c , les variables ϕ' et ϕ'' peuvent être considérées comme des échantillons particuliers bien définis, et le terme d'interférence (6.153) n'est pas nul. Si par exemple on a des franges spatiales et que l'on enregistre une image de ces franges avec une caméra rapide (à l'échelle τ_c) on observe l'interférogramme associé à la valeur particulière de $\phi' - \phi''$ à l'instant d'observation. Si on répète l'observation un peu plus tard, on observe l'interférogramme associé à une autre valeur de $\phi' - \phi''$, c'est-à-dire les mêmes franges décalées d'une fraction aléatoire d'interfrange. En faisant la moyenne de tous ces interférogrammes, on obtient finalement la disparition des franges, ce qui est en accord avec le résultat obtenu en prenant la moyenne statistique (résultat du paragraphe 6.6.1).

Mais le raisonnement ci-dessus nous a permis de mettre en évidence un phénomène que nous n'avions pas prévu au paragraphe E.1, à savoir la possibilité d'observer des franges, à condition d'utiliser une méthode d'observation convenable. L'observation confirme l'analyse faite ici. On peut se demander quel est le type de signal dont la moyenne statistique reflète l'existence des franges « instantanées ». Il s'agit en fait d'un signal de corrélation d'intensité, que nous allons présenter sur un exemple un peu différent.

Remarque

La discussion ci-dessus n'est pas académique. La mesure du diamètre apparent des étoiles par Michelson, à l'aide de son interféromètre stellaire, reposait sur l'observation de franges qui bougeaient constamment à cause des turbulences atmosphériques. Le succès de l'expérience reposait sur le fait qu'il arrive que le temps de corrélation des fluctuations atmosphériques soit plus long que le temps de réponse de l'œil.

6.6.3 Battement entre deux lasers. Corrélation d'intensité

Considérons l'expérience de la figure 6.13, dans laquelle on combine les faisceaux issus de deux lasers indépendants sur une lame semi-réfléchissante.

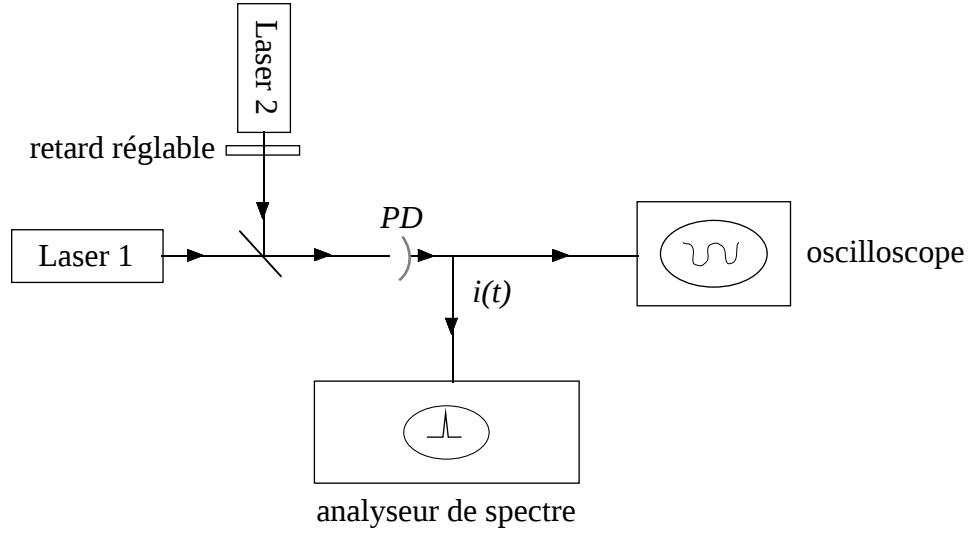


FIG. 6.13: *Battement entre deux lasers. Le courant du photodétecteur peut être soit observé directement sur un oscilloscope, soit analysé en fréquence par un analyseur de spectre.*

Le faisceau résultant tombe sur un photodétecteur qui fournit le courant $i(t)$. Nous nous posons la question de savoir s'il est possible d'observer un terme d'interférence entre les deux lasers. Si les deux fréquences sont différentes, ce terme se traduira par une modulation à la fréquence de battement.

Les deux champs qui s'ajoutent sur le photodétecteur sont

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{T}A_1 e^{i(\phi_1 - \omega_1 t)} \exp\left(i\omega_1 \frac{L_1}{c}\right) \quad (6.154)$$

$$\mathcal{E}_2 = \sqrt{R}A_2 e^{i(\phi_2 - \omega_2 t)} \exp\left(i\omega_2 \frac{L_2}{c}\right) \quad (6.155)$$

Les phases ϕ_1 et ϕ_2 sont des variables aléatoires non-corrélées. De plus, chacune fluctue au cours du temps avec un temps de corrélation τ_{c1} et τ_{c2} .

Le photocourant $i(t)$ vaut

$$\begin{aligned} i(t) &= s I(t) \\ &= 2s[|\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2 + 2\mathcal{R}\{\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2\}] \end{aligned} \quad (6.156)$$

Le terme d'interférence

$$\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 = A_1 A_2 \sqrt{TR} \exp\left[i\frac{\omega_2 L_2 - \omega_1 L_1}{c}\right] e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \quad (6.157)$$

montre comme prévu un terme oscillant à la fréquence de battement. Mais en fait, si on prend la moyenne statistique, on trouve qu'il est nul

$$\langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \rangle = \sqrt{R} \sqrt{T} \exp \left[i \frac{\omega_2 L_2 - \omega_1 L_1}{c} \right] e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \langle e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \rangle = 0 \quad (6.158)$$

et on conclut qu'il n'y a pas de battement, ce qui est contraire à l'observation.

Reprenons maintenant la discussion du paragraphe 6.5.2, en adoptant le point de vue que dans une expérience donnée on a un échantillon donné et non un ensemble statistique. Ici, nous considérons donc $\phi_2 - \phi_1$ comme déterminé, et on s'attend à observer le battement, si le détecteur est assez rapide pour répondre à la fréquence $\omega_1 - \omega_2$ (qui peut par exemple valoir 500 MHz). Le signal de battement peut alors s'observer sans ambiguïté sur un oscilloscope à mémoire, où on capture une trace que l'on peut ensuite observer à loisir, et sur laquelle on peut mesurer la fréquence de battement $\omega_1 - \omega_2$. Ce raisonnement conclut qu'il y a bien des battements observables.

On peut alors se demander s'il existe une grandeur dont la moyenne statistique révélerait l'existence du battement. La réponse est suggérée par une variante de l'expérience où le photocourant est analysé en fréquence par un analyseur de spectre : on s'attend alors à voir un pic à la fréquence $\omega_1 - \omega_2$.

Pour pouvoir décrire, cette expérience, nous devons nous souvenir qu'un analyseur de spectre est fonctionnellement équivalent à un grand nombre de filtres passe-bande étroits juxtaposés en parallèle, suivis de détecteurs de puissance. En utilisant le langage de la partie 6.1, l'analyseur de spectre fournit la *densité spectrale de puissance* $S_i(\Omega)$ du courant $i(t)$.

Or nous savons (théorème de Wiener-Khintchine) que $S_i(\Omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'intensité

$$\Gamma_i(\tau) = \langle i(t)i(t+\tau) \rangle \quad (6.159)$$

Nous avons d'emblée indiqué une moyenne statistique car un analyseur de spectre est un instrument lent, qui effectue une moyenne temporelle longue devant les temps τ_{1c} et τ_{2c} , et on admet qu'il y a ergodisme.

Le calcul de $\Gamma_i(\tau)$ met en jeu la fonction d'autocorrélation de l'intensité lumineuse

$$\Gamma_i(\tau) = s^2 \Gamma_I(\tau) = s^2 \langle I(t)I(t+\tau) \rangle \quad (6.160)$$

On a dans le cas qui nous intéresse

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) + 2\mathcal{E}_1^*(t)\mathcal{E}_2(t) + 2\mathcal{E}_1(t)\mathcal{E}_2^*(t) \quad (6.161)$$

avec

$$I_1(t) = 2TA_1^2 \quad (6.162)$$

$$I_2(t) = 2RA_2^2 \quad (6.163)$$

indépendants du temps. D'autre part, en utilisant (6.157) on a

$$2\mathcal{E}_1^*(t)\mathcal{E}_2(t) = \sqrt{I_1 I_2} \exp \left[i \left(\frac{L_2 - L_1}{c} \right) \right] e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \quad (6.164)$$

Dans le calcul de $\Gamma_I(\tau)$, les termes croisés du type

$$\langle [I_1 + I_2][2\mathcal{E}_1^*(t + \tau)\mathcal{E}_2(t + \tau)] \rangle \propto \langle e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \rangle \quad (6.165)$$

sont nuls. Il en est de même des termes

$$\begin{aligned} & 4\langle \mathcal{E}_1^*(t) \cdot \mathcal{E}_2(t)\mathcal{E}_1^*(t + \tau)\mathcal{E}_2(t + \tau) \rangle \\ & \propto \exp\{i[\phi_2(t) - \phi_1(t) + \phi_2(t + \tau) - \phi_1(t + \tau)]\}. \end{aligned}$$

Par contre, le terme

$$\begin{aligned} & 4\langle \mathcal{E}_1^*(t)\mathcal{E}_2(t)\mathcal{E}_1(t + \tau)\mathcal{E}_2^*(t + \tau) \rangle \\ & = I_1 I_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\tau} \langle \exp\{i[\phi_2(t) - \phi_1(t) - \phi_2(t + \tau) + \phi_1(t + \tau)]\} \rangle \end{aligned} \quad (6.166)$$

n'est pas nul si τ est plus petit que les temps de corrélation τ_{1c} et τ_{2c} . Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \Gamma_I(\tau) &= (I_1 + I_2)^2 + I_1 I_2 [e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\tau} + c.c.] \\ &= (I_1 + I_2)^2 + 2II_1 \cos(\omega_1 - \omega_2)\tau \\ & \quad (\text{si } \tau \ll \tau_{1c}, \tau_{2c}) \end{aligned} \quad (6.167)$$

La transformée de Fourier de $\Gamma_I(\tau)$ possède donc un pic à la fréquence $\omega_1 - \omega_2$ (et naturellement le pic symétrique à $-(\omega_1 - \omega_2)$). L'analyseur de spectre révèle donc le pic de battements.

L'expression (6.166) nous permet de trouver la largeur de ce pic. Suivant le modèle développé dans ce chapitre, nous admettons que les processus aléatoires associés à la phase de chaque laser sont caractérisés par une diffusion de temps de corrélation τ_{c1} et τ_{c2} . Les deux lasers étant indépendants, on a

$$\begin{aligned} & \langle \exp\{i[\phi_2(t) - \phi_2(t + \tau) + \phi_1(t + \tau) - \phi_1(t)]\} \rangle \\ & = \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_{c1}}\right) \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_{c2}}\right) = \exp\left[-\left(\frac{1}{\tau_{c1}} + \frac{1}{\tau_{c2}}\right)|\tau|\right] \end{aligned} \quad (6.168)$$

La transformée de Fourier de cette fonction est une Lorentzienne de largeur $\frac{1}{\tau_{c1}} + \frac{1}{\tau_{c2}}$, ce qui est la somme des largeurs de chaque raie laser. L'analyseur de spectre montre donc un pic à la fréquence de battement, de largeur égale à la somme des largeurs de chaque raie laser (raies Lorentziennes).

En conclusion, la grandeur statistique qui permet de montrer l'existence de battements, est la fonction d'autocorrélation d'intensité qui est en fait une propriété statistique d'ordre 4 du champ lumineux. Cette propriété apparaît naturellement quand on s'intéresse à l'analyse spectrale du photocourant, qui lui-même est une quantité du second ordre.

Remarques

(i) Si au lieu d'avoir un profil Lorentzien les raies spectrales ont un profil gaussien, le battement a pour largeur non pas la somme simple, mais la somme quadratique $(\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2)^{1/2}$ des largeurs.

(ii) Le raisonnement fait ci-dessus se transpose sans difficulté au domaine spatial, dans le cas par exemple de l'interféromètre stellaire de Michelson (remarque du paragraphe 6.5.2). La quantité mathématique qui rend compte de franges spatiales d'interfrange fixé, mais d'origine aléatoire, est la fonction d'autocorrélation spatiale $\Gamma_I(\mathbf{a}) = \langle I(\mathbf{r})I(\mathbf{r} + \mathbf{a}) \rangle$.

6.6.4 Conclusion. Description d'une expérience particulière par des quantités statistiques

Nous avons rencontré ici un exemple des problèmes qui se présentent au physicien qui veut décrire une expérience particulière à l'aide d'un modèle statistique qui ne permet a priori que de calculer des moyennes d'ensemble. En fait, nous avons pu suivre une double démarche.

La première consiste à extraire un échantillon particulier de l'ensemble, en identifiant clairement une quantité aléatoire qui prend une valeur précise dans cet échantillon, et à raisonner sur cet échantillon particulier tout en gardant en tête le fait que la quantité aléatoire peut avoir n'importe quelle valeur. Cette façon de raisonner donne souvent une image intuitive fructueuse des phénomènes. Bien menée, elle peut aussi donner des résultats quantitatifs.

La deuxième méthode consiste au contraire à identifier une grandeur dont la moyenne statistique possède deux propriétés : (i) elle est observable sur un seul échantillon en faisant une moyenne temporelle, à cause de l'ergodisme ; (ii) elle est suffisamment élaborée pour donner l'information pertinente recherchée. En général, cette dernière démarche oblige à considérer des propriétés statistiques d'ordre plus élevé. Elle a l'avantage de donner des résultats plus quantitatifs. Elle est moins intuitive.

Ce type de considérations apparaît aussi en physique quantique, par exemple en théorie quantique de la lumière. C'est par nature même que les prédictions quantiques sont de type statistique. Il arrive alors que l'utilisation de prévisions statistiques pour analyser le comportement d'un échantillon particulier pose problème. On a souvent comme ici la possibilité de suivre deux démarches, mais il faut prendre garde que la démarche du premier type, qui consisterait à donner des propriétés définies à un échantillon particulier d'un ensemble quantique, peut conduire à de graves incohérences (c'est le problème de l'impossibilité d'une description des propriétés quantiques par des « modèles à variables cachées », question longuement débattue entre Einstein et Bohr, et à laquelle John Bell a apporté une réponse définitive). En physique quantique, il est beaucoup plus sûr d'avoir recours à une démarche du second type : la difficulté est alors d'identifier la quantité pertinente, dont la moyenne d'ensemble donne des informations sur une expérience unique.

Chapitre 7

Manipulation d'atomes par laser. De l'optique photonique à l'optique atomique

L'attribution en 1997 du prix Nobel de Physique à Claude Cohen-Tannoudji, William D. Philipps et Steven Chu, pour « le développement de méthodes de refroidissement et piégeage d'atomes par laser »¹, est venue couronner un travail qui en moins de deux décennies a touché à la fois aux aspects fondamentaux de l'interaction lumière-matière, et aux applications. Sur le plan fondamental, l'apparition de ce domaine de recherche à partir des années 1980 a stimulé le développement de diverses méthodes théoriques pour décrire les forces radiatives responsables des effets mécaniques du rayonnement sur le mouvement des atomes. Au niveau expérimental, l'utilisation judicieuse des forces radiatives exercées par des lasers a permis d'observer un amortissement spectaculaire des vitesses atomiques – c'est-à-dire un refroidissement de la vapeur atomique. Ces progrès ont été caractérisés par une remarquable stimulation croisée des avancées expérimentales et théoriques. Les applications n'ont pas tardé à apparaître dans le domaine de la spectroscopie de haute précision, les atomes ultra-froids – c'est-à-dire lents, pouvant être observés plus longtemps. Aujourd'hui l'horloge atomique la plus précise du monde utilise des atomes refroidis par laser ; l'interférométrie atomique permet des mesures d'effets inertiels (par exemple la rotation de la terre) ou gravitationnels (les variations de la pesanteur liées à la composition du sous-sol) avec une précision qui atteint déjà celle des systèmes traditionnels ; la nanolithographie atomique pourrait offrir des solutions élégantes aux problèmes que pose la fabrication de composants microélectroniques toujours plus petits... Mais l'application la plus spectaculaire du refroidissement d'atomes par laser est sans doute d'avoir permis l'émergence d'un domaine de recherche nouveau, celui des condensats de Bose-Einstein gazeux, à son tour couronné par le prix Nobel de E. Cornell, C. Wieman, et W. Ketterle dès 2001². C'est en effet à partir d'échantillons d'atomes refroidis et piégés par laser qu'il a été possible de franchir la dernière étape conduisant à la transition de phase prévue

¹Voir le texte des conférences Nobel dans : Review of Modern Physics, vol. 70, juillet 1998.

²Voir les textes des conférences Nobel dans Review of Modern Physics, vol. 74 (2002).

par Einstein en 1924³, et caractérisée par l'apparition d'une population atomique macroscopique (un grand nombre d'atomes) dans un seul état quantique. Ce phénomène rappelle la transition laser, caractérisée par l'apparition d'un champ macroscopique (un grand nombre de photons) dans un seul mode du champ électromagnétique. L'analogie est si frappante que l'on parle aujourd'hui de « laser à atomes ». On ne pouvait pas rêver d'une meilleure conclusion pour ce cours où l'interaction atome-rayonnement est une source privilégiée d'exemples.

Dans ce chapitre nous mettons l'accent sur les aspects de base de la manipulation d'atomes par laser, qui font appel à toutes nos connaissances sur l'interaction entre un atome (ou une assemblée d'atomes) et la lumière. Absorption, émission stimulée et émission spontanée sont les mécanismes de base des forces radiatives, et on peut donc considérer ce chapitre comme une application des notions mises en place dans les chapitres précédents. L'intérêt des forces radiatives, en tant qu'application de ce cours, est encore accru par le fait que suivant les phénomènes abordés, il est plus facile d'en donner une image physique simple – et le traitement théorique correspondant – dans l'un ou l'autre des modèles de l'interaction lumière-matière que nous avons déjà cités : le modèle semi-classique où la lumière est considérée comme une onde électromagnétique classique, ou le modèle quantique où la lumière est quantifiée et considérée comme formée de photons qui transportent de la quantité de mouvement. Nous partirons du modèle semi-classique, qui est particulièrement fructueux pour introduire deux types de forces radiatives : la pression de radiation résonnante et la force dipolaire. Mais nous verrons que si ce modèle semi-classique donne une image simple et fructueuse de la force dipolaire, c'est le modèle quantique de la lumière qui fournit l'interprétation la plus simple de la pression de radiation résonnante. C'est aussi ce modèle quantique qui est invoqué pour comprendre les limites du refroidissement radiatif : nous verrons en effet que l'émission spontanée, phénomène fondamentalement lié à la quantification du rayonnement, provoque des fluctuations responsables d'un chauffage qui vient limiter la course aux basses températures, à des valeurs déjà spectaculaires puisqu'on est dans la gamme du microKelvin, à 10^{-6} K du zéro absolu. Nous donnerons en conclusion un bref aperçu sur les condensats de Bose-Einstein gazeux et les lasers à atomes.

7.1 Forces radiatives

7.1.1 Atome à deux niveaux dans une onde laser quasi-résonnante

Nous considérons un atome en mouvement dans une onde lumineuse monochromatique

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \vec{\varepsilon} E(\mathbf{r}, t) = \vec{\varepsilon} E_0(\mathbf{r}) \cos[\omega t - \varphi(\mathbf{r})] \quad (7.1)$$

³A. Einstein, « Quanten theorie des einatomigen idealen Gases, Zweite Abhandlung », Preussische Akademic der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, Sitzungsberichte, 1925, p. 3-14. Traduction française dans : Albert Einstein, *Quanta* (Seuil/CNRS, 1989).

quasi-résonnante avec une transition entre l'état fondamental $|a\rangle$ de l'atome d'énergie E_a et un état excité $|b\rangle$ d'énergie E_b ($\hbar\omega_0 = E_b - E_a$) et de durée de vie Γ^{-1} .

Nous décrivons donc l'atome par un modèle à deux niveaux, (cf. chapitre 2, partie 3), et son état est décrit par un vecteur d'état $|\psi\rangle$ caractérisant à la fois son état interne (espace $\mathcal{E}_{\text{int}} = \{|a\rangle, |b\rangle\}$) et son mouvement (espace $\mathcal{E}_{\mathbf{r}}$ des états externes). Cet état se représente donc par un spineur

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_a(\mathbf{r}, t) \\ \psi_b(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

où $\psi_a(\mathbf{r}, t)$ est la fonction d'onde de l'état fondamental, et $\psi_b(\mathbf{r}, t)$ celle de l'état excité. Dans cette représentation, $\mathbf{r}$ est la position de l'atome (plus exactement celle de son centre de masse) et on a donc fait implicitement l'approximation des grandes longueurs d'onde (§ 2.3) dans laquelle on admet que la distance électron-noyau est très petite devant la longueur d'onde du rayonnement. L'atome apparaît donc comme une particule à laquelle on peut associer un opérateur position $\hat{\mathbf{r}}$, et sa complexité interne (noyau, électrons) est totalement prise en compte par l'espace des états internes⁴.

L'évolution de l'atome est gouvernée par l'hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I . \quad (7.3)$$

La quantité $\hat{H}_0$ est l'hamiltonien de l'atome libre

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_0 \end{pmatrix} + \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} \quad (7.4)$$

où la matrice, représentée dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$, agit dans l'espace $\mathcal{E}_{\text{int}}$, tandis que le terme d'énergie cinétique agit dans l'espace $\mathcal{E}_{\mathbf{r}}$ ($\hat{\mathbf{P}}$ est l'opérateur impulsion atomique). L'hamiltonien d'interaction $\hat{H}_I$ s'écrit, dans l'approximation dipolaire électrique

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}, t) , \quad (7.5)$$

où $\hat{\mathbf{r}}$ est l'opérateur position de l'atome, et $\hat{\mathbf{D}}$ est l'opérateur dipolaire électrique dont les composantes, pour un atome à deux niveaux, sont des matrices 2×2 . Pour un champ électrique de polarisation $\vec{\varepsilon}$, nous écrirons la composante $\hat{D}_\varepsilon$

$$\hat{D}_\varepsilon = \hat{\mathbf{D}} \cdot \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & d_\varepsilon \\ d_\varepsilon & 0 \end{pmatrix} , \quad (7.6)$$

⁴Insistons sur le fait que cette modélisation n'implique pas que le mouvement du centre de masse soit décrit par un paquet d'onde quasi ponctuel (voir plus loin). C'est la distance électron-noyau qui est négligeable devant la longueur d'onde, pas la taille de la fonction d'onde décrivant le mouvement du centre de masse.

et pour simplifier nous prenons d_ε réel. L'hamiltonien $\hat{H}_I$ s'écrit, avec ces notations

$$\hat{H}_I = -\hat{D}_\varepsilon E(\hat{\mathbf{r}}, t) . \quad (7.7)$$

L'hamiltonien d'interaction (7.5) agit donc à la fois sur l'état interne et sur l'état externe de l'atome, qui est décrit de façon totalement quantique. En revanche, le rayonnement est traité de façon classique, et seuls les processus d'absorption et d'émission stimulée sont pris en compte. L'émission spontanée est a priori « oubliée » dans cette description, et nous devons la rajouter phénoménologiquement, comme nous l'avons fait au chapitre 2.

7.1.2 Paquet d'onde atomique localisé : limite classique

Il est intéressant de se placer dans la limite classique où le mouvement de l'atome est décrit comme celui d'une particule classique, ayant à chaque instant une position bien déterminée. Nous supposons de plus que cette position est la même pour l'état fondamental et excité, et l'état atomique s'écrit alors

$$|\psi\rangle = |\psi_{\text{int}}\rangle \otimes |\psi_r\rangle = \begin{bmatrix} c_a(t) \\ c_b(t) \end{bmatrix} \psi(\mathbf{r}, t) , \quad (7.8)$$

où $\psi(\mathbf{r}, t)$ est un paquet d'onde d'extension spatiale petite à l'échelle de la longueur d'onde λ de l'onde lumineuse, localisé autour de $\mathbf{r}_{\text{at}}$. Dans ces conditions, la position classique $\mathbf{r}_{\text{at}}$ est évidemment confondue avec la valeur moyenne de l'observable position

$$\mathbf{r}_{\text{at}} = \langle \psi | \hat{\mathbf{r}} | \psi \rangle = \int d^3 r |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \mathbf{r} . \quad (7.9)$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème d'Ehrenfest, qui permet de montrer que la vitesse classique

$$\mathbf{v}_{\text{at}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{\text{at}} \quad (7.10)$$

coïncide avec la moyenne de l'opérateur impulsion $\hat{\mathbf{P}}$ (divisée par la masse M).

Rappelons en effet que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle r_i \rangle &= \frac{1}{i\hbar} \langle [r_i, \mathbf{H}] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [r_i, \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M}] \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \frac{\hat{P}_i}{M} [\hat{r}_i, P_i] \rangle = \frac{\langle \hat{P}_i \rangle}{M} \end{aligned}$$

où i désigne une coordonnée cartésienne. On en déduit

$$\mathbf{v}_{\text{at}} = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\langle \mathbf{P} \rangle}{M} . \quad (7.11)$$

Il est important de bien comprendre la portée de l'approximation classique pour le mouvement de l'atome. Elle ne doit pas être confondue avec l'approximation des grandes longueurs d'onde, qui stipule que la structure *interne* de l'atome (distance noyau-électrons) est petite devant λ , ce qui permet de caractériser la position de l'atome par une seule observable $\hat{r}$ (confondue avec la position du noyau, ou du centre de masse)⁴. Ici, nous supposons en plus que cette fonction d'onde est un paquet d'onde très bien localisé à l'échelle de λ , ce qui permet d'introduire une *position atomique classique*, et donc une trajectoire atomique classique. La validité de cette approximation ne va pas de soi, et une discussion générale sort largement du cadre de cet ouvrage⁵. Nous nous bornerons ici à donner une condition nécessaire importante pour la validité de cette hypothèse.

L'hypothèse d'un paquet d'onde localisé à l'échelle de la longueur d'onde s'écrit

$$\Delta r_i \ll \lambda, \quad (7.12)$$

où Δr_i est l'écart quadratique moyen de la coordonnée r_i de l'atome

$$\begin{aligned} \Delta r_i &= \sqrt{\langle \psi | (\hat{r}_i - r_{\text{at},i})^2 | \psi \rangle} \\ &= \sqrt{\int d^3r (r_i - r_{\text{at},i})^2 |\psi(\mathbf{r}, t)|^2}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Mais on sait que les dispersions en position et en impulsion sont liées par les relations de Heisenberg,

$$\Delta r_i \cdot \Delta P_i \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (7.14)$$

La condition (7.12) implique donc

$$\Delta P_i \gg \frac{\hbar}{2\lambda}. \quad (7.15)$$

Cette expression fait apparaître une quantité dont la signification physique est manifestement importante pour les effets mécaniques de la lumière : il s'agit de

$$\frac{\hbar}{\lambda} = \hbar k \quad (7.16)$$

c'est-à-dire l'impulsion d'un photon de vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$. En divisant par la masse atomique M , on fait apparaître *la vitesse de recul*

$$V_R = \frac{\hbar k}{M} \quad (7.17)$$

qui est typiquement (pour les alcalins) de l'ordre du cm/s, et dont la signification physique est simple : c'est la vitesse d'un atome initialement au repos et qui absorbe ou émet un seul

⁵Voir par exemple : C. COHEN-TANNOUDJI : « Atomic motion in laser light » in « Systèmes fondamentaux en Optique Quantique/Fundamental systems in Quantum Optics », Elsevier (1991) : Cours des Houches, Session LIII, 1990.

photon ; c'est plus généralement le changement de vitesse atomique lors de l'absorption ou de l'émission d'un seul photon.

Revenant à la condition nécessaire (7.15), nous voyons que l'approximation classique pour le mouvement de l'atome nécessite que la dispersion sur la vitesse atomique

$$\Delta V_i = \frac{\Delta P_i}{M} \quad (7.18)$$

soit supérieure à la vitesse de recul V_R . La plupart des mécanismes de refroidissement laser donnent des vitesses d'agitation thermique supérieures à V_R , et dans ce cas une description classique du mouvement atomique est acceptable. Cependant, il arrive que le refroidissement laser conduise à la situation où ΔV est de l'ordre de V_R voire inférieur, et il faut alors revenir à une description quantique du mouvement de l'atome.

Remarque

Rappelons que dans le cadre du modèle semi-classique introduit ici, le concept de photon n'a, en principe, pas sa place. Nous l'introduisons cependant pour donner une interprétation simple du paramètre V_R qui apparaît naturellement dans le calcul.

7.1.3 Force radiative

Plaçons-nous dans le cadre de la limite classique du mouvement atomique (paquet d'onde localisé), et appliquons maintenant le théorème d'Ehrenfest à l'opérateur impulsion. On a

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{\mathbf{P}} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{\mathbf{P}}, \hat{H}] \rangle = \frac{1}{\hbar} \langle [\mathbf{P}, \hat{H}_I] \rangle \quad (7.19)$$

puisque $\hat{\mathbf{P}}$ commute avec $\hat{H}_0$ (Équation (7.4)). Dans $\hat{H}_I$ (Équation (7.7)), $\hat{\mathbf{P}}$ ne commute pas avec $E(\mathbf{r}, t)$, et on a, en représentation $\{\mathbf{r}\}$

$$[\mathbf{P}, E(\hat{\mathbf{r}}, t)] = \frac{\hbar}{i} \nabla \{E(\mathbf{r}, t)\} , \quad (7.20)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{\mathbf{P}} \rangle = \langle \hat{D}_\varepsilon \cdot \nabla \{E(\mathbf{r}, t)\} \rangle . \quad (7.21)$$

En utilisant la factorisation (7.7), on obtient

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{P} \rangle = \langle \psi_{\text{int}} | \hat{D}_\varepsilon | \psi_{\text{int}} \rangle \cdot \langle \psi_r | \nabla \{E(\mathbf{r}, t)\} | \psi_r \rangle . \quad (7.22)$$

Le paquet d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ étant *localisé spatialement* autour de $\mathbf{r}_{\text{at}}$, le deuxième terme vaut tout simplement

$$\int d^3r |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \nabla \{E(\mathbf{r}, t)\} = \nabla \{E(\mathbf{r}, t)\}_{\mathbf{r}_{\text{at}}} \quad (7.23)$$

c'est-à-dire le gradient de $E(\mathbf{r}, t)$ pris en $\mathbf{r}_{\text{at}}$. Finalement, l'équation d'évolution de l'impulsion moyenne s'écrit

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{P} \rangle = \langle \hat{D}_\varepsilon \rangle \nabla \{E(\mathbf{r}, t)\}_{\mathbf{r}_{\text{at}}} . \quad (7.24)$$

Compte tenu de (7.10), l'évolution de la position moyenne $\mathbf{r}_{\text{at}}$ du paquet d'onde classique obéit à l'équation

$$M \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{\text{at}} = \mathbf{F} , \quad (7.25)$$

avec

$$\mathbf{F} = \langle \hat{D}_\varepsilon \rangle \nabla \{E(\mathbf{r}, t)\}_{\mathbf{r}_{\text{at}}} . \quad (7.26)$$

L'équation (7.25) montre que la quantité $\mathbf{F}$ joue le rôle d'une force classique pilotant le mouvement d'une particule classique de masse M et de position $\mathbf{r}_{\text{at}}$.

Pour obtenir l'expression complète de la force $\mathbf{F}$, il faut expliciter la valeur moyenne $\langle \hat{D}_\varepsilon \rangle$ du dipôle quantique au point $\mathbf{r}_{\text{at}}$. Nous allons calculer cette valeur moyenne en admettant que l'état interne de l'atome atteint un régime stationnaire vis-à-vis du champ électrique au point $\mathbf{r}_{\text{at}}$.

Remarque

L'expression (7.26) de la force est identique à celle obtenue pour un dipôle électrique classique, placé en $\mathbf{r}_{\text{at}}$ dans un champ électrique $\vec{\varepsilon} E(\mathbf{r}, t)$, et de composante $\mathcal{D}_\varepsilon = \langle \hat{D}_\varepsilon \rangle$ sur la direction $\vec{\varepsilon}$ du champ électrique.

7.1.4 Force radiative stationnaire pour un atome à deux niveaux fermés

Nous admettons maintenant que l'état interne de l'atome atteint un régime stationnaire au point $\mathbf{r}_{\text{at}}$, sous l'effet du champ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \vec{\varepsilon} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \vec{\varepsilon}^* \mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t) \quad (7.27a)$$

avec

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0(\mathbf{r})}{2} e^{i\varphi(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} . \quad (7.27b)$$

Il s'agit d'un régime d'oscillation forcée à la fréquence ω du champ, et on peut écrire

$$\langle \hat{D}_\varepsilon \rangle = \varepsilon_0 \alpha \mathcal{E} + \text{c.c.} \quad (7.28)$$

où α est la polarisabilité de l'atome. C'est un nombre complexe

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'' \quad (7.29)$$

qui dépend a priori de ω et de E_0 , et qui a la dimension du cube d'une longueur.

En reportant (7.28) dans (7.26), on obtient quatre termes, dont deux oscillent à 2ω et dont les effets sont nuls en moyenne dans le temps. Les deux autres termes n'oscillent pas, et donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \varepsilon_0 \alpha \mathcal{E} \{ \nabla \mathcal{E}^* \}_{\mathbf{r}_{\text{at}}} + \varepsilon_0 \alpha^* \mathcal{E}^* \{ \nabla \mathcal{E} \}_{\mathbf{r}_{\text{at}}} \\ &= \varepsilon_0 \alpha' \frac{E_0}{2} \{ \nabla E_0(\mathbf{r}) \}_{\mathbf{r}_{\text{at}}} + \varepsilon_0 \alpha'' \frac{E_0^2}{2} \{ \nabla \varphi(\mathbf{r}) \}_{\mathbf{r}_{\text{at}}} . \end{aligned} \quad (7.30)$$

La force radiative comporte donc deux contributions. L'une, liée à la partie réelle α' de la polarisabilité (partie réactive de la réponse atomique) dépend du gradient de l'amplitude (ou de l'intensité) de l'onde électromagnétique : on l'appelle « *force dipolaire* ». L'autre, liée à la partie imaginaire α'' de la polarisabilité (partie dissipative de la réponse atomique) dépend du gradient de la phase de l'onde : c'est la « *pression de radiation résonnante* ».

Nous allons calculer explicitement ces deux forces dans le cas d'un atome à deux niveaux fermés (Figure 7.2), particulièrement important dans le cas des forces radiatives, comme nous le discuterons brièvement plus loin. Nous avons donné au complément 2.B, la réponse diélectrique d'un atome à deux niveaux fermés pour une excitation quasi-résonnante ($|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$). On l'obtient en cherchant la solution forcée des équations de Bloch optiques. Ce calcul donne la polarisabilité complexe

$$\alpha = \frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega_0 - \omega + i\Gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Omega_1^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}} . \quad (7.31)$$

On peut récrire cette expression comme le produit de la polarisabilité linéaire, indépendant de l'intensité de l'onde (proportionnelle à Ω_1^2), par un terme de saturation qui tend vers 0 grande intensité

$$\alpha = \frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega_0 - \omega + i\Gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4} \frac{1}{1 + s} . \quad (7.32)$$

Le paramètre de saturation s , que nous avons déjà rencontré au chapitre 2, vaut

$$s = \frac{\Omega_1^2/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4} = \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma} \right)^2} \quad (7.33)$$

et on rappelle que son effet peut-être calculé à partir d'équations cinétiques décrivant l'absorption, l'émission stimulée, et l'émission spontanée.

L'importance des systèmes à deux niveaux fermés tient au fait que les forces radiatives ont un effet important à condition d'agir suffisamment longtemps, pendant un temps beaucoup plus long que le temps de relaxation Γ^{-1} des variables internes. Si le système des deux niveaux $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ est ouvert, l'atome pourra retomber dans un niveau autre que $|a\rangle$, où les forces radiatives seront beaucoup plus faibles, par exemple parce que le désaccord $\omega - \omega'_0$ sera très grand. Au contraire, pour un système à deux niveaux fermés, les forces radiatives gardent leur valeur tant que le rayonnement est appliqué. Nous allons

donc étudier quelques caractéristiques des forces radiatives dans ce cas très important en pratique, même si verrons plus loin quelques situations où la mise en jeu de niveaux supplémentaires apporte des phénomènes nouveaux.

Remarques

(i) Il faut se souvenir que l'expression (7.28) de la force n'est valable que si le dipôle atomique $\langle \mathbf{D} \rangle$ a atteint le régime d'oscillation forcée au point $\mathbf{r}_{\text{at}}$. Dans le cas d'un atome en mouvement, il arrive fréquemment que cette hypothèse ne soit pas satisfaite. Il faut alors revenir à l'expression (7.24) et on trouve alors généralement que la force dépend de la vitesse atomique.

(ii) Le calcul de la force radiative présentée ci-dessus comporte plusieurs éléments classiques qu'il convient de ne pas confondre. D'une part le champ électromagnétique est classique, et on ne prend pas l'effet sur le mouvement des phénomènes d'émission spontanée, dont nous verrons plus loin qu'ils conduisent en fait à une dispersion statistique du mouvement des divers atomes. La quantité $\mathbf{F}$ apparaît alors comme une force moyenne au sens statistique. D'autre part on a une vision classique du mouvement de l'atome décrit par un paquet d'onde quasi-ponctuel. Dans le cas où cette dernière hypothèse n'est pas vraie, on peut néanmoins utiliser les résultats ci-dessus en se souvenant qu'ils permettent de décrire le mouvement de la moyenne quantique de la position atomique, c'est-à-dire du barycentre du paquet d'onde. En ce sens, on peut considérer $\mathbf{F}$ comme une force moyenne, au sens quantique.

7.1.5 Pression de radiation résonnante

Considérons le cas d'une onde plane progressive

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \quad (7.34)$$

d'amplitude E_0 constante, et de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| = \omega/c$). Comme le montre l'expression (7.28), la force dipolaire est alors nulle, et la seule force radiative est la pression de radiation résonnante

$$\mathbf{F}_1 = \varepsilon_0 \alpha'' \frac{E_0^2}{2} \mathbf{k} . \quad (7.35)$$

Cette force est dirigée suivant la direction de propagation $\mathbf{k}$ de l'onde. En utilisant l'expression (7.28) de la polarisabilité d'un atome à deux niveaux fermés, $\mathbf{F}_1$ s'écrit

$$\mathbf{F}_1 = \frac{d^2}{2\hbar} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Omega_1^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{E_0^2}{2} \mathbf{k} \quad (7.36)$$

On obtient une expression plus simple en se souvenant que la pulsation de Rabi Ω_1 vaut $-dE_0/\hbar$ (cf. § II.C.1) :

$$\mathbf{F}_1 = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{\Omega_1^2/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Omega_1^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}} = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad (7.37)$$

(on a utilisé l'expression (7.33) du paramètre de saturation).

La formule (7.37) montre que la pression de radiation présente une résonnance (Lorentzienne) autour de la fréquence atomique ω_0 . Cette résonnance est étroite, de l'ordre de la largeur de raie atomique Γ , et on comprend qu'il soit nécessaire d'utiliser un laser, de largeur de raie inférieure à Γ , pour observer un effet important. Dans le cas contraire, la puissance lumineuse est « diluée » sur une bande de fréquence grande devant Γ , et la force est faible.

La formule (7.37) montre qu'à faible paramètre de saturation ($s \ll 1$), la pression de radiation est proportionnelle à l'intensité lumineuse. Mais à forte intensité, cette force sature, et ne peut dépasser la valeur maximale

$$\mathbf{F}_1^{\max} = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma}{2}. \quad (7.38)$$

Cette force maximale est en fait très importante, comme on peut s'en rendre compte en calculant l'accélération subie par un atome soumis à $\mathbf{F}_1^{\max}$:

$$\gamma_{\max} = \frac{F_1^{\max}}{M} = \frac{\Gamma \hbar k}{2 M} = \frac{\Gamma}{2} V_R. \quad (7.39)$$

Pour une vitesse de recul typique de $2.9 \times 10^{-2} \text{ms}^{-1}$, et une largeur de raie radiative Γ de $4 \times 10^7 \text{s}^{-1}$ (cas de la raie de résonance à $0.5890 \mu\text{m}$ du sodium), l'accélération maximale vaut

$$\gamma_{\max} \simeq 5.9 \times 10^5 \text{ m s}^{-2}$$

soit 6×10^4 fois l'accélération de la pesanteur !

De telles valeurs de l'accélération sont relativement faciles à atteindre avec un laser. À résonnance, il suffit d'une intensité laser égale à I_{sat} (typiquement quelques mW par cm^2) pour avoir une accélération égale à $\gamma_{\max}/2$. On peut ainsi arrêter les atomes d'un jet thermique, de vitesse typique 300 m/s^{-1} , sur une distance inférieure à 1 m , à condition d'être capable de garder l'atome à résonnance avec le laser lors de la décélération (qui change le décalage Doppler). Le succès de telles expériences, au début des années 1980, a ouvert le domaine du contrôle du mouvement des atomes par laser (Figure 7.1).

Le calcul qui nous a conduit à l'expression (7.37) de la pression de radiation résonnante est basé sur un modèle classique de la lumière, où le concept de photon n'a pas sa place. Pourtant, on voit apparaître la valeur $\hbar \mathbf{k}$ de l'impulsion des photons associés à l'onde lumineuse qui exerce la pression de radiation, et il est tentant de chercher à réinterpréter l'expression de la force $\mathbf{F}_1$ en terme d'échanges d'impulsion entre photons et atomes. Pour cela, on peut remarquer que la quantité

$$\mathcal{N} = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad (7.40)$$

n'est autre que le nombre de cycles de fluorescence (absorption et réémission spontanée) par seconde. On le montre à partir des équations de Bloch optiques, mais ce résultat peut s'obtenir beaucoup plus simplement (mais moins rigoureusement à partir d'équations cinétiques écrites pour un système à deux niveaux fermés (Figure 7.2). En notant π_a et π_b

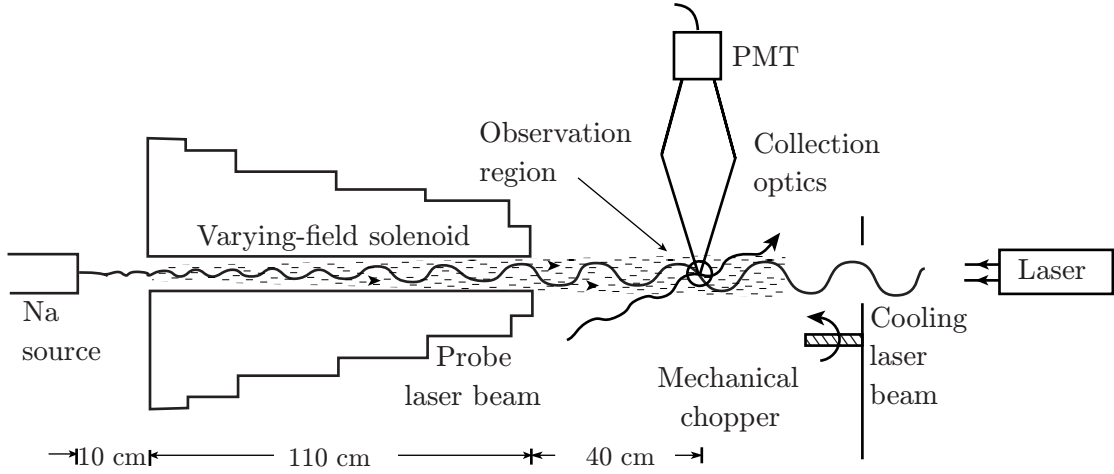


FIG. 7.1: *Ralentissement et arrêt par pression de radiation résonnante des atomes d'un jet de sodium, éclairé à contre courant par un laser résonnant (d'après Prodan, Phillips et Metcalf). Le solénoïde produit un champs magnétique variable dans l'espace, qui provoque par effet Zeeman un déplacement de la résonance atomique ω_0 dépendant de la position. Pour un profil de champ judicieusement choisi, la variation de résonance atomique compense exactement la variation d'effet Doppler due au ralentissement, et les atomes restent à résonance durant tout le ralentissement qui est ainsi très efficace.*

les populations (probabilités de présence) dans les niveaux a et b , et en utilisant les taux $\Gamma s/2$ pour l'absorption et l'émission stimulée, et Γ pour la réémission « spontanée », les équations cinétiques décrivant l'évolution de π_a et π_b sont (cf. Partie 7.2.4)

$$\frac{d\pi_b}{dt} = -\frac{d\pi_a}{dt} = \Gamma \frac{s}{2} \pi_a - \Gamma \frac{s}{2} \pi_b - \Gamma \pi_b. \quad (7.41)$$

Compte tenu de $\pi_a + \pi_b = 1$, la solution stationnaire est

$$\pi_b = \frac{1}{2} \frac{s}{s + 1}. \quad (7.42)$$

Le nombre de cycles de fluorescence par seconde est égal au nombre de réémissions spontanées par seconde

$$\mathcal{N} = \Gamma \pi_b = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1 + s}, \quad (7.43)$$

ce qui est l'expression (7.40). Dans cette formule, s est le paramètre de saturation introduit plus haut.

Compte-tenu de (7.40), l'expression (7.37) de la force peut se récrire

$$\mathbf{F}_1 = \hbar \mathbf{k} \mathcal{N}, \quad (7.44)$$

formule facile à interpréter en effectuant un bilan des échanges d'impulsions entre l'atome et les photons au cours de chaque cycle de fluorescence (Figure 7.3). En effet, au cours

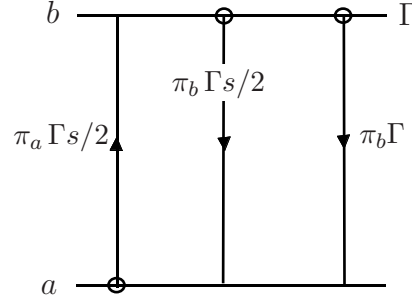


FIG. 7.2: Processus d'absorption, émission induite, émission spontanée pour un système à deux niveaux fermés $\{a, b\}$. On a indiqué les taux de transition pour une onde de paramètre de saturation s . Pour un système à deux niveaux fermés, le niveau b ne peut se désexciter que vers le niveau stable a , et on a $\pi_a + \pi_b = 1$ (il n'y a pas d'autre état accessible).

d'un cycle élémentaire, un photon laser disparaît, et son impulsion $\hbar \mathbf{k}$ est communiquée à l'atome, tandis qu'un photon diffusé apparaît, d'impulsion $\hbar \mathbf{k}_{\text{diff}}$. La variation d'impulsion atomique pendant un cycle de fluorescence est donc

$$\Delta \mathbf{P}_{\text{cycle}} = \hbar \mathbf{k} - \hbar \mathbf{k}_{\text{diff}} . \quad (7.45)$$

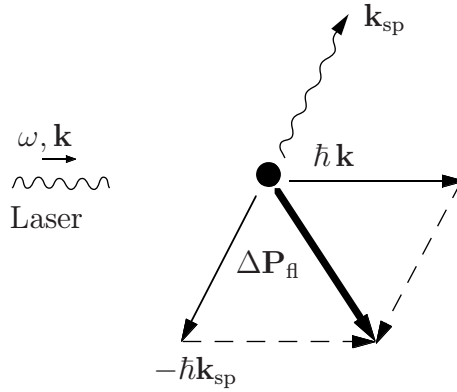


FIG. 7.3: Échanges d'impulsions entre l'atome et les photons dans un cycle de fluorescence élémentaire. Si ce cycle est répété un grand nombre de fois, le recul $-\hbar \mathbf{k}_{\text{sp}}$ dû au photon diffusé se moyenne à 0, et l'impulsion reçue par l'atome est dirigée suivant le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ du laser.

Lorsque le processus se répète, le terme $\hbar \mathbf{k}$ associé au photon laser incident est le même à chaque cycle, mais la direction du photon diffusé est aléatoire, avec un diagramme de rayonnement symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. En moyenne sur un grand nombre de cycles de fluorescence, on a donc

$$\langle \mathbf{k}_{\text{diff}} \rangle = 0 \quad (7.46)$$

d'où une variation d'impulsion atomique moyenne par cycle

$$\langle \Delta \mathbf{P}_{\text{cycle}} \rangle = \hbar \mathbf{k} . \quad (7.47)$$

La variation d'impulsion atomique moyenne par seconde vaut donc

$$\left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{at}} \right\rangle = \mathcal{N} \hbar \mathbf{k} \quad (7.48)$$

ce qui est identique à l'expression (7.37) de la force $\mathbf{F}_1$, que nous avons donc interprétée à partir des échanges d'impulsion entre photons laser et atomes.

Remarque

Nous ne tenons pas compte des cycles absorption/émission stimulée. En effet, dans le cas d'une seule onde plane, le transfert global d'impulsion est nul dans un tel cycle, puisque

$$\Delta \mathbf{P}_{\text{sti}} = -\Delta \mathbf{P}_{\text{abs}} = \hbar \mathbf{k} . \quad (7.49)$$

7.1.6 Force dipolaire

Considérons maintenant un champ laser dont l'amplitude $E_0(\mathbf{r})$ n'est pas uniforme. Par exemple, on prend en compte le profil gaussien

$$E_0(x, y) = A_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \quad (7.50a)$$

d'un faisceau se propageant suivant $\mathbf{Oz}$. Son amplitude complexe vaut

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{A_0}{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} e^{ikz} e^{-i\omega t} . \quad (7.50b)$$

Dans ce cas, le premier terme de (7.30) donne une contribution non nulle : c'est la force dipolaire

$$\mathbf{F}_2 = \varepsilon_0 \alpha' \frac{E_0}{2} \cdot \nabla E_0 = \varepsilon_0 \frac{\alpha'}{4} \nabla (E_0^2) . \quad (7.51)$$

À partir de l'expression (7.31) de la polarisabilité, on obtient

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\hbar(\omega_0 - \omega)}{2} \frac{\nabla(\Omega_1^2/2)}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Omega_1^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (7.52)$$

(On a ici encore utilisé la définition $-d \cdot E_0(\mathbf{r}) = \hbar \Omega_1(\mathbf{r})$ de la pulsation de Rabi).

La force dipolaire est donc proportionnelle au gradient de l'intensité lumineuse

$$I = \frac{2\Omega_1^2}{\Gamma^2} I_{\text{sat}} . \quad (7.53)$$

Pour un désaccord négatif ($\omega < \omega_0$) les atomes sont attirés vers les régions de forte intensité, alors qu'ils en sont expulsés si le désaccord est positif ($\omega > \omega_0$).

En intégrant l'expression (7.52), on constate que la force dipolaire $\mathbf{F}_2$ dérive d'un potentiel

$$\mathbf{F}_2 = -\nabla U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \quad (7.54)$$

avec

$$\begin{aligned} U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) &= \frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{2} \log \left[1 + \frac{\Omega_1^2(\mathbf{r})/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2/4} \right] \\ &= \frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{2} \log[1 + s(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (7.55)$$

(le choix de la constante d'intégration donne un potentiel nul hors du faisceau laser). Cette propriété est très importante : elle suggère qu'il est possible de piéger des atomes au point de focalisation d'un faisceau laser désaccordé négativement ($\omega < \omega_0$). En effet, en ce point, le paramètre de saturation possède un maximum s_{max} , et le potentiel présente un minimum (Figure 7.4). Les atomes sont donc soumis à un puits de potentiel de profondeur

$$\Delta U = \frac{\hbar|\omega - \omega_0|}{2} \log(1 + s_{\text{max}})$$

d'autant plus grande que l'intensité maximale est plus forte. Ils y sont piégés à condition d'avoir une énergie cinétique inférieure à la profondeur de ce puits. En pratique, avec les lasers courants, il est difficile de créer des puits de potentiel capables de piéger des atomes de température très supérieure à quelques centaines de milliKelvins, et il faut donc refroidir les atomes avec les méthodes décrites à la partie 7.2 pour pouvoir les piéger. Avec des atomes suffisamment froids, de tels pièges sont très utilisés. Notons qu'il est facile de déplacer le point de focalisation du laser, et donc les atomes. Ce dispositif est appelé « pince optique » (« optical tweezer »).

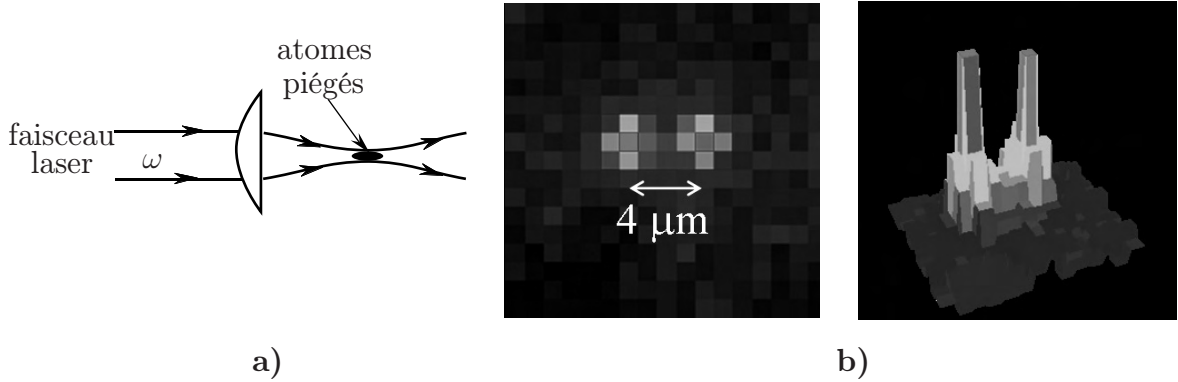


FIG. 7.4: **a)** Piégeage d'atomes attirés dans la zone de focalisation d'un laser désaccordé négativement ($\omega < \omega_0$) : le potentiel dipolaire attractif permet de piéger les atomes à condition qu'ils aient une énergie cinétique suffisamment faible ; **b)** à l'aide de deux faisceaux fortement focalisés en des points voisins, on peut disposer deux atomes côte à côte : les atomes sont observables par la lumière qu'ils diffusent (figure P. Grangier, Institut d'Optique Théorique et Appliquée).

La force dipolaire joue un rôle important en optique atomique. Elle est à la base de dispositifs qui permettent de réfléchir les atomes (miroirs atomiques), de les focaliser (lentilles atomiques), de les diffracter (réseaux de diffraction atomiques). En réalisant une

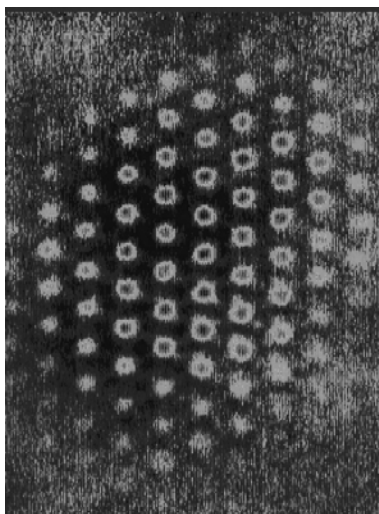


FIG. 7.5: Atomes ultra froids localisés dans un réseau de micropièges dipolaires, distants de $10\,\mu\text{m}$ environ, réalisés avec des faisceaux laser désaccordés vers les basses fréquences ($\omega < \omega_0$). Les atomes sont observés grâce à l'absorption de lumière résonnante.

onde stationnaire à 3 dimensions, on crée un réseau périodique de micropièges où les atomes peuvent se localiser, comme les électrons dans un isolant de Mott (Figure 7.5).

Le calcul de la force dipolaire a été fait à partir de l'approche semi-classique, où elle peut s'interpréter comme résultant de l'interaction entre le champ électrique de la lumière et le dipôle atomique qu'il induit dans l'atome. On peut se demander si, comme la pression de radiation résonnante, on peut lui donner une autre interprétation en terme d'échanges d'impulsion entre photons et atomes. La réponse est positive mais assez compliquée. Il faut considérer au moins deux ondes planes de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$, et s'intéresser à des cycles mettant en jeu l'absorption d'un photon dans une onde (par exemple l'onde 1) suivie d'une émission stimulée dans l'onde 2 (voir la Figure 7.6). Ce qui rend cette interprétation délicate est le fait qu'on pourrait considérer le processus inverse (absorption dans l'onde 2 suivie d'une émission stimulée dans l'onde 1) ce qui conduirait à une force de signe opposé. On peut montrer que ce qui privilégie un processus par rapport à l'autre est la phase relative des deux ondes 1 et 2 au point où se trouve l'atome. Il est facile de vérifier que cette phase relative contrôle également le signe du gradient de l'intensité résultant de l'interférence entre les deux ondes, ce qui établit la correspondance avec le modèle semi-classique. Mais il faut bien constater que l'interprétation en terme de photons est ici difficile à manier, au contraire de l'image issue du modèle semi-classique qui repose sur le fait bien connu qu'un dipôle placé dans un champ inhomogène subit une force suivant le gradient de ce champ (le signe change suivant que ω est inférieur ou supérieur à ω_0 car dans le premier cas le dipôle est en phase avec le champ, et dans le second il est en opposition de phase).

Nous retrouvons ici encore un exemple de l'intérêt de disposer de divers modèles de l'interaction atome-rayonnement. Le modèle semi-classique, dans lequel le champ électromagnétique classique interagit avec le dipôle atomique donne une image simple de la

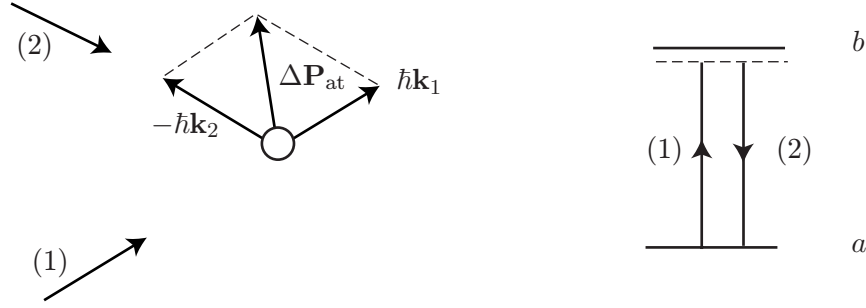


FIG. 7.6: *Interprétation de la force dipolaire en terme de redistribution de photons entre l'onde 1 (absorption) et l'onde 2 (émission stimulée). Au cours d'un cycle élémentaire, l'atome reçoit une impulsion atomique $\hbar(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$.*

force dipolaire. Mais c'est la description quantique de la lumière, en terme de photons possédant une quantité de mouvement, qui donne l'image la plus simple de la pression de radiation résonnante. Au-delà de sa simplicité, nous verrons que cette dernière image suggère l'existence d'un processus de chauffage qui viendra limiter l'abaissement de température obtenu par le refroidissement par « mélasse Doppler » que nous décrivons plus loin.

Remarques

(i) A priori, dans une onde inhomogène comme par exemple sur la figure 7.4, les deux forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont à l'œuvre. Il est intéressant d'identifier les paramètres qui privilégient l'une ou l'autre de ces forces. Pour comparer les expressions (7.37) et (7.52) des forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, nous considérons le cas où l'intensité lumineuse varie de façon notable à l'échelle de la longueur d'onde. Dans ce cas, ∇ est de l'ordre de k , et

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_2|} \simeq \frac{\Gamma}{|\omega_0 - \omega|}.$$

À faible désaccord ($|\omega - \omega_0| \ll \Gamma$), c'est la pression de radiation résonnante qui est la plus grande, tandis qu'à fort désaccord, la force dipolaire domine.

Lorsqu'on compare l'effet des forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, il faut également se souvenir que $\mathbf{F}_2$ dérive d'un potentiel, alors que ce n'est pas le cas pour $\mathbf{F}_1$.

(ii) Le fait que la force dipolaire $\mathbf{F}_2$ dérive d'un potentiel est la conséquence des calculs dans lesquels on a supposé que le dipôle atomique atteint un régime stationnaire sous l'effet du champ $\mathcal{E}(\mathbf{r}_{\text{at}})$. Pour un atome en mouvement, il arrive souvent que cette hypothèse ne soit pas vérifiée, et que le dipôle soit en retard par rapport au champ, d'une quantité qui dépend de la vitesse atomique. On trouve alors que la force dépend de la vitesse, et elle n'est évidemment plus conservative.

(iii) Dans la limite des très grands désaccords ($|\delta| \gg \Gamma, \Omega_1$), le potentiel dipolaire (7.55) prend la valeur

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\hbar \Omega_1^2(\mathbf{r})}{4(\omega - \omega_0)} \quad (7.56)$$

qui coïncide avec le déplacement lumineux du niveau fondamental a sous l'effet de l'onde laser (cf. § 2.3.4). L'interprétation est claire : dans ce régime, il y a très peu de cycles de

fluorescence (cf. la remarque (i) ci-dessus), et l'atome est presque toujours dans l'état fondamental a , dont le déplacement se confond avec le potentiel dipolaire.

Cette remarque suggère que le potentiel dipolaire n'est autre que la moyenne des déplacements lumineux des niveaux a et b , pondérés par les probabilités de présence dans chacun des deux niveaux. On peut montrer qu'il en est effectivement ainsi⁶.

7.2 Refroidissement d'atomes par laser⁷

7.2.1 Refroidissement Doppler

Considérons un atome à 2 niveaux, placé dans deux ondes laser contre-propageantes, de même fréquence ω , légèrement inférieure à la fréquence atomique ω_0 (Figure 7.7). On note

$$\delta = \omega - \omega_0 \quad (7.57)$$

le désaccord à résonance

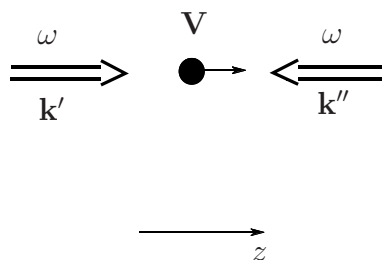


FIG. 7.7: Refroidissement Doppler à 1 dimension. L'atome est placé dans 2 ondes contre-propageantes ($\mathbf{k}'' = -\mathbf{k}'$) de même fréquence ω , inférieure à la fréquence atomique ω_0 , et de même intensité. Un atome en mouvement « voit » l'onde qui s'oppose à son mouvement se rapprocher de résonance : c'est donc elle qui domine, et le mouvement de l'atome est freiné.

Ces deux ondes forment une onde stationnaire, et a priori (cf. équation (7.30)) on pourrait penser que la pression de radiation $\mathbf{F}_1$ est nulle puisque la phase est constante, et que l'atome n'est soumis qu'à la force dipolaire résultant des variations spatiales d'intensité associées aux nœuds et ventres de l'onde stationnaire. En fait, pour un atome en mouvement, les variations d'intensité lumineuse sont tellement rapides que l'état interne n'atteint jamais le régime stationnaire, et les résultats de la partie 7.1 ne sont pas utilisables sans précaution. Il faut en principe revenir aux Équations de Bloch Optiques pour calculer l'état interne compte tenu du mouvement, et en déduire la force radiative. On

⁶Voir CDG2, chapitre VI.

⁷Voir par exemple : « Le refroidissement d'atomes par laser », A. Aspect et J. Dalibard, La Recherche **25**, 31 (janvier 1994).

montre alors que, pour un paramètre de saturation petit devant 1, il est possible de négliger les cohérences entre l'onde $\mathbf{k}'$ et l'onde $\mathbf{k}''$: on peut alors considérer séparément les forces dues aux deux ondes planes contrepropageantes, et ajouter simplement les pressions de radiation résonnantes exercées par ces deux ondes. On obtient ainsi la force radiative $\mathbf{F}$ moyennée au cours du mouvement de l'atome.

Calculons les pressions de radiation exercées par chacune des deux ondes, de même intensité petite devant I_{sat} (Ω_1 petit devant Γ). On a

$$\mathbf{F}' = \hbar \mathbf{k}' \frac{\Gamma}{2} s' \quad (7.58)$$

avec

$$s' = \frac{\Omega_1^2/2}{(\delta - kV)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \frac{s_0}{1 + 4 \left(\frac{\delta - kV}{\Gamma} \right)^2} \quad (7.59)$$

et

$$s_0 = \frac{2\Omega_1^2}{\Gamma^2} = \frac{I}{I_{\text{sat}}} . \quad (7.60)$$

On a tenu compte de l'effet Doppler : V est la valeur algébrique de la vitesse comptée suivant $\mathbf{k}'$ ($|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}''| = k = \omega/c$).

De même, pour la deuxième onde ($\mathbf{k}'' = -\mathbf{k}'$)

$$\mathbf{F}'' = \hbar \mathbf{k}'' \frac{\Gamma}{2} s'' \quad (7.61)$$

avec

$$s'' = \frac{s_0}{1 + 4 \left(\frac{\delta + kV}{\Gamma} \right)^2} . \quad (7.62)$$

On note que l'effet Doppler est de signe opposé à celui de la première onde.

La somme des deux forces $\mathbf{F}'$ et $\mathbf{F}''$ a pour valeur algébrique suivant Oz

$$F = \hbar k \frac{\Gamma}{2} s_0 \left[\frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\delta - kV}{\Gamma} \right)^2} - \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\delta + kV}{\Gamma} \right)^2} \right] . \quad (7.63)$$

La figure 7.8 montre cette force en fonction de la vitesse pour un désaccord δ négatif ($\delta = -\Gamma/2$). On constate que cette force a toujours un signe opposé à la vitesse : quel que soit son sens de déplacement, l'atome est freiné. La raison est évidemment que l'effet Doppler rapproche de résonance, dans le référentiel de l'atome, l'onde qui s'oppose au mouvement de l'atome, et dont la pression de radiation va être prépondérante (figure 7.7).

Une telle force est une force de friction : elle amortit l'ensemble des vitesses d'une assemblée d'atomes, dont la température décroît. Ce phénomène s'appelle « refroidissement Doppler ». Appliqué à des atomes préalablement « arrêtés » (voir figure 7.1), c'est-à-dire en fait amenés à des vitesses assez petites pour être dans la plage de capture de la friction, le refroidissement Doppler conduit à des températures inférieures au milliKelvin, comme nous allons le montrer dans les paragraphes suivants.

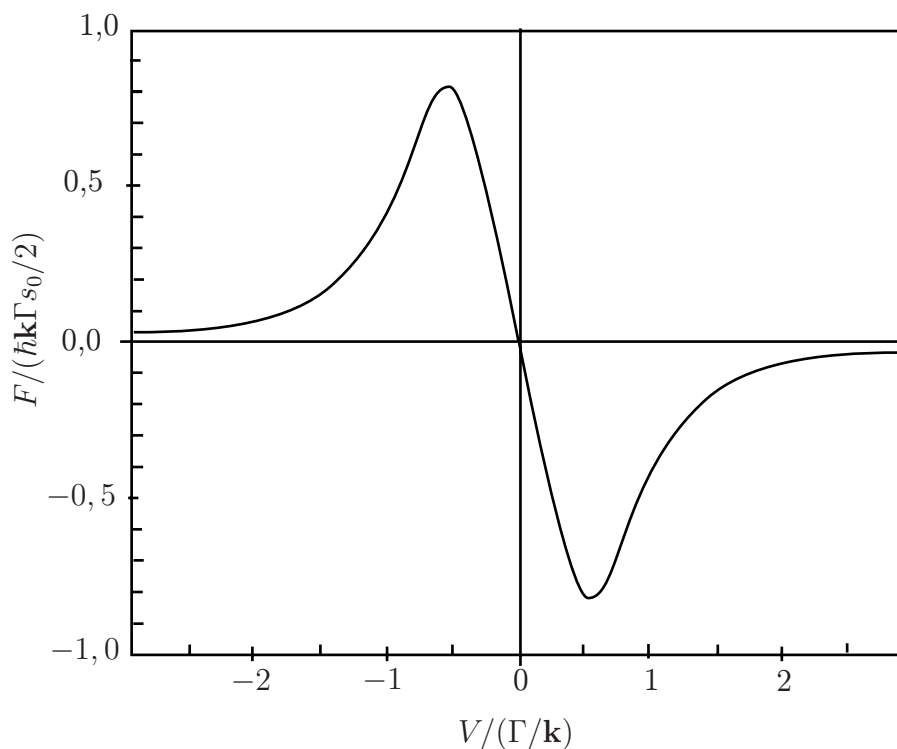


FIG. 7.8: Refroidissement Doppler. On a tracé la force de l'équation (7.63), en unités réduites ($s_0 \hbar k \Gamma / 2$), et pour $\delta = -\Gamma/2$. La force radiative totale est toujours opposée au mouvement de l'atome. Une assemblée d'atomes ayant des vitesses initiales de dispersion de l'ordre de Γ/k est refroidie très efficacement.

7.2.2 Coefficient de friction. Mélasse Doppler

Le développement limité de la force totale F_z (7.63) autour de $V_z = 0$ donne

$$F_z = -\gamma V_z \quad (7.64)$$

où

$$\gamma = 8\hbar k^2 s_0 \frac{\left(-\frac{\delta}{\Gamma}\right)}{\left(1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2}\right)^2} \quad (7.65)$$

est le coefficient de friction, positif si $\delta < 0$. La quantité γ/M est l'inverse du temps d'amortissement à $1/e$ de la vitesse, puisque

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{\gamma}{M} V_z. \quad (7.66)$$

Si maintenant l'atome est placé dans 3 paires d'ondes contrepropageantes, mutuellement orthogonales (Figure 7.9), les 3 composantes de la vitesse sont amorties : l'atome est freiné quelle que soit sa vitesse. Dans le cadre de l'hypothèse de faible saturation s_0 ,

le calcul ci-dessus se généralise immédiatement et on peut écrire

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\gamma}{M}\mathbf{V} \quad (7.67)$$

le coefficient γ ayant la valeur (7.65), si les 6 ondes ont mêmes intensité et désaccord. Le coefficient de friction γ est maximal pour $\delta = -\frac{\Gamma}{2}$, et prend la valeur

$$\gamma_{\max} = s_0 \hbar k^2 . \quad (7.68)$$

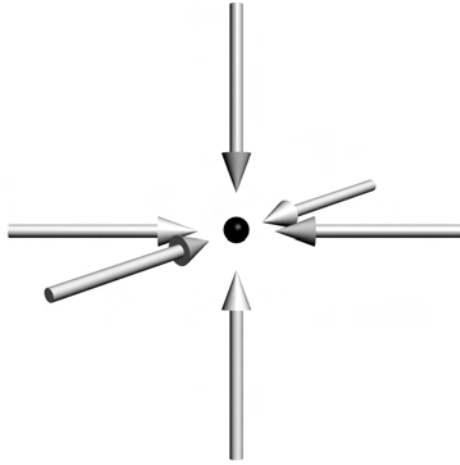


FIG. 7.9: *Mélasse optique à 3 dimensions. L'atome, placé dans 3 paires d'ondes contrepropagantes suivant 3 axes orthogonaux, voit sa vitesse amortie très rapidement (temps d'amortissement inférieur à la milliseconde).*

Pour les alcalins, $\hbar k^2/M$ vaut typiquement quelques 10^4 s^{-1} et, pour s_0 de l'ordre de 0,1 (rappelons que notre calcul suppose que l'on est non saturant), le temps d'amortissement des vitesses M/γ (équation (7.67)) est inférieur à la milliseconde. Les atomes sont littéralement « englués » dans un « milieu » extrêmement visqueux : pour cette raison, une telle configuration a été baptisée « mélasse optique » par S. Chu, qui a le premier montré cet effet.

Notons que la plage de linéarité de la force de friction en fonction de la vitesse est de l'ordre de Γ/k . Plus généralement, si la vitesse est très supérieure à $-\delta/k$, que l'on appelle aussi vitesse de capture, la friction est négligeable. La vitesse de capture vaut typiquement de 1 à 10 m/s. Elle est très petite devant les vitesses atomiques thermiques à température ambiante (plusieurs centaines de mètres par seconde). En revanche, les atomes d'un jet atomique ralenti et arrêté par pression de radiation résonnante ont des vitesses résiduelles de quelques mètres par seconde. Placés dans une mélasse optique, ils voient leurs vitesses très vite amorties, et la vapeur atomique est refroidie. En effet, la puissance moyenne (au sens statistique) fournie à chaque atome par la force de friction vaut :

$$\left[\frac{dW}{dt} \right]_{\text{fr}} = \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \rangle = -\gamma \langle \mathbf{V}^2 \rangle . \quad (7.69)$$

Les crochets $\langle \rangle$ indiquent ici une *moyenne statistique* sur l'ensemble des atomes de l'échantillon. La puissance moyenne (7.69) étant négative si γ est positif, l'échantillon est refroidi. Ce refroidissement va être limité par des phénomènes de chauffage que nous présentons ci-dessous.

7.2.3 Fluctuations. Chauffage

Le raisonnement qui nous a conduit à l'expression (7.26) de la force radiative est basé sur un modèle classique du champ électromagnétique, considéré comme une onde électromagnétique d'amplitude et de phase parfaitement définies. En fait, on sait que le champ doit être quantifié, et le champ classique (7.1) peut être considéré comme la valeur moyenne quantique de l'opérateur champ, pour un état correspondant à l'onde monochromatique considérée. Les observables associées au champ quantique ont en fait des fluctuations, dont on peut souvent donner des images physiques simples. Par exemple, les fluctuations d'intensité peuvent être associées à une description en termes de photons, distribués suivant une loi de Poisson pour une onde laser.

Lorsqu'on prend en compte la nature quantique du champ, la force radiative elle-même apparaît comme une observable quantique, dont la force $\mathbf{F}$ donnée en (7.26) est la valeur moyenne quantique, prise sur l'état du champ et des atomes. Cette force a des fluctuations autour de sa valeur moyenne, et les trajectoires atomiques vont être dispersées autour de la trajectoire moyenne obtenue à partir de la force moyenne. Cela implique en particulier que les vitesses atomiques sont dispersées autour de la vitesse moyenne. Mais une dispersion de vitesse correspond à une énergie cinétique d'agitation, dans le référentiel lié à la vitesse moyenne

$$W = \frac{1}{2} M \langle [(\mathbf{V} - \langle \mathbf{V} \rangle)]^2 \rangle . \quad (7.70)$$

À cette énergie cinétique d'agitation, on peut associer une température (si la distribution des vitesses est gaussienne) par la relation, écrite pour chaque direction i :

$$\frac{1}{2} k_B T_i = \frac{1}{2} M \langle (V_i - \langle V_i \rangle)^2 \rangle . \quad (7.71)$$

Comme nous allons le voir ci-dessous, cette température a tendance à augmenter, et on a donc un effet de chauffage, qui entre en compétition avec le refroidissement, pour aboutir à une température d'équilibre. Nous allons évaluer ce chauffage dans le cas de la pression de radiation résonnante puis de la mélasse Doppler.

Remarque

Dans ce qui précède, nous avons (volontairement) laissé une ambiguïté en ce qui concerne la nature de la moyenne $\langle \rangle$ considérée. Fondamentalement, il s'agit d'une moyenne quantique. Mais une moyenne quantique n'est rien d'autre qu'une moyenne sur un ensemble statistique hypothétique obtenu en préparant un grand nombre de systèmes de façon strictement identique. Dans le cas d'un ensemble d'atomes placés dans une onde laser homogène, et sans interaction entre eux, on réalise en fait simultanément – en parallèle – un grand nombre

d'expériences identiques, et on peut considérer que la moyenne quantique se confond avec la moyenne statistique sur l'ensemble des atomes. Dans la suite, sauf mention particulière, les moyennes entre crochets $\langle \rangle$ désignent donc aussi bien des moyennes quantiques que des moyennes statistiques.

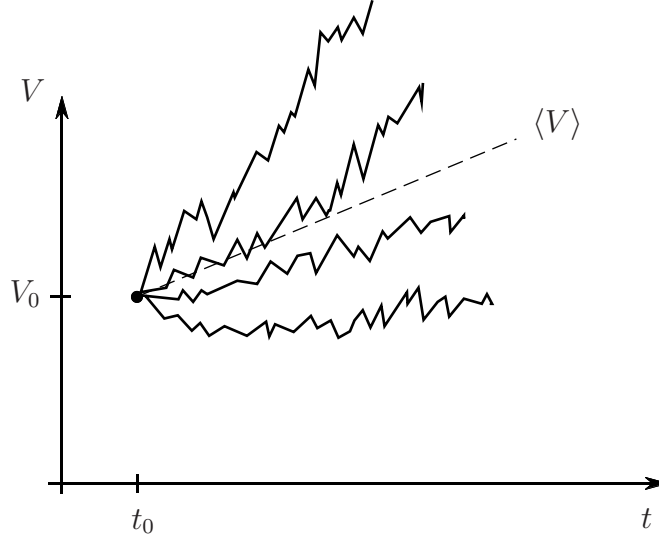


FIG. 7.10: *Fluctuations (dispersion) de la force, et chauffage.* Si un ensemble d'atomes, ayant initialement la même vitesse V_0 , est soumis à une force présentant une dispersion statistique, les trajectoires atomiques se séparent, et les vitesses atomiques présentent une dispersion autour de la vitesse moyenne $\langle V \rangle$ qui augmente au cours du temps. On a un chauffage de l'échantillon (dont la température initiale est nulle dans le cas idéal considéré ici).

7.2.4 Fluctuations de la pression de radiation résonnante

Pour prendre en compte les fluctuations quantiques de la pression de radiation résonnante, il suffit en fait de se référer au modèle du (§ 7.1.5) dans lequel la force $\mathbf{F}_1$ résulte de la moyenne des transferts d'impulsion entre les photons et les atomes, lors des cycles de fluorescence (absorption et émission spontanée d'un photon diffusé). On peut alors utiliser un modèle stochastique classique dans lequel la force est un processus aléatoire $\mathcal{F}_1(t)$, dont la moyenne (statistique) redonne $\mathbf{F}_1$

$$\mathbf{F}_1 = \langle \mathcal{F}_1(t) \rangle . \quad (7.72)$$

On peut donc écrire

$$\mathcal{F}_1(t) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{f}(t) \quad (7.73)$$

où $\mathbf{f}(t)$ est un processus aléatoire de valeur moyenne nulle. Notons qu'en fait $\mathbf{f}(t)$ est une succession d'impulsions appliquées aléatoirement l'atome.

Une force telle que $\mathbf{f}(t)$ s'appelle *force de Langevin*. Elle a été introduite à propos du mouvement Brownien dans lequel une grosse particule est frappée aléatoirement par les

molécules d'un liquide, ce qui provoque un mouvement de diffusion aléatoire (marche au hasard) de la vitesse de la grosse particule, qui se traduit finalement par une diffusion dans l'espace réel. Il suffit de connaître les propriétés statistiques de la force de Langevin $\mathbf{f}(t)$ pour en déduire son effet sur le mouvement des particules Browniennes (ici les atomes, « frappés » par les photons).

Nous nous intéressons aux propriétés de $\mathbf{f}(t)$ dans le cas considéré au (§ 7.1.5) : les atomes sont placés dans une onde plane progressive de vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Nous supposons de plus que l'onde est non saturante, de façon à pouvoir négliger les phénomènes d'émission stimulée. Le taux moyen de cycles de fluorescence est donc (équations (7.40), avec $s \ll 1$)

$$\mathcal{N} = \frac{\Gamma}{2} s, \quad (7.74)$$

où le paramètre de saturation s a été défini en (7.33), et la force moyenne vaut

$$\mathbf{F}_1 = \mathcal{N} \hbar \mathbf{k}. \quad (7.75)$$

Pour prendre en compte les fluctuations de $\mathcal{F}_1(t)$, nous les modélisons par une succession de pics de Dirac, de poids (intégrale temporelle) $\hbar k$, correspondant à une variation discontinue de l'impulsion atomique, par quanta $\hbar k$. Nous distinguerons les processus d'absorption des photons laser, et les processus d'émission pendant la seconde partie du cycle de fluorescence.

Les photons absorbés communiquent chacun une impulsion déterminée $\hbar \mathbf{k}$, mais à des instants aléatoires t_j . La force correspondante peut s'écrire

$$\mathcal{F}_{\text{abs}} = \sum_j \hbar \mathbf{k} \delta(t - t_j) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{f}_{\text{abs}}(t). \quad (7.76)$$

Il s'agit d'un processus aléatoire, caractérisé par l'hypothèse que les instants t_j sont aléatoires et indépendants, et que leur taux moyen vaut $\mathcal{N}$.

Les photons réémis donnent une contribution $\mathbf{f}_{\text{sp}}$, nulle en moyenne, que l'on peut écrire

$$\mathbf{f}_{\text{sp}} = \sum_j \mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j) \hbar k \delta(t - t_j). \quad (7.77)$$

Chaque vecteur $\mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j)$ est unitaire mais de distribution aléatoire et isotrope, de sorte que

$$\langle \mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j) \rangle = 0 \quad (7.78)$$

et

$$\langle [\mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j)]_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle |\mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j)|^2 \rangle = \frac{1}{3} \quad ; \quad \alpha = x, y, z. \quad (7.79)$$

Les émissions spontanées successives sont indépendantes, de sorte que

$$\langle \mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j) \cdot \mathbf{e}_{\text{sp}}(t_k) \rangle = \delta_{jk}. \quad (7.80)$$

Remarques

(i) En toute rigueur, pour un atome particulier, il n'est pas exact que les instants successifs t_j sont statistiquement indépendants. En fait, lorsqu'un atome vient d'émettre un photon de fluorescence, il faut un certain temps pour qu'il puisse en émettre un second. Ce phénomène est connu sous le nom de « dégroupement ». En pratique, ce phénomène a des conséquences négligeables sur les effets de chauffage auxquels nous nous intéressons ici.

(ii) Pour une onde laser polarisée, il n'est pas exact que le diagramme de rayonnement soit isotrope, de sorte que les relations (7.79) ne s'appliquent pas et les variances suivant les divers axes ne sont pas égales. Par exemple, pour une onde laser polarisée linéairement suivant Oz , le diagramme de rayonnement des photons réémis varie comme $\sin^2(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\text{sp}})$, et l'équation (7.79) doit être remplacée par

$$\langle [\mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j)]_z^2 \rangle = \frac{2}{15}, \quad (7.81)$$

$$\langle [\mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j)]_x^2 \rangle = \langle [\mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j)]_y^2 \rangle = \frac{13}{30}. \quad (7.82)$$

Mais lorsqu'on considère le cas important de trois ondes laser suivant trois directions orthogonales, l'hypothèse d'isotropie est une excellente approximation.

7.2.5 Diffusion dans l'espace des impulsions : chauffage

Considérons un ensemble d'atomes d'impulsions initiales identiques $\mathbf{p}(t_0)$, et supposons d'abord qu'ils sont soumis uniquement à la force de Langevin $\mathbf{f}_{\text{sp}}(t)$ associée à l'émission spontanée. Chaque atome effectue une *marche au hasard* à 3 dimensions, de pas $\hbar k$, et à l'instant t il a pour impulsion

$$\mathcal{P}(t) = \mathbf{p}(t_0) + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(t-t_0)} \hbar k \mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j), \quad (7.83)$$

où $\mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j)$ est un vecteur unitaire aléatoire isotrope (équations (7.78) et (7.79)). D'après (7.78), on a

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle = \mathbf{p}(t_0). \quad (7.84)$$

De plus,

$$\begin{aligned} [\sigma_{\mathcal{P}}(t)]^2 &= \langle [\mathcal{P}(t) - \langle \mathcal{P}(t) \rangle]^2 \rangle \\ &= \hbar^2 k^2 \langle \sum_j \sum_k \mathbf{e}_{\text{sp}}(t_j) \mathbf{e}_{\text{sp}}(t_k) \rangle \\ &= \hbar^2 k^2 \langle \sum_j 1 \rangle = \hbar^2 k^2 \mathcal{N}(t - t_0) \end{aligned} \quad (7.85)$$

Sous l'effet des fluctuations associées à l'émission spontanée, la *variance* de l'*impulsion* croît donc *linéairement avec le temps*

$$\frac{d}{dt} [\sigma_{\mathcal{P}}^2(t)]_{\text{sp}} = \mathcal{N} \hbar^2 k^2. \quad (7.86)$$

Il s'agit d'un résultat bien connu pour un phénomène de *diffusion Brownienne*. On peut être plus précis. Par application du théorème de la limite centrale à la variable aléatoire $\mathcal{P}(t) - \mathbf{p}(t_0)$, formée par addition d'un grand nombre de contributions indépendantes, on montre que chaque composante $\mathcal{P}_i(t)$ est distribuée suivant une loi de probabilité gaussienne p de variance $\sigma_{\mathcal{P}_i}^2(t)$

$$\rho[\mathcal{P}_i(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathcal{P}_i}(t)} \exp \left\{ -\frac{[\mathcal{P}_i(t) - \langle \mathcal{P}_i \rangle]^2}{2[\sigma_{\mathcal{P}_i}(t)]^2} \right\} \quad (7.87a)$$

avec

$$\sigma_{\mathcal{P}_i}^2 = \frac{1}{3} \sigma_{\mathcal{P}}^2 . \quad (7.87b)$$

Une distribution gaussienne isotrope d'impulsions permet de définir une température T , par la relation

$$\frac{1}{2} k_B T = \frac{\sigma_{\mathcal{P}_i}^2}{2M} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_{\mathcal{P}}^2}{2M} , \quad (7.88)$$

où k_B est la constante de Boltzmann. Les fluctuations de la force radiative entraînent donc un *chauffage*, puisque $\sigma_{\mathcal{P}}^2$ croît linéairement avec le temps (Équation 7.86).

De façon analogue, les fluctuations de la force due à l'absorption des photons lasers, entraînent un chauffage de la composante $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ de l'impulsion parallèle à la direction $\mathbf{k}$ du laser

$$\left[\frac{d}{dt} \sigma_{\mathcal{P}_{\mathbf{k}}}^2(t) \right]_{\text{abs}} = \mathcal{N} \hbar^2 k^2 . \quad (7.89)$$

Ces divers termes de chauffage, qui correspondent à des processus aléatoires indépendants, s'additionnent en variance. De plus, si on a plusieurs ondes planes progressives *non-saturantes*, les termes de chauffage des diverses ondes peuvent également s'additionner en variance. Ainsi, pour une mélasse Doppler formée de 3 paires d'ondes contrepropageantes orthogonales, donnant lieu chacune à $\mathcal{N}$ cycles de fluorescence par seconde, on aura

$$\left[\frac{d\sigma_{\mathcal{P}_i}^2(t)}{dt} \right]_{\text{sp}} = 2\mathcal{N} \hbar^2 k^2 \quad (7.90)$$

et

$$\left[\frac{d\sigma_{\mathcal{P}_i}^2(t)}{dt} \right]_{\text{abs}} = 2\mathcal{N} \hbar^2 k^2 . \quad (7.91)$$

Notons que l'on a multiplié le terme (7.86) par 6, et utilisé (7.87b), car pour chaque onde l'émission spontanée est isotrope. Au contraire, (7.89) est multiplié par 2 seulement, car le terme de chauffage à l'absorption (7.89) n'affecte que la direction de l'onde laser considérée.

Si maintenant, au lieu d'un ensemble d'atomes ayant initialement tous la même impulsion, nous considérons un ensemble statistique ayant une dispersion initiale $\sigma_{\mathcal{P}_i(0)}^2$, il est facile de montrer que cette variance croît suivant les taux calculés ci-dessus, et que la distribution à l'instant t suit la loi de probabilité gaussienne (7.87a), où la variance est la somme de la variance initiale et des variances dues à l'évolution.

7.2.6 Température d'équilibre dans une mélasse Doppler

Considérons une assemblée d'atomes plongés dans une mélasse Doppler à 3 dimensions, formée de 6 ondes non-saturantes d'intensité I , et de désaccord δ négatif, avec

$$s_0 = \frac{I}{I_{\text{sat}}} = 2 \frac{\Omega_1^2}{\Gamma^2} . \quad (7.92)$$

Chaque atome est soumis à la force de friction

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} = -\frac{\gamma}{M} \mathbf{P}(t) \quad (7.93)$$

avec γ donné par la formule (7.65). Sous l'effet de cette friction seule, la valeur moyenne de $\mathbf{P}(t)$ tend exponentiellement vers 0 avec la constante de temps $(\frac{\gamma}{M})^{-1}$. Quant à la variance de $\mathbf{P}$, elle diminue avec un taux deux fois plus grand

$$\left[\frac{d}{dt} \sigma_{\mathcal{P}_i}^2 \right]_{\text{friction}} = -2 \frac{\gamma}{M} \sigma_{\mathcal{P}_i}^2 . \quad (7.94)$$

Il s'agit du terme de refroidissement que nous avons déjà rencontré.

En fait, friction et chauffage existent simultanément, et nous admettons que l'on peut ajouter indépendamment les termes de refroidissement et de chauffage agissant sur la variance $\sigma_{\mathcal{P}_i}^2$ de chaque composante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_{\mathcal{P}_i}^2 &= \left[\frac{d}{dt} \sigma_{\mathcal{P}_i}^2 \right]_{\text{friction}} + \left[\frac{d}{dt} \sigma_{\mathcal{P}_i}^2 \right]_{\text{sp}} + \left[\frac{d}{dt} \sigma_{\mathcal{P}_i}^2 \right]_{\text{abs}} \\ &= -2 \frac{\gamma}{M} \sigma_{\mathcal{P}_i}^2 + 4\mathcal{N} \hbar^2 k^2 . \end{aligned} \quad (7.95)$$

On atteint rapidement un régime stationnaire $\left(\frac{d}{dt} \sigma_{\mathcal{P}_i}^2 = 0 \right)$, correspondant à

$$\sigma_{\mathcal{P}_i}^2 = M \hbar^2 k^2 \frac{2\mathcal{N}}{\gamma} = M \frac{\Gamma}{8} \frac{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}{-\delta/\Gamma} , \quad (7.96)$$

soit une température

$$k_B T = \frac{\Gamma}{8} \frac{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}{-\delta/\Gamma} . \quad (7.97)$$

Ce calcul prédit donc que la température obtenue ne dépend pas de l'intensité des ondes de la mélasse. En revanche, elle dépend du désaccord, et elle passe par un minimum pour $\delta = -\frac{\Gamma}{2}$, ce qui donne

$$T_{\text{Dop}}^{\text{min}} = \frac{\Gamma}{2k_B} . \quad (7.98)$$

Les valeurs correspondantes pour les atomes alcalins sont remarquablement basses (inférieures au milliKelvin) ($240 \mu\text{K}$ pour le sodium). Des températures de cet ordre ont effectivement été observées lors des premières expériences de mélasse Doppler, par S. Chu et al., en 1985. Ces résultats ont stimulé ce domaine de recherche.

Remarques

(i) La relation (7.97) peut s'écrire sous la forme trouvée par Einstein dans son étude du mouvement Brownien

$$k_B T = \frac{D}{\gamma} . \quad (7.99)$$

Dans cette équation, γ est le coefficient de friction de la particule Brownienne, due à la viscosité du liquide, tandis que D est le coefficient de diffusion de la vitesse $\mathbf{V}$, défini par

$$\frac{d}{dt} \sigma_{V_\alpha}^2 = 2D , \quad (7.100)$$

et dû au chocs des molécules de liquide sur la particule Brownienne.

Cette relation fait ressortir le lien profond entre la *dissipation* (la friction) et les *fluctuations* (responsables de la diffusion Brownienne). Au niveau microscopique, les deux phénomènes ont la même origine, les chocs avec les molécules du liquide, ou avec les photons dans le cas du refroidissement laser.

(ii) La très faible température obtenue dans une mélasse optique a ouvert la possibilité de *piéger* les atomes. Il suffit en effet de rajouter un puits de potentiel dont la profondeur est supérieure à quelques $k_B T$ pour confiner les atomes dans ce puits. Un tel potentiel peut être obtenu en utilisant la force dipolaire obtenue en focalisant un ou plusieurs faisceaux laser (cf. figure 7.4), ou en utilisant un piégeage magnétique. Si les phénomènes de piégeage et de refroidissement se perturbent mutuellement, on peut appliquer successivement les divers effets : par exemple, on refroidit les atomes avec une mélasse Doppler, puis on coupe les lasers et on applique le piégeage magnétique, ou le piégeage dipolaire, et on recommence à une fréquence suffisamment élevée.

(iii) En jouant sur la structure des niveaux atomiques qui sont souvent dégénérés en plusieurs sous-niveau Zeeman, et sur la polarisation des ondes de la mélasse optique, il est possible d'obtenir, à condition de rajouter un champ magnétique inhomogène, une configuration extrêmement importante, appelée *piège magnéto-optique*. Dans cette configuration, les atomes sont soumis non seulement à la force de friction qui amortit leurs vitesses, mais aussi à une force de rappel élastique qui les ramène vers le centre de la structure. On obtient ainsi un piège extrêmement robuste, qui est devenu l'outil de base de la manipulation d'atomes par laser.

7.2.7 Sous la température Doppler : le refroidissement Sisyphe

Pour les atomes alcalins tels que le sodium, le césium, le rubidium, une étude expérimentale détaillée de la température Doppler en fonction du désaccord montre que dans certaines circonstances la température des atomes ne suit pas du tout la loi (7.97). En fait, à basse intensité et grand désaccord, la température varie proportionnellement à $I/(-\delta)$: elle décroît lorsqu'on augmente le désaccord ($-\delta$) vers les basses fréquences, ainsi que lorsqu'on diminue l'intensité. On peut ainsi obtenir des températures plus basses que la « limite Doppler » (7.96) par un ou deux ordres de grandeurs ! Ce phénomène remarquable, découvert par W. Phillips et son équipe, a été interprété indépendamment par S. Chu, et par C. Cohen-Tannoudji et Jean Dalibard, qui l'ont baptisé effet Sisyphe.

Sans entrer dans les détails de l'explication de cet effet subtil, on peut en esquisser les grandes lignes. Il faut d'abord comprendre que dans une mélasse à trois dimensions il y a des effets d'interférences entre les six ondes qui provoquent des variations (périodiques) d'intensité lumineuse, et donc des modulations du potentiel dipolaire qui varie, à grand désaccord, comme I/δ (cf. § 7.1.6, remarque (iii), équation 7.56). L'atome se déplace donc dans un potentiel modulé spatialement, présentant des « collines » et des « vallées » correspondant aux variations du déplacement lumineux de cet état fondamental. Si le niveau fondamental est dégénéré, il peut arriver que les déplacements lumineux des divers sous-niveaux soient différents, et le potentiel dipolaire ressenti par l'atome dépend du sous-niveau fondamental dans lequel il se trouve. Dans la configuration Sisyphes, les collines d'un sous-niveau correspondant aux vallées de l'autre (Figure 7.11). De plus, il se trouve que le pompage optique dû aux ondes lumineuses transfère préférentiellement les atomes en mouvement du sommet d'une colline d'un sous-niveau vers le fond de la vallée d'un autre sous-niveau (Figure 7.11). Lors de son mouvement, l'atome est ainsi amené à monter sur une colline de potentiel, ce qui le ralentit, puis à être transféré sans changement de vitesse au pied d'une nouvelle colline, qu'il va devoir gravir, ralentissant encore. Le mécanisme s'arrête lorsque l'atome a une énergie cinétique inférieure ou égale à la hauteur des collines, qui varie comme $I/|\delta|$. On comprend ainsi la loi de variation de la température obtenue.

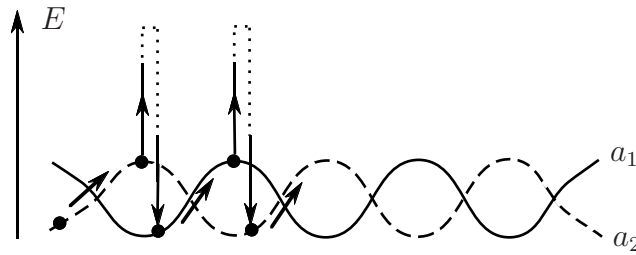


FIG. 7.11: Refroidissement Sisyphes. Sous l'effet des diverses ondes lumineuses qui interfèrent, les déplacements lumineux des sous-niveaux atomiques fondamentaux a_1 et a_2 sont modulés et le potentiel dipolaire ressenti par l'atome dépend du sous-niveau a_1 ou a_2 dans lequel il se trouve. De plus, l'atome en mouvement subit préférentiellement, au sommet des collines de potentiel, un pompage optique qui l'amène dans un sous-niveau ayant à cet endroit un minimum de potentiel. L'atome perd ainsi progressivement son énergie cinétique.

Cette décroissance de la température finale avec l'intensité ne se poursuit évidemment pas jusqu'à $I = 0$. L'expérience et la théorie montrent que la vitesse quadratique moyenne ne devient pas inférieure à quelques (3 environ) vitesses de recul V_R (équation 7.17). On peut aisément interpréter ce résultat en se souvenant que chaque émission spontanée provoque un recul incontrôlable de vitesse V_R . On comprend alors que dans un mécanisme de refroidissement qui met en jeu des cycles de fluorescence, on ne puisse contrôler les vitesses à mieux que quelques V_R . On voit ainsi apparaître une *limite naturelle du refroidissement radiatif*, la *température de recul*

$$T_R = \frac{MV_R^2}{k_B}. \quad (7.101)$$

La température de recul est inférieure au micro Kelvin pour la plus part des alcalins. L'expérience montre que le refroidissement Sisyphe peut conduire à des températures de l'ordre de $10 T_R$.

7.2.8 Sous la température de recul

En fait, la température de recul elle-même ne constitue pas une limite absolue, comme on allait le montrer peu de temps après la découverte du mécanisme de refroidissement Sisyphe. Mais le refroidissement subrecul ne fait pas appel à un mécanisme de friction, mais à un mécanisme de diffusion inhomogène dans l'espace des impulsions.

Supposons que l'on sache produire une configuration de faisceaux lasers telle que le taux de fluorescence d'un atome varie avec l'impulsion, et s'annule à impulsion nulle. On a, autour de $\mathbf{p} = 0$, une loi de puissance

$$\mathcal{N} = R_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^r \quad (7.102)$$

(on suppose l'effet isotrope, donc ne dépendant que de $|\mathbf{p}| = p$). Quelle est l'évolution de l'impulsion atomique, sous l'effet des échanges d'impulsion avec le rayonnement ? On sait que même si la force moyenne $\mathbf{F}$ est nulle, l'impulsion effectue une marche au hasard de pas $\hbar k$, ce qui amène l'impulsion $\mathcal{P}$ de l'atome à explorer l'espace des impulsions. Elle peut en particulier arriver très près de $\mathbf{p} = 0$, où la fluorescence cesse. Alors, l'impulsion n'évolue plus du tout, puisqu'il n'y a plus aucun échange avec le rayonnement. On peut ainsi *accumuler* progressivement *un grand nombre d'atomes autour de $\mathbf{p} = 0$* . Il s'agit d'un authentique refroidissement puisque la densité atomique au voisinage de $\mathbf{p} = 0$ augmente. On peut alors montrer que l'entropie de l'échantillon diminue. En fait, on a réalisé un démon de Maxwell capable d'accumuler les atomes dans un petit volume de l'espace des phases⁸.

Comme les atomes accumulés autour de $\mathbf{p} = 0$ cessent d'interagir avec la lumière, *la température de recul cesse d'être une limite*. Ce principe a été démontré avec une méthode de refroidissement basée sur un processus appelé « Piégeage cohérent de population sélectif en vitesse », on a effectivement observé des températures inférieures à la température de recul. Dans ces conditions, comme nous l'avons montré au § 7.1, le paquet d'onde décrivant le centre de masse atomique a une extension plus grande que la longueur d'onde lumineuse. On ne peut plus utiliser la description semi-classique du mouvement basée sur le théorème d'Ehrenfest, et il faut avoir recours à un traitement complètement quantique.

Ce refroidissement subrecul basé sur l'arrêt de la fluorescence a conduit à un dévelop-

⁸Ceci est compatible avec le second principe de la thermodynamique dans la mesure où le mécanisme permettant cette accumulation provoque l'augmentation de l'entropie d'un autre système. En effet, en redistribuant les photons depuis un mode laser, d'entropie nulle, vers des modes quelconques, on augmente l'entropie du rayonnement.

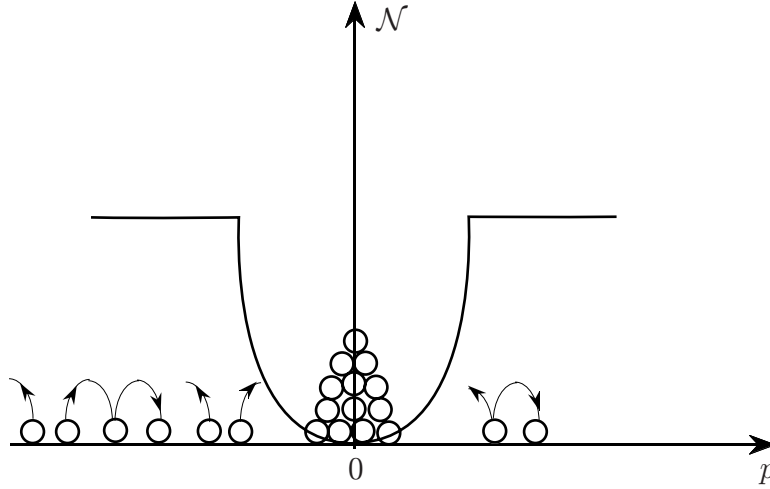


FIG. 7.12: *Refroidissement subrecoil.* Le taux de fluorescence $\mathcal{N}$ des atomes s'annule autour de l'impulsion nulle $p = 0$. Le mouvement Brownien des atomes dans l'espace des impulsions, provoqué par les échanges de quantité de mouvement avec les photons, cesse donc autour de $p = 0$, où les atomes s'accumulent.

pement théorique inattendu, utilisant les « lois statistiques de Lévy »⁹. Ces statistiques s'appliquent aux « lois de probabilité larges », où les variables aléatoires n'ont pas de moyenne. Prenons par exemple la loi (7.102) avec $r = 2$, dans un cas à 1 dimension, et supposons que les atomes tombent de façon uniforme sur l'axe des p (« loi d'arrosage » uniforme). Nous nous demandons alors quelle est la loi de probabilité des temps de piégeage τ des atomes, c'est-à-dire des temps d'attente avant le prochain cycle de fluorescence. Pour simplifier, nous prenons une relation déterministe entre τ et p : un atome arrivant à l'impulsion p va y rester pendant un temps

$$\tau(p) = \mathcal{N}^{-1} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^2. \quad (7.103)$$

La loi de probabilité $\rho(\tau)$ des temps d'attente est telle que

$$\rho(\tau)d\tau = \pi|dp| \quad (7.104)$$

où π est la densité de probabilité (uniforme) d'arrivée autour de p . On en déduit immédiatement

$$\rho(\tau) = \pi \left| \frac{dp}{d\tau} \right| = \frac{\tau_0^{1/2}}{\tau^{3/2}} \quad (7.105a)$$

où τ_0 est une constante ayant les dimensions d'un temps :

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \frac{p_0}{\sqrt{R_0}}. \quad (7.105b)$$

⁹Paul Lévy, professeur à l'École polytechnique de 1920 à 1959, a obtenu de nombreux résultats originaux en probabilités.

La loi (7.105a) est une *loi large* car $\rho(\tau)$ décroît lentement vers 0 pour les grandes valeurs de τ qui jouent un rôle essentiel. Notons en particulier que la valeur moyenne de τ n'existe pas, à cause de cette aile large du côté de $\tau \rightarrow \infty$. On ne peut alors appliquer les statistiques habituelles, et en particulier le théorème de la limite centrale, à ce type de phénomènes. En revanche, les statistiques de Lévy permettent d'obtenir de nombreux résultats intéressants, et en particulier la prévision que ce phénomène de refroidissement n'atteint pas d'état stationnaire mais au contraire que la température diminue indéfiniment comme θ^{-1} lorsque la durée θ de l'expérience augmente. Ces statistiques s'appliquent aux situations non ergodiques comme celle qui existe ici¹⁰.

Remarques

(i) Lorsqu'on veut augmenter le temps d'interaction, les précautions expérimentales permettant de contrôler les effets parasites sont de plus en plus difficiles à satisfaire. Néanmoins, on a pu atteindre des températures de l'ordre de $T_R/1000$.

(ii) On peut essayer de vérifier théoriquement les prévisions des statistiques de Lévy, en faisant un calcul numérique basé sur les équations « microscopiques » de l'interaction atome-rayonnement (Équation de Bloch Optiques généralisées). On constate alors que la puissance des ordinateurs limite la gamme des temps d'interaction θ explorable, mais, dans cette gamme, l'accord est excellent. On peut comparer la situation aux tentatives de vérifier la loi des gaz parfaits en utilisant un modèle mécanique (par exemple de sphères dures élastiques) et en résolvant les équations du mouvement. On sait que ce genre de vérification se heurte très vite à la puissance limitée des ordinateurs, mais dans la gamme accessible on constate l'accord entre l'approche microscopique et l'approche statistique.

On constate ainsi une fois de plus que les méthodes statistiques sont remarquablement puissantes par les prévisions dont elles sont capables, bien que leur lien avec les lois microscopiques ne se déduise pas de façon rigoureuse : il y intervient une part de « conjecture », dont il convient évidemment de contrôler les conséquences.

7.3 Condensats de Bose-Einstein gazeux. Laser à atomes

7.3.1 Condensation de Bose-Einstein

Dans tout ce qui précède, on s'est uniquement intéressé à l'interaction atome-rayonnement, mais on n'a jamais considéré les interactions entre atomes. En fait, dès que la densité atomique est suffisante, ces interactions ne peuvent être négligées : c'est ainsi que l'on peut étudier les collisions atomiques dans un régime complètement nouveau, celui des collisions ultra-froides, qui a donné lieu à de nombreux résultats inattendus.

Lorsqu'on refroidit suffisamment un ensemble de particules, il existe un autre phénomène lié à la proximité des voisins, et *qui existe même en l'absence d'interaction* au sens

¹⁰F. Bardou, J.-P. Bouchaud, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji : « *Lévy statistics and laser cooling* », Cambridge University Press (2001).

habituel du terme : il s'agit des *effets de statistiques quantiques*¹¹, qui apparaissent lorsque les paquets d'onde atomiques se recouvrent, c'est-à-dire lorsque leur dimension typique est de l'ordre de leur distance moyenne $n^{-1/3}$, où n est la densité atomique dans l'espace réel. Pour des atomes à température T , la distribution des impulsions est une gaussienne à trois dimensions d'écart quadratique moyen

$$\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \sqrt{M k_B T} . \quad (7.106)$$

On peut lui associer un paquet d'onde dont la taille typique est de l'ordre de $\hbar/\Delta p_x$. On utilise conventionnellement la « longueur d'onde de de Broglie thermique » Λ_T , définie par

$$\Lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{M k_B T}} , \quad (7.107)$$

et la condition d'apparition des effets de statistique quantique s'écrit donc

$$\Lambda_T \gtrsim n^{-1/3} , \quad (7.108)$$

ou encore

$$n \Lambda_T^3 \gtrsim 1 . \quad (7.109)$$

En introduisant $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ la densité dans l'espace des phases à six dimensions $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$, on remarque que pour une distribution de vitesses gaussienne, et une densité spatiale uniforme n , la densité maximale dans l'espace des phases vaut

$$\frac{d^6 N_{\text{at}}}{d^3 r d^3 p} = \nu(\mathbf{r}, \mathbf{p} = 0) = \frac{n}{(2\pi M k_B T)^{3/2}} = h^3 n \Lambda_T^3 . \quad (7.110)$$

La condition d'apparition des effets de statistique quantique est donc que la densité dans l'espace des phases soit de l'ordre de 1 atome par cellule élémentaire de volume h^3 . La quantité sans dimension $n \Lambda_T^3$ s'appelle « paramètre de dégénérescence » et la condition (7.109) caractérise le « régime de dégénérescence quantique ».

En fait, dans un article célèbre mais hautement spéculatif de 1924, Einstein a prédit l'existence d'une transition de phase quantique, aujourd'hui appelée « Condensation de Bose-Einstein », pour la valeur précise

$$n \Lambda_T^3 = 2.61 . \quad (7.111)$$

Lorsque $n \Lambda_T^3$ est supérieur à cette valeur, il apparaît une saturation de la vapeur à l'équilibre thermodynamique, la notion de « saturation » étant prise dans un sens analogue à celui de « vapeur saturante » dans un équilibre liquide-vapeur. Les atomes en excès vont alors « se condenser » dans l'état quantique fondamental du piège ou les atomes sont confinés.

¹¹E. Brézin, Physique statistique, Éditions de l'École polytechnique (1998).
R. Balian, Physique statistique, Éditions de l'École polytechnique (1998).

Cette transition de phase quantique est remarquable par le fait qu'à la différence des transitions de phase habituelles telles que la transition vapeur-liquide, ou liquide-solide, elle n'est pas due à des interactions attractives venant dominer l'agitation thermique au-dessous d'une température critique. Ici, la condensation résulte d'un pur effet d'interférence quantique (à plusieurs particules) qui favorise les situations où plusieurs particules bosoniques indiscernables sont dans le même état quantique¹². Plus précisément, à l'issue d'une collision entre deux bosons, la probabilité d'aboutir dans un état déjà occupé par n bosons est $n + 1$ fois plus grande que si cet état était initialement vide. Nous avons rencontré une propriété analogue au chapitre 6 (partie 6.2) dans le cas de l'émission de photons (qui sont des bosons) : la probabilité d'émission stimulée dans un mode contenant n photons est $n + 1$ fois plus grande que la probabilité d'émission spontanée dans un mode initialement vide.

En poursuivant l'analogie ci-dessus, on a pu comparer la condensation de Bose-Einstein, quand la température devient inférieure à la température critique, à la transition laser lorsque le gain devient supérieur à la valeur de seuil. Cette comparaison est intéressante, comme nous le verrons plus loin, mais il faut garder à l'esprit une différence importante : un condensat de Bose-Einstein est a priori un système à l'équilibre thermodynamique avec la fraction non condensée, alors qu'un laser est un système qui n'est pas à l'équilibre thermodynamique.

7.3.2 Obtention de condensats de Bose-Einstein gazeux : refroidissement laser et refroidissement évaporatif

Le critère d'Einstein (7.111) suggère qu'il serait possible d'atteindre le seuil de condensation soit en abaissant la température, soit en augmentant la densité, soit les deux. En fait, pour satisfaire le critère (7.111), aux basses températures accessibles par les méthodes de cryogénie habituelles (une fraction de Kelvin, voire quelques milliKelvin), il faut des densités de l'ordre de celle des liquides ou des solides ($n \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$), où les interactions électromagnétiques (liaison chimique, force de van der Waals), qui sont responsables de transitions de phase ordinaires vers une phase solide ou liquide, masquent les effets de statistique quantique. Il existe une exception, l'hélium, particulièrement inerte, c'est-à-dire développant très peu d'interaction électromagnétique avec les voisins, et il est connu que l'hélium liquide présente à une température de l'ordre de 2 Kelvin une transition vers l'état superfluide. Après plusieurs décennies de débats au cours de la première moitié du XX^{ème} siècle, un consensus a fini par s'établir sur le rôle de la condensation de Bose-Einstein dans l'apparition de la superfluidité, caractérisée par l'absence complète de viscosité. Mais dans le liquide Hélium superfluide les interactions ordinaires sont très fortes et rendent extraordinairement complexe la physique de ce système.

Pour observer la condensation de Bose-Einstein non masquée par les interactions ordinaires dont la portée n'excède pas le nanomètre pour les liaisons chimiques, et une

¹²On sait qu'au contraire, si les particules indiscernables sont des fermions – par exemple des électrons – elles ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique.

fraction de micromètre pour l'interaction de van der Waals, il suffit de travailler en régime dilué, à une densité inférieure à 10^{18} m^{-3} . La température critique donnée par le critère d'Einstein, correspondant à une longueur d'onde de de Broglie thermique de l'ordre de 10^{-6} m , est alors de l'ordre du microKelvin, bien en dessous des températures accessibles par les techniques de cryogénie habituelles. Mais la combinaison du refroidissement et piégeage d'atomes par laser, et d'une nouvelle méthode, le refroidissement évaporatif forcé, finalement a permis d'atteindre la condensation de Bose-Einstein en régime dilué.

Pour comprendre le caractère remarquable des progrès expérimentaux ayant conduit à ce résultat, couronné par le Prix Nobel 2001¹³, il est utile de raisonner en terme de densité dans l'espace des phases (voir figure 7.13).

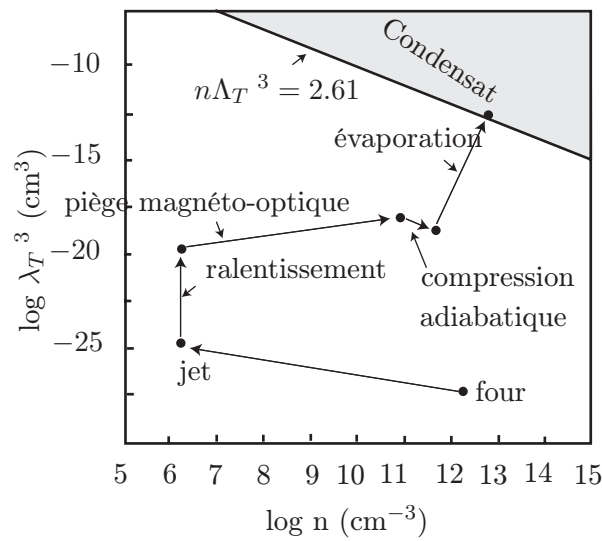


FIG. 7.13: Chemin dans l'espace des phases conduisant de la vapeur atomique dans le four à l'origine du jet atomique jusqu'au condensat de Bose-Einstein. On porte en abscisse la densité, et en ordonnée le cube de la longueur d'onde de de Broglie thermique, en utilisant des coordonnées logarithmiques. Les droites de pente -1 correspondant à un paramètre de dégénérescence constant. La densité finale est du même ordre de grandeur que la densité initiale, mais la température est passé de 500 K à 500 nK , et la densité dans l'espace des vitesses (et donc celle dans l'espace des phases) a augmenté de plus de 14 ordres de grandeur. Ce gain spectaculaire a été obtenu en enchaînant refroidissement par laser et refroidissement évaporatif.

On part d'une vapeur atomique (par exemple le Rubidium) de densité 10^{18} m^{-3} à quelques dizaines de degrés Celsius; la longueur d'onde de de Broglie thermique est de l'ordre de 10^{-11} m , d'où un paramètre de dégénérescence $n\Lambda_T^3$ de l'ordre de 10^{-15} . Après ralentissement par laser d'un jet atomique issu de cette vapeur, on a perdu 6 ordres de grandeur sur la densité dans l'espace réel, mais les vitesses ont été réduites d'un facteur supérieur à 100, et Λ_T^3 a augmenté de plus de 6 ordres de grandeur, d'où une légère croissance du paramètre de dégénérescence qui vaut maintenant 10^{-13} . L'utilisation d'un refroidissement par mélasse laser, combiné à un piégeage, permet un nouveau gain spectaculaire

¹³Voir les textes des conférences Nobel dans Review of Modern Physics, vol. 74 (2002).

qui amène le paramètre de dégénérescence à une valeur de l'ordre de 10^{-6} . L'expérience montre qu'à ce point il est très difficile d'aller au-delà par les méthodes de refroidissement laser qui butent sur le chauffage dû à la réabsorption des photons diffusés lorsque la densité dépasse 10^{17} m^{-3} (la section efficace de diffusion à résonance est de 10^{-12} m^2 , voir la remarque du § 2.4.4, et pour un désaccord $|\delta| = 10 \Gamma$ le libre parcours moyen des photons vaut 10^{-3} m).

Pour gagner les 6 derniers ordres de grandeur permettant d'atteindre la condition critique ($n \Lambda_T^3 = 2.61$), on commence par transférer les atomes dans un piège où ils sont à l'abri de tout chauffage par rediffusion de photons. Il peut s'agir d'un piège magnétique, mais la méthode n'est utilisable que pour des atomes paramagnétiques possédant un moment magnétique permanent. Il peut aussi s'agir d'un piège laser dipolaire (Figure 7.4) basé sur un laser très désaccordé et très puissant, par exemple un laser à CO_2 de longueur d'onde 10 micromètres et de puissance de plusieurs Watts. Dans un tel piège conservatif, il va suffire d'éliminer les atomes les plus énergétiques (par exemple en diminuant la profondeur du piège) pour réduire l'énergie moyenne des atomes restants. Typiquement, on élimine les atomes dont l'énergie est supérieure à $6 k_B T$, et on laisse l'échantillon se rethermaliser. On a alors un échantillon plus froid, et également plus dense puisque les atomes se concentrent au fond du puits lorsque la température baisse. En poursuivant le processus d'évaporation forcée, on observe la condensation à une température en accord avec l'équation (7.111), typiquement une centaine de nanoKelvin.

Pour observer la condensation de Bose-Einstein, la méthode de choix consiste à déterminer la distribution des vitesses des atomes piégés. Pour cela, on coupe brutalement le piège, et on laisse le nuage atomique s'étaler pendant une durée τ , suffisamment longue pour que sa taille soit devenue très grande par rapport à la taille initiale. La densité spatiale $n(\mathbf{r}, \tau)$ à cet instant est alors le reflet de la distribution initiale $\rho(\mathbf{v}, 0)$ des vitesses, et on peut écrire

$$n(\mathbf{r}, \tau) = \rho\left(\frac{\mathbf{r}}{\tau}, 0\right). \quad (7.112)$$

Il est relativement facile de mesurer $n(\mathbf{r}, \tau)$ en réalisant une image en absorption du nuage atomique, éclairé par un laser à résonance. Le profil d'absorption obtenu est alors proportionnel à l'intégrale de la densité $n(\mathbf{r}, \tau)$ suivant la ligne de visée, et on remonte à la densité $n(\mathbf{r}, \tau)$ en utilisant les propriétés de symétrie du piège.

La figure (7.14) montre les profils de vitesses atomiques en fonction de la température. À une température nettement supérieure à la température critique, on constate que le profil de vitesse est très bien représenté par une distribution gaussienne, que l'on ajuste par une distribution de Maxwell-Boltzmann, ce qui donne une mesure de la température. À plus basse température, on voit apparaître une double structure avec une composante étroite et une composante large. Les ailes de la composante large sont ici encore très bien ajustées par une gaussienne, ce qui fournit la température. Par soustraction de la composante large, on isole la composante étroite, qui correspond aux atomes dans le condensat de Bose-Einstein, et que nous décrivons plus en détail ci-dessous.

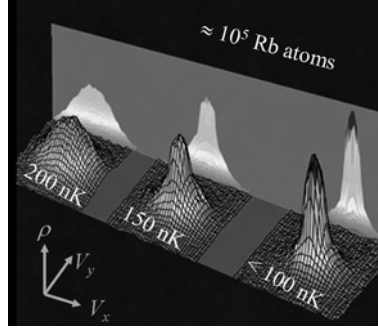


FIG. 7.14: Observation de la condensation de Bose-Einstein. La figure représente la distribution des vitesses atomiques (suivant deux axes) à diverses températures. La condensation se manifeste par l'apparition d'une double structure, correspondant à la phase condensée en équilibre avec un nuage thermique (cliché Institut d'Optique).

7.3.3 Condensat de Bose-Einstein et laser à atomes

Comme nous l'avons indiqué plus haut, l'apparition d'un condensat de Bose-Einstein évoque le franchissement du seuil laser. Au chapitre 3, nous avons souligné une propriété essentielle des lasers, la présence d'un très grand nombre de photons dans un même mode du champ électromagnétique, le mode de la cavité où se produit l'effet laser. De même, un condensat de Bose-Einstein est constitué d'un grand nombre d'atomes tous dans le même état quantique correspondant à la même fonction d'onde pour le mouvement du centre de masse atomique. Cette fonction d'onde est l'état fondamental du piège. Ainsi, au champ

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}_p \mathbf{u}_p(\mathbf{r}) e^{-i\omega_p t} \quad (7.113)$$

décrivant le mode laser p , on peut faire correspondre la fonction d'onde

$$\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}_0 u_0(\mathbf{r}) e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \quad (7.114)$$

décrivant l'état fondamental du piège. Dans le cas d'un piège harmonique de symétrie cylindrique, caractérisé par un potentiel

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}M \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2}M \omega_z^2 z^2, \quad (7.115)$$

la fonction d'onde de l'état fondamental est de la forme

$$u_0(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi^2 a_{\perp}^2 a_z)^{1/4}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a_{\perp}^2}} e^{-\frac{z^2}{4a_z^2}}. \quad (7.116)$$

Les demi-largeurs à $(e^{-1/2})$ de $|u_0|^2$, correspondant aux écarts quadratiques moyens en position, valent respectivement

$$a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{M \omega_{\perp}}} \quad (7.117)$$

et

$$a_z = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_z}}. \quad (7.118)$$

Dans le cas fréquent où $\omega_\perp$ et ω_z ont des valeurs très différentes le condensat est très allongé, en forme de cigare si $\omega_\perp \gg \omega_z$, en forme de crêpe dans le cas opposé. Cette anisotropie se reflète sur la distribution des vitesses, qui est le module carré de la transformée de Fourier de $u_0(x, y, z)$. C'est également une gaussienne anisotrope, de forme inversée (crêpe dans le cas $\omega_\perp \gg \omega_z$, cigare dans le cas $\omega_\perp \ll \omega_z$). Cette forme anisotrope diffère de façon frappante de la forme isotrope de la distribution des vitesses d'un nuage thermique. En effet, dans ce dernier cas, la distribution gaussienne de vitesse a un écart type $\sqrt{k_B T/M}$, indépendante de la raideur du piège. L'observation, dans l'expérience de E. Cornell et C. Wieman, de la double structure en vitesse, isotrope pour le nuage thermique, anisotrope pour la composante étroite, a contribué de façon décisive à la conclusion qu'il s'agissait bien d'une condensation de Bose-Einstein.

Remarque

Dès que la fraction condensée contient quelques milliers d'atomes, l'énergie d'interaction entre atomes, le plus souvent répulsive, vient un peu compliquer la description idéalisée que nous venons de donner de la fonction d'onde du condensat. Cependant, les diverses propriétés que nous avons mentionnées restent vraies qualitativement, l'énergie d'interaction ayant pour effet de modifier les dimensions des distributions en vitesse et en position, qui gardent néanmoins leurs caractéristiques anisotropes inversées.

Comme le mode laser d'une cavité contient beaucoup de photons, un condensat de Bose-Einstein contient beaucoup d'atomes dans la même fonction d'onde, et il va donc avoir des propriétés de luminosité et de cohérence qui évoquent celles d'un laser. On a ainsi pu effectuer de spectaculaires expériences d'interférences entre condensats qui évoquent celles réalisées avec des lasers photoniques.

Parmi les très nombreuses expériences réalisées avec les condensats de Bose-Einstein gazeux, nous avons choisi d'en décrire une qui nous semble bien adaptée au présent ouvrage consacré pour une part importante aux lasers. Il s'agit de ce qu'on peut appeler au sens propre un « laser à atomes », et qui consiste en un faisceau d'atomes se propageant tous dans le même état quantique. On sait que pour obtenir un faisceau laser photonique, on couple le mode actif d'une cavité laser à un mode extérieur à l'aide d'un miroir partiellement transmissif. De la même façon, il est possible de coupler les atomes d'un condensat de Bose-Einstein piégé à une fonction d'onde se propageant librement à l'extérieur du piège sous l'effet de l'accélération de la pesanteur g (Figure 7.15). La fonction d'onde des atomes extraite du condensat décrit le mouvement de particules d'énergie bien déterminée soumises à un champ de force uniforme suivant Oz . Il s'agit d'une fonction appelée « fonction d'Airy », dont la forme asymptotique, loin de la zone d'extraction du condensat (en $z = z_0$), s'écrit

$$\Psi(z) \approx |2g(z = z_0)|^{1/4} \exp \left\{ i \frac{2}{3} \left| \frac{z - z_0}{\ell} \right|^{3/2} \right\} \quad (7.119)$$

avec $\ell = (\hbar^2/2M^2 g)^{1/3}$ ($\ell \approx 300 \mu\text{m}$ pour le rubidium de masse atomique 87).

Cette expression montre que la longueur d'onde de de Broglie des atomes décroît au fur et à mesure de leur chute ce qui s'interprète aisément à partir de la relation de de Broglie

$$\lambda MV = h \quad (7.120)$$

où V est la vitesse classique, qui croît au cours de la chute, suivant la loi

$$V^2 = 2g(z - z_0) . \quad (7.121)$$

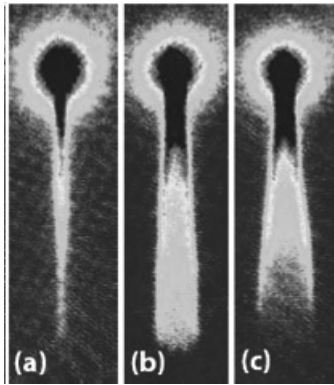


FIG. 7.15: Chaque image, obtenue par absorption de lumière résonnante, montre un ensemble d'atomes tous dans la même fonction d'onde, en chute libre vers le bas sous l'effet de la pesanteur. On distingue le condensat de Bose-Einstein piégé d'où le laser à atomes est extrait. La divergence plus ou moins grande du laser à atomes est due à l'interaction répulsive avec le condensat de Bose-Einstein piégé, qui provoque un effet de lentille divergente (cliché Institut d'Optique).

À cause de cet effet de la pesanteur, qui conduit à des longueurs d'onde de de Broglie très petites, les lasers à atomes en chute libre ne se prêtent pas facilement aux applications. Il n'en est pas de même pour les lasers à atomes produits dans des guides d'onde atomiques horizontaux réalisés par exemple avec des faisceaux laser horizontaux désaccordés vers les petites fréquences, dont la force dipolaire attire les atomes vers le centre du faisceau. On peut aussi utiliser des « puces à atomes », microstructures où des fils parcourus par des courants réalisent des tubes de champ magnétique permettant de guider les atomes, réalisant ainsi une véritable optique atomique intégrée.

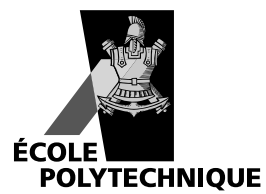
Remarque

Le schéma de laser à atomes évoqué ici est manifestement un schéma de laser de durée finie, dans la mesure où le laser s'arrête lorsque tous les atomes du condensat ont été extraits. Il rappelle par cette propriété le premier laser photonique ayant fonctionné, le laser à rubis, dont l'inversion de population initiale s'épuise lors de l'émission laser. La recherche de schémas permettant d'obtenir des lasers à atomes continus est un sujet important.

Ce trop rapide survol des analogies entre optique photonique et optique atomique serait très incomplet si on n'y abordait pas la question de l'optique atomique quantique,

où l'on verrait apparaître des propriétés typiquement quantiques comme par exemple les corrélations fortes observables avec des particules intriquées. De tels systèmes pourraient trouver des applications dans le domaine de l'information quantique. Ils sont à l'étude dans plusieurs laboratoires.

Ainsi, en moins de trois décennies, l'optique atomique a franchi les étapes qui avaient pris plusieurs siècles pour l'optique photonique. Le contrôle des mouvements atomiques par laser, dans les années 1980, a ouvert la voie à l'optique atomique avec des ensembles incohérents d'atome, ce qui ne veut pas dire qu'on n'y observe pas des phénomènes d'interférence ou de diffraction, comme nous l'avons appris de Young, Fresnel, Michelson, Zernike et bien d'autres qui avaient montré comment faire de l'optique photonique cohérente avec des sources de photons incohérentes. L'obtention des condensats de Bose-Einstein dilués, en 1995, représente l'analogue de l'invention du laser en 1960, et nul doute que l'optique quantique atomique aura des développements spectaculaires. Les lasers à atomes donneront-ils à l'optique atomique autant d'applications que les lasers photoniques en ont amené à l'optique photonique ? Nous nous garderons bien de jouer les futurologues, car le chemin qui mène de la recherche de base aux applications est souvent tortueux : souvenons-nous que la plupart des applications les plus importantes du laser photonique n'ont émergé que plus de vingt ans après leur invention.



ÉDITION 2005

Achevé d'imprimer le 12 octobre 2005 sur les presses
du Centre Poly-Média de l'École Polytechnique



Dépôt légal : 4^e trimestre 2005
N° ISBN 2 – 7302 – 1285 – X

TOME II

IMPRIMÉ EN FRANCE