

QUELQUES APPLICATIONS DE LA FFT

J.M. Lemasquier IPEST Tunis

Nous proposons ici quelques utilisations du calcul numérique rapide de la transformée de Fourier. A l'exception du calcul d'une figure de diffraction, trop gourmande en durée de calcul, les autres manipulations peuvent être utilisées en TP/TD.

1 Fonction de transfert d'un quadripôle

En électronique, la fonction de transfert d'un quadripôle est la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle.

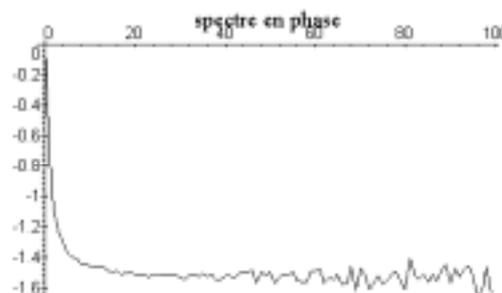
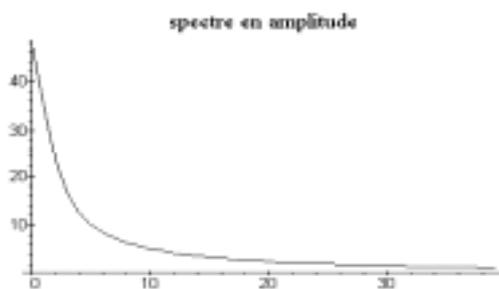
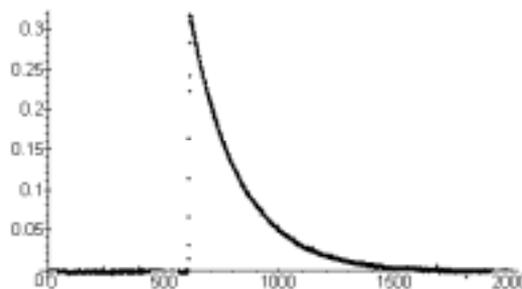


$$\underline{H}(j\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\text{simpul.}}(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

Nous envoyons sur un filtre passe-bas R-C (R=1 kΩ, C=1 μF) une impulsion délivrée par un générateur d'impulsion (si on ne dispose pas au laboratoire d'un tel générateur, on peut le simuler en alimentant un montage dérivateur par un signal carré).

La réponse impulsionnelle est tout d'abord recueillie sur un oscillo à mémoire, puis transférée à un PC.

Nous présentons les résultats obtenus avec une impulsion de *mauvaise qualité* (sa durée Δt=0,5 ms étant du même ordre de grandeur que la constante de temps RC=1 ms du circuit étudié). L'échantillonnage est effectué pendant une durée τ=0,07 s avec une période d'échantillonnage T_e=50 μs (F_e=20 kHz), soit 1400 points d'acquisition.



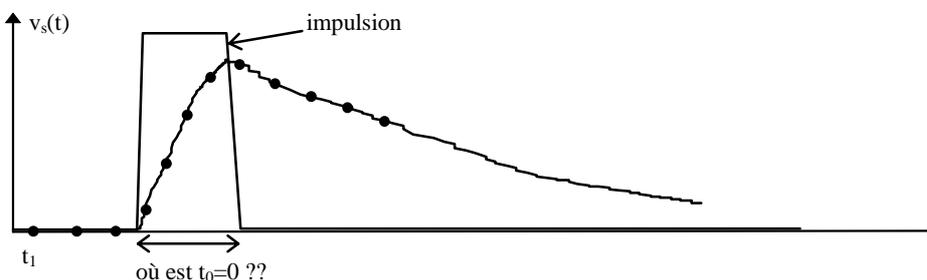
Les résultats obtenus sont corrects. Signalons les principaux problèmes rencontrés:

① l'exploration fréquentielle du quadripôle est directement liée à la largeur spectrale de l'impulsion, de l'ordre de 1/Δt (soit 2 kHz pour notre exemple). *Indépendamment de la fréquence et de la durée d'échantillonnage, il ne faut pas s'attendre à avoir des résultats significatifs pour des fréquences supérieures.*

Ceci est particulièrement sensible pour la phase qui s'affole à partir de ν=600 Hz (40^{ème} point de la FFT)

② un mauvais réglage du zéro-volt donne une composante continue non nulle en sortie. Cela se traduit par une valeur erronée de la fonction de transfert en ν=0 (observée ici).

③ pour le spectre en phase, la connaissance de l'instant initial d'échantillonnage par rapport à l'impulsion est primordial. L'impulsion ayant une largeur non nulle, cet instant n'est pas connu et doit être recherché par tâtonnements pour un calcul correct de la phase.



④ ajoutons en outre que même avec une impulsion idéale ($\Delta t \ll RC$), une discontinuité du signal de sortie conduit en général à une grande erreur sur la phase (de l'ordre de $\pi \frac{q-1}{N}$ pour le q-ième point d'une FFT à N points).

La méthode décrite ci-dessus est exploitable pour étudier la réponse à un échelon (réponse indicelle). La qualité des résultats est en général meilleure.

II- Etude de la propagation d'un paquet d'onde

On étudie un paquet d'ondes de densité spectrale $F(\sigma)$ où σ désigne le nombre d'onde (fréquence spatiale). L'onde $f(x,t)$ est la superposition d'ondelettes $df_\sigma(x,t)$ de nombres d'onde compris entre σ et $\sigma+d\sigma$, d'amplitude $F(\sigma)d\sigma$:

$$df_\sigma(x,t) = F(\sigma) e^{i2\pi(\nu t - \sigma x)} d\sigma$$

Dans cette expression, le terme exponentiel traduit la propagation des ondelettes de nombre d'onde σ à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{v}{\sigma} = \frac{\omega}{k}$$

Alors:

$$f(x,t) = \int_{\sigma=-\infty}^{+\infty} df_\sigma(x,t) = \int_{\sigma=-\infty}^{+\infty} F(\sigma) e^{i2\pi(\nu t - \sigma x)} d\sigma = \int_{\sigma=-\infty}^{+\infty} F(\sigma) e^{i2\pi\nu t} e^{-i2\pi\sigma x} d\sigma$$

Soit:

$$f(x,t) = \mathcal{F}^{-1} [F(\sigma) e^{i2\pi\nu t}]$$

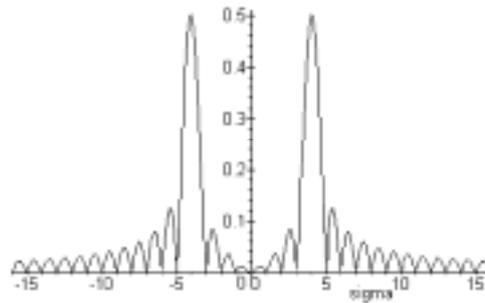
Ainsi, connaissant l'onde à un instant particulier, par exemple $t=0$, on peut calculer sa densité spectrale par $F(\sigma) = \mathcal{F}^{-1}[f(x,0)](\sigma)$.

Puis, si on connaît la relation de dispersion $v(\sigma)$ du milieu, calculer l'état de l'onde à un instant quelconque à l'aide d'une transformée de Fourier.

La relation de dispersion $v(\sigma)$ dans un milieu exprime la relation qui existe entre la fréquence temporelle ν et la fréquence spatiale σ des oscillations de l'ondelette df_σ . Cette relation est obtenue à partir des caractéristiques spécifiques du milieu dans lequel se propage l'onde.

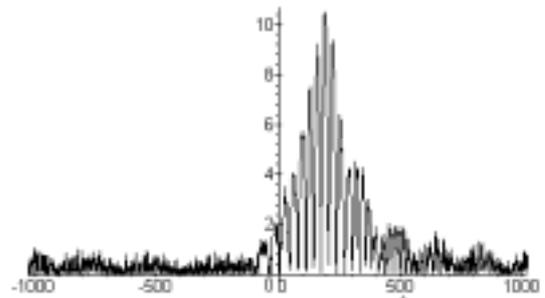
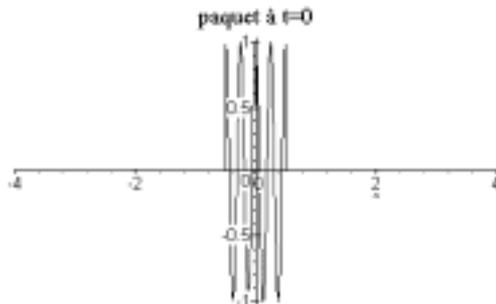
Prenons le cas où $F(\sigma) = \frac{\sigma \sin(\pi\sigma)}{\pi(\sigma^2 - 16)}$.

L'étude de $|F(\sigma)|$ montre qu'il s'agit d'une onde continuee d'un paquet principal centré en $\sigma_0=4 \text{ m}^{-1}$, et de sous-paquets secondaires centrés en σ_j $j=-2, -1, 1, 2, 3, \dots$



Le tableau ci-dessous regroupe les valeurs:

| | | | | | | | |
|----------------------------|---------------|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| nb d'onde | σ_{-2} | σ_{-1} | σ_0 | σ_1 | σ_2 | σ_3 | σ_4 |
| valeur (m^{-1}) | 1,59 | 2,54 | 4 | 5,25 | 6,44 | 7,46 | 8,47 |



Le calcul de $f(x,0)$ peut être fait de façon formelle. On obtient $f(x,0) = \text{rect}_1(x) \cos(2\pi 4x)$, soit un train d'onde sinusoïdal de longueur 1 m, de fréquence spatiale 4 m^{-1} .

On se propose d'examiner ce paquet d'onde à $t=0,015 \text{ s}$. C'est la transformée de Fourier de $F(\sigma) e^{i2\pi\nu(\sigma) \times 0,015}$. La relation de dispersion dans le milieu est: $v(\sigma) = A\sigma^3$ avec $A=1 \text{ m}^4\text{s}^{-1}$.

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{V}{\sigma} = A\sigma^2$ et la vitesse de groupe est: $v_g = \frac{dv}{d\sigma} = v_\varphi + \sigma \frac{dv_\varphi}{d\sigma} = 3A\sigma^2$

Le milieu est *dispersif* dans la mesure où la vitesse d'une ondelette dépend de son nombre d'onde. Le paquet obtenu à $t=0,015$ s (représenté ici en valeur absolue) montre « l'éclatement » du paquet initial. Les sous paquets n^o_j se sont déplacés avec leur vitesse de groupe propre $v_g(\sigma_j)$ et se retrouvent centrés à des positions différentes ($x_j=v_g(\sigma_j)\times 0,015$).

Le calcul numérique de la transformée est fait à l'aide de $2^{11}=2048$ points sur un intervalle s'étendant depuis $\sigma=-128$ m^{-1} jusqu'à $\sigma=+128$ m^{-1} , soit $\Delta\sigma=256$ m^{-1} . Le domaine spatial exploré s'étend donc sur une longueur $\Delta x = \frac{N}{\Delta\sigma} = \frac{2048}{256} = 8$ m, soit $x \in [-4m, +4m]$. Le point d'indice q correspond à $x=x_q = \frac{q-1}{\Delta\sigma}$ et les deux moitiés de la FFT ont été permutées (« dépliement »)

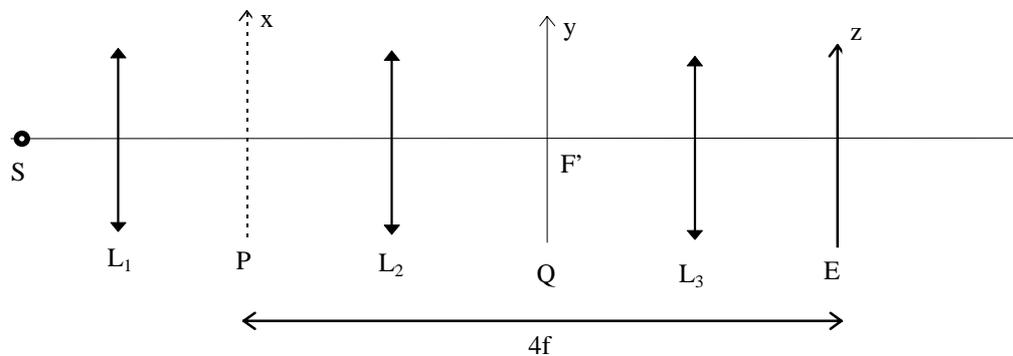
Le tableau ci-dessous regroupe les résultats:

| nb d'onde | σ_{-2} | σ_{-1} | σ_0 | σ_1 | σ_2 | σ_3 | σ_4 |
|-------------------------------|---------------|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| valeur (m^{-1}) | 1,59 | 2,54 | 4 | 5,25 | 6,44 | 7,46 | 8,47 |
| $v_g(\sigma_j)$ (ms^{-1}) | 7,54 | 19,3 | 48 | 82 | 124 | 167 | 215 |
| position à $t=0,015$ s (m) | 0,113 | 0,29 | 0,72 | 1,23 | 1,86 | 2,5 | 3,2 |
| valeur correspondante de q | 30 | 75 | 185 | 316 | 477 | 642 | 827 |

On peut utiliser la méthode pour étudier la propagation d'ondes de chaleur, ou le comportement de particules en mécanique quantique (réflexion sur une barrière, effet tunnel).

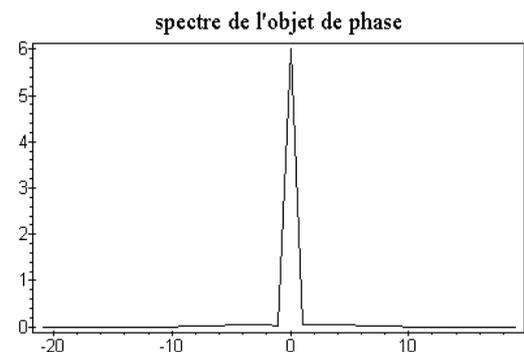
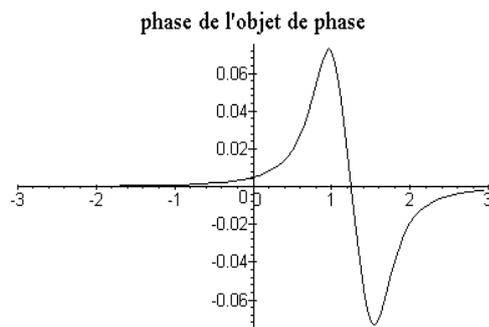
III Strioscopie et contraste de phase

Cette manipulation permet d'illustrer une méthode de traitement numérique d'une image (unidimensionnelle)

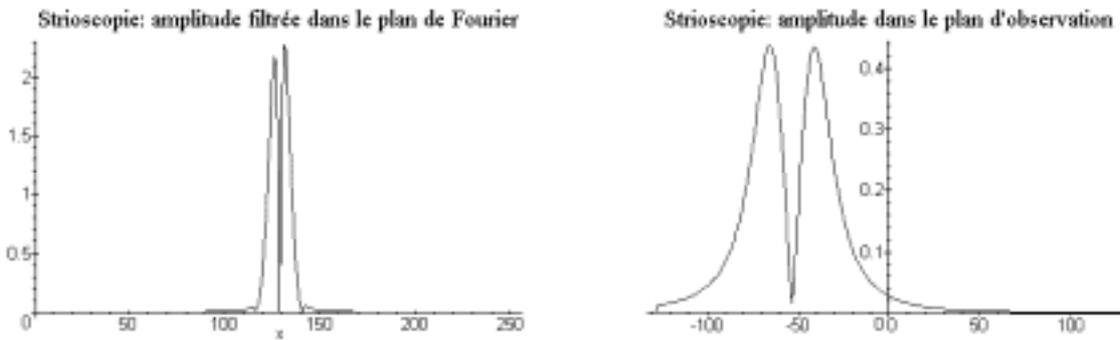


On considère le « montage 4f » dans lequel on éclaire en lumière cohérente un objet $T_P(x)$ (S est au foyer objet de L_1). Cet objet diffracte la lumière et on observe sa transformée de Fourier $T_Q(y)$ (ses fréquences spatiales) dans le plan focal image de L_2 (plan de Fourier)

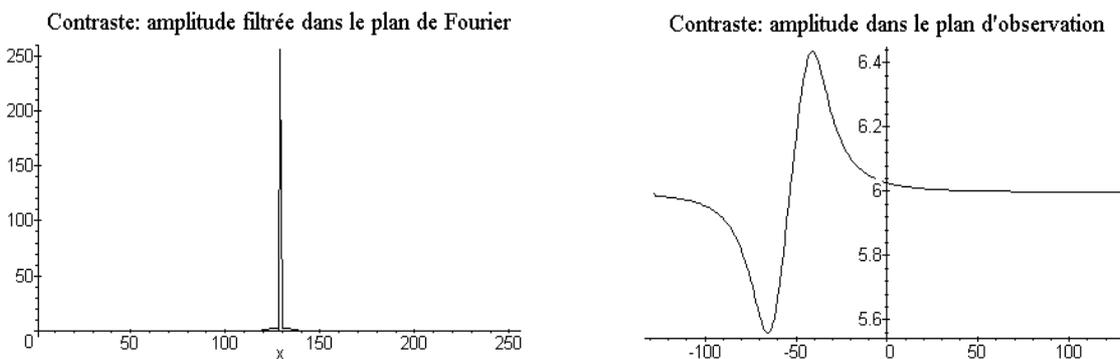
Après filtrage de ce spectre, on forme sa transformée de Fourier $T_E(z)$ dans le plan focal image de la lentille L_3 . L'éclairement sur l'écran E est alors proportionnel à $|T_E(z)|^2$



L'objet $T_P(x)$ choisi est un objet de phase: $T_P(x)=e^{i\phi(x)}$, par exemple une lame de verre d'épaisseur variable. La figure ci-dessus à gauche représente la phase $\phi(x)$ de cet objet. Sa transformée de Fourier $T_Q(y)$ est calculée par une première FFT et est représentée à droite (la FFT a été « dépliée »). On y voit la fréquence spatiale des oscillations de phase de l'objet, en particulier une valeur importante en 0 puisque $T_P(x)$ contient une importante composante continue : $T_P(x) = e^{i\phi(x)} \cong 1+i\phi(x)$, et donc $T_Q(y)=\delta(y)+iTF[\phi](y)$

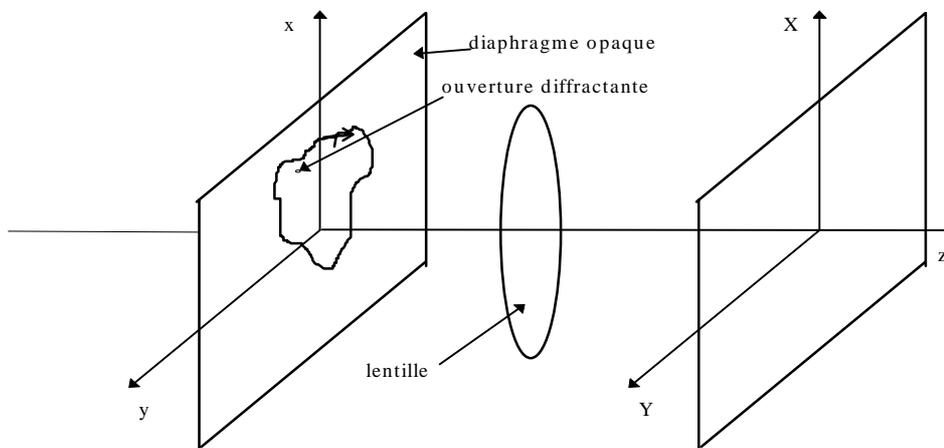


La strioscopie consiste à supprimer cette composante continue en plaçant au point F' du plan Q un petit écran. Au niveau de la FFT calculée $T_Q(y)$, il suffit d'annuler $T_Q(y=0)$. On obtient ainsi $T_Q(y)=iTF[\phi](y)$. L'amplitude sur l'écran E est alors: $T_E(z)=TF[iTF[\phi]](z)=i\phi(-z)$ et l'éclairement est $E(z)=\phi(-z)^2$. La strioscopie donne l'information sur la valeur absolue d'un objet de phase.



Le contraste de phase consiste à déphaser de $\pi/2$ la composante continue en plaçant au point F' du plan Q une lame quart d'onde. Au niveau de la FFT calculée $T_Q(y)$, il suffit de multiplier $T_Q(y=0)$ par $e^{i\pi/2}=i$. On obtient ainsi $T_Q(y)=i*\delta(y)+iTF[\phi](y)$. L'amplitude sur l'écran E est alors: $T_E(z)=TF[i\delta(y)+iTF[\phi](y)](z)=i+i\phi(-z)$ et l'éclairement est $E(z)=|i+i\phi(-z)|^2 \cong 1+2\phi(-z)$. Le contraste de phase donne l'information sur la phase et sur son signe.

IV Diffraction d'une onde plane par une ouverture



Une ouverture diffracte une onde plane. L'amplitude de cette onde $s(X,Y)$ dans le plan focal image d'une lentille convergente est directement reliée à la transformée de Fourier (bidimensionnelle) de la fonction de transparence $T(x,y)$ de l'ouverture.

On présente ici le cas d'un trou triangulaire percé dans un écran opaque. La fonction de transparence vaut 1 sur la surface du trou et 0 ailleurs.

ouverture diffractante triangulaire

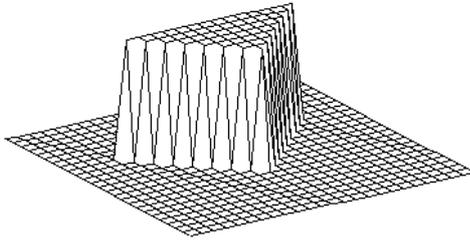
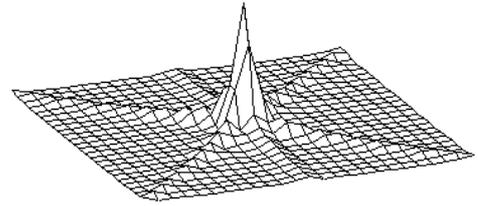


figure de diffraction



La FFT est conduite en opérant sur les lignes et les colonnes d'une matrice transparence:

$$t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$