

Quelques notions importantes sur les systèmes bouclés

L'objectif de ce cours est de présenter quelques notions générales sur les oscillateurs et les systèmes asservis. Le cours commence par une présentation sommaire de la transformée de Laplace qui sera l'outil principal utilisé pour formaliser les modèles employés. Il se poursuit par quelques définitions relatives aux systèmes bouclés et par une présentation de critères permettant de discuter de leur stabilité. On présente alors successivement le cas de systèmes rendus volontairement instables (les oscillateurs) puis le cas de systèmes pour lesquels on recherche absolument la stabilité (les systèmes asservis).

I. Présentation de la transformée de Laplace, application aux systèmes étudiés.

I.1. Systèmes étudiés:

Nous allons nous intéresser à des systèmes linéaires et invariants (ou stationnaires). Il s'agit de systèmes tels, que les relations entre les grandeurs d'entrée et les grandeurs de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (si le système n'est pas rigoureusement linéaire, on arrive tout de même souvent à le linéariser autour d'un point de fonctionnement...).

I.2. Transformée de Laplace:

La transformée de Laplace permet de remplacer les équations différentielles qui relient les grandeurs caractéristiques de nos systèmes par des relations à base de fractions rationnelles.

I.2.1. Définition.

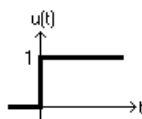
• Considérons une fonction f de la variable réelle t supposée nulle pour les valeurs négatives de t . La transformée de Laplace de f , notée F est une fonction de la variable complexe p définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt$$

Cette fonction n'est définie que pour les valeurs de p telles que l'intégrale converge... La convergence de cette intégrale impose notamment que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t) \cdot e^{-p \cdot t}) = 0$$

• rq: Les fonctions étudiées dans le cas des asservissements sont causales (nulles pour des valeurs de t négatives). Toutes les fonctions causales peuvent se mettre sous la forme du produit d'une fonction par l'échelon de Heaviside $u(t)$.



I.2.2. Propriétés.

- unicité.
- linéarité.

I.2.3. Formules.

Si L représente l'action "transformée de Laplace" et si $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, alors, on a les relations suivantes:

$$L[f(a \cdot t)] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$

$$L[e^{-\omega \cdot t} \cdot f(t)] = F(p + \omega)$$

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) - f(0^-)$$

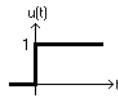
$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^-) - f'(0^-)$$

$$L\left[\int_0^t f(x) \cdot dx\right] = \frac{F(p)}{p}$$

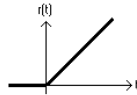
• Produit de convolution:
$$L\left[\int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau\right] = F(p) \cdot G(p)$$

I.2.4. Transformée de Laplace de signaux particuliers.

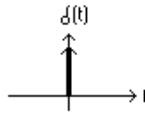
- échelon $u(t)$: $L[u(t)] = \frac{1}{p}$



- fonction rampe : $r(t) = a.t.u(t)$ $L[r(t)] = \frac{a}{p^2}$



- Impulsion de Dirac $\delta(t)$ (nulle partout sauf en 0 et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$) : $L[\delta(t)] = 1$



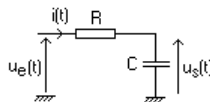
I.2.5. Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p.F(p))$$

Ce théorème est très utile pour déterminer le comportement d'un système en régime permanent.

I.3. Définition de la fonction de transfert à partir d'un exemple:

Pour ne pas perdre de temps dans des calculs pénibles, nous allons étudier l'exemple simple suivant



Ce système peut être décrit par l'équation différentielle suivante:

$$u_e(t) = R.i(t) + u_s(t) = R.C. \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

Si on suppose la capacité initialement déchargée ($u_s(0)=0$), alors, en utilisant la transformée de Laplace, on obtient la relation:

$$U_e(p) = R.C.p.U_s(p) + U_s(p) \text{ d'où la fonction de transfert du système}$$

$$\frac{U_s(p)}{U_e(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p}$$

Remarque: Pour l'instant, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la forme de $u_e(t)$... Cette façon de définir la fonction de transfert est donc beaucoup plus générale que celle qui ne concerne que les systèmes en régime sinusoïdal forcé ($p = j.\omega$)...

Exemples de réponses:

- réponse à un échelon.

Si $u_e(t) = E.u(t)$ ($u(t)$ = échelon de Heaviside), alors $U_e(p) = 1/p$. Dans ce cas, on a

$$U_s(p) = \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{1 + R.C.p}$$

que l'on peut décomposer en fraction rationnelle ce qui donne

$$U_s(p) = E. \left(\frac{1}{p} + \frac{-R.C}{1 + R.C.p} \right) = E. \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/R.C} \right)$$

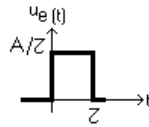
et en identifiant:

$$u_s(t) = E.u(t) - E.e^{-t/R.C}.u(t) = E.u(t).[1 - e^{-t/R.C}]$$

Ce qui est bien le résultat attendu...

- réponse à une fenêtre (impulsion de Dirac « réelle ») :

Cette fonction se présente sous la forme suivante (on a fait en sorte que son aire soit indépendante de τ):



avec $u_e(t) = (A/\tau).u(t) - (A/\tau).u(t - \tau)$

soit $U_e(p) = \frac{A/\tau}{p} \cdot (1 - e^{-\tau.p})$

Connaissant la fonction de transfert, on en déduit que

$$U_s(p) = \frac{A/\tau}{p} \cdot \frac{1}{1 + R.C.p} \cdot (1 - e^{-\tau.p})$$

et en identifiant

$$u_s(t) = (A/\tau).u(t).[1 - e^{-t/R.C}] - (A/\tau).u(t - \tau).[1 - e^{-(t-\tau)/R.C}]$$

- réponse à une impulsion de Dirac (« Aire » A)..

Cette réponse correspond à celle du cas précédent quand τ tend vers 0. On obtient alors

$$u_s(t) = (A/RC).e^{-t/R.C}.u(t)$$

- Cas du régime sinusoïdal forcé.

Si on pose $p=j.\omega$, la fonction de transfert prend la forme qu'on lui connaît en régime sinusoïdal forcé...ce régime correspond donc au cas particulier où p est imaginaire pur...

Remarque

Dans le cas où l'on considère des signaux quelconques, on peut définir les impédances des dipôles passifs en utilisant la transformée de Laplace :

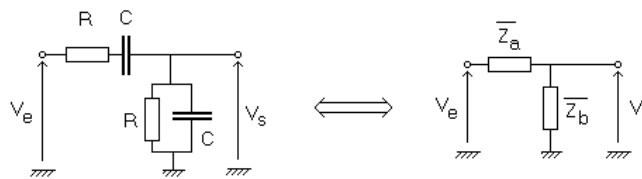
- Inductance : $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ donne $U(p) = L.p.I(p)$ soit $\overline{Z_L} = L.p$

- Condensateur : $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ donne $I(p) = C.p.U(p)$ soit $\overline{Z_C} = \frac{1}{C.p}$

Rq : Dans le cas particulier du régime sinusoïdal, $p = j.\omega$ et on retombe sur ce que l'on connaît déjà.

- Détermination de la fonction de transfert d'un filtre :

On considère le filtre suivant (on le retrouvera plus tard dans l'oscillateur à pont de Wien) :



La fonction de transfert de ce filtre vaut

$$\frac{\overline{V_s(p)}}{\overline{V_e(p)}} = \frac{\overline{Z_b}}{\overline{Z_a} + \overline{Z_b}}$$

avec $\overline{Z_a} = R + \frac{1}{C.p} = \frac{1 + R.C.p}{C.p}$ et $\overline{Z_b} = \frac{R}{R + \frac{1}{C.p}} = \frac{R}{1 + R.C.p}$

Finalement, on a

$$\frac{\overline{V_s(p)}}{\overline{V_e(p)}} = \frac{\frac{R}{1 + R.C.p}}{\frac{1 + R.C.p}{C.p} + \frac{R}{1 + R.C.p}} = \frac{1}{1 + \frac{(1 + R.C.p)^2}{R.C.p}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{R.C.p} + R.C.p} = \frac{1/3}{1 + (1/3) \cdot \left[R.C.p + \frac{1}{R.C.p} \right]}$$

Cette fonction de transfert correspond, en régime harmonique à un filtre passe-bande de fréquence centrale $1/(2.\pi.R.C)$.

II. Fonction de transfert et stabilité.

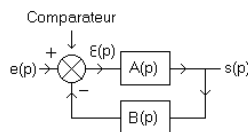
Dans cette partie, nous allons nous intéresser au problème de la stabilité des systèmes bouclés. Commençons par rappeler les définitions essentielles concernant ces derniers.

II.1. Rappels sur les systèmes bouclés.

Un système bouclé comprend au moins une boucle de rétroaction, destinée à ce que le signal d'entrée ait une action tempérée par le signal de sortie. L'objectif est souvent de permettre au système de réagir au mieux, sans action extérieure. Cependant, dans le cas des oscillateurs, le système bouclé est réalisé afin d'être maintenu dans un état instable.

II.1.1. Symbolique.

Un système bouclé peut se représenter par le schéma bloc suivant:



Dans un tel système, les blocs sont orientés. On peut notamment écrire que :

$$\varepsilon(p) = e(p) - B(p).s(p)$$

$$s(p) = A(p).\varepsilon(p)$$

On constate que le comparateur réalise une simple soustraction.

II.1.2. Définitions.

- ε est appelé signal d'erreur.
- $A(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne directe.
- $B(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne de retour.
- Le produit $A(p).B(p)$ représente la **fonction de transfert en boucle ouverte**.
- La **fonction de transfert en boucle fermée** du système est le rapport entre la sortie et l'entrée du système bouclé qui vaut

$$\frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

II.2. Exemples de définitions de la stabilité.

Il existe plusieurs façons d'aborder la notion de stabilité. On peut notamment retenir qu'un système sera dit stable (au sens strict), si

- une entrée constante conduit à une sortie constante.
- s'il est soumis à une impulsion de Dirac en entrée, il doit, après un transitoire, tendre vers sa position initiale de repos.

On pourrait trouver bien d'autres définitions pour aborder ce problème.

II.3. Exemples de critères permettant de juger de la stabilité d'un système.

Nous allons présenter quelques techniques pour aborder la stabilité d'un système. Il faut noter qu'il en existe beaucoup d'autres...

Critère algébrique

Pour qu'un système linéaire soit stable au sens strict, il faut que sa fonction de transfert **en boucle fermée** ne comporte pas de pôle à partie réelle positive ou nulle. Tous les pôles doivent donc être à partie réelle strictement négative.

Pour illustrer cette façon d'aborder le problème, nous allons nous intéresser à un système dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle à numérateur constant et on supposera, pour simplifier, qu'elle ne comporte

pas de pôle double. On envoie une impulsion de Dirac en entrée. La transformée de Laplace de la réponse est égale à celle de la fonction de transfert qui, compte tenu des hypothèses faites, peut se mettre sous la forme

$$S(p) = T(p) \cdot \delta(p) = T(p) = \frac{k}{\sum_{i=0}^n \beta_i \cdot p^i} = \frac{k'}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \sum_i \frac{\alpha_i}{p - p_i}$$

La réponse temporelle en sortie $s(t)$ peut donc s'écrire sous la forme

$$s(t) = \sum_i \alpha_i \cdot e^{p_i \cdot t} \cdot u(t)$$

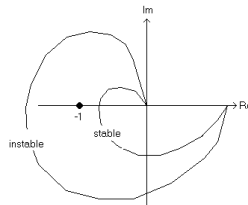
Si certains pôles p_i sont à partie réelle positive, on constate que la réponse $s(t)$ sera amenée à diverger quand t va tendre vers l'infini. Dans le cas de pôles à partie réelle nulle (pas de réel sens physique), il se peut que le système oscille.

Critère géométrique

Dans le cas d'un système bouclé, on peut s'intéresser à sa fonction de transfert en **boucle ouverte** (FTBO) ce qui va nous permettre de voir si la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) est stable ou non.

On trace le lieu géométrique défini par la FTBO en prenant $p=j\omega$ et on regarde la position de ce lieu par rapport au point -1 .

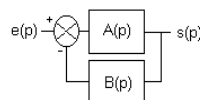
Si en parcourant le lieu pour des ω croissants, on laisse ce point sur la gauche, le système sera stable (critère du revers).



rq : Ce critère n'est **pas rigoureux**, mais est largement suffisant pour les fonctions de transfert usuelles. Les fonctions de transfert qui le mettent en défaut ne correspondent pas à des systèmes que nous étudierons par la suite... Si on veut être rigoureux, on peut utiliser le critère de Nyquist, mais ce dernier est bien complexe pour ce que nous allons chercher à faire...

rq : Pour un système stable, les risques d'instabilité augmentent quand le lieu se rapproche de -1 (à cause d'une dérive thermique par exemple). C'est pourquoi on doit également définir la **robustesse de stabilité** d'un système stable.

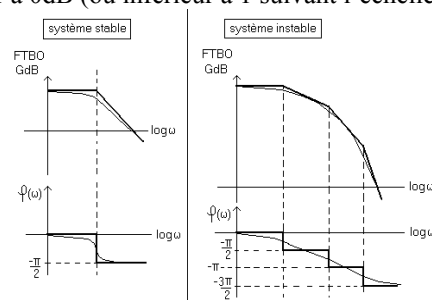
rq : Pour mieux comprendre pourquoi on s'intéresse à la FTBO, on peut se rappeler la structure d'un système bouclé et la forme de sa fonction de transfert.



$A(p) \cdot B(p)$ représente la FTBO et $T(p)$ la FTBF. Soit $T(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$

En régime harmonique, on comprend bien que lorsque $A(j\omega) \cdot B(j\omega)$ tend vers -1 , le module de la fonction de transfert va diverger, ce qui ne peut pas conduire à un fonctionnement stable...

rq : **Le diagramme de Bode de la FTBO** permet également de juger de la stabilité, au même titre que le critère du revers. Dans ce cas, on dit que le système est stable quand le diagramme de bode de la FTBO présente une phase de π pour un gain inférieur à 0dB (ou inférieur à 1 suivant l'échelle choisie).



II.4. Robustesse de stabilité.

Quand un système est stable il est intéressant de définir un critère permettant de quantifier l'écart de ses caractéristiques avec des caractéristiques instables. Pour cela, on peut par exemple définir la marge de phase, i.e. la différence qui existe entre la phase de la FTBO et la valeur de -180° quand le module vaut 1.

rq : On rappelle qu'il faut que la phase du système soit inférieure à -180° à cet instant.

rq : En pratique, on cherche souvent à s'assurer une marge de phase de 45° (i.e. une phase de FTBO de -135° quand le module vaut 1).

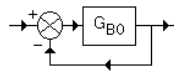
II.5. Influence du gain sur la stabilité.

Pour les systèmes bouclés usuels, on note qu'une augmentation du gain statique dans la boucle ouverte conduit souvent à se rapprocher d'un comportement instable, et même parfois à provoquer l'apparition d'oscillations.

Pour illustrer ce problème, nous allons supposer que nous avons réussi à identifier la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système physique quelconque. Supposons que la fonction de transfert en boucle ouverte soit de la forme suivante :

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{p.(1 + \tau_1.p).(1 + \tau_2.p)}$$

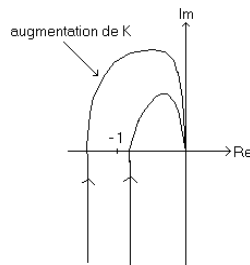
On réalise une rétroaction négative avec gain à retour unitaire. Le système bouclé peut alors être représenté par le schéma suivant



On va discuter de la stabilité du système finalement obtenu en fonction des paramètres (notamment de K) en utilisant les critères énoncés précédemment..

II.5.1. Approche graphique sur la boucle ouverte.

En utilisant un critère géométrique (critère du revers), on constate que la stabilité sera obtenue si l'image de G_{BO} dans le plan complexe passe à droite du point -1 .



Si on est amené à augmenter K, le module de G_{BO} va augmenter, ce qui signifie que le risque de voir passer la courbe à gauche du point -1 sera plus fort. Augmenter la gain de la boucle ouverte augmente donc le risque d'instabilité.

Pour un système de gain assez faible pour être stable, on peut calculer la marge de phase pour quantifier la robustesse de la stabilité.

II.5.2. Approche algébrique sur la boucle fermée.

Nous allons donner des valeurs aux différents paramètres. Supposons qu'après identification de la boucle ouverte, on arrive à

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{p.(1 + 3.p).(1 + 2.p)}$$

Alors en boucle fermée on aura

$$G_{BF}(p) = \frac{K}{6.p^3 + 5.p^2 + p + K}$$

Les valeurs de pôles de cette fonction de transfert sont les suivantes :

Si $K = 10$, ($p_1 = -1.48...$, $p_2 = 0.32... + 1.01...i$, $p_3 = 0.32... - 1.01...i$) système instable

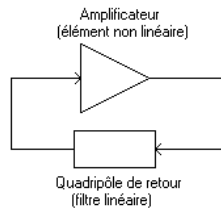
Si $K = 1$, ($p_1 = -0.86...$, $p_2 = 0.015... + 0.439...i$, $p_3 = 0.015... - 0.439...i$) système instable

Si $K = 1/10$, ($p_1 = -0.60...$, $p_2 = -0.11... + 0.12...i$, $p_3 = -0.11... - 0.12...i$) système stable

III. Systèmes rendus volontairement instables : les oscillateurs.

• Les oscillateurs se rencontrent dans tous les domaines de la physique. Ceux qui auront le plus d'importance pour nous dans la suite sont les oscillateurs optiques (par exemple le laser) ou électroniques (horloges, génération de signaux...). Dans ce cours, nous allons nous limiter aux seconds.

• En électronique, il existe des oscillateurs délivrant différentes formes de signaux de sortie. Nous allons nous intéresser à un cas particulier, celui des oscillateurs quasi-sinusoidaux. Ce type d'oscillateur doit comporter une cellule résonante (filtre passe bande). Cette dernière comportant forcément des éléments dissipatifs, il va falloir apporter de l'énergie pour maintenir le système en oscillation. Le signal en sortie du quadripôle va donc être amplifié avant d'être à nouveau injecté dans le quadripôle résonant (ce sont donc les sources de polarisation de l'amplificateur qui apportent l'énergie nécessaire pour obtenir une sortie sinusoïdale...l'oscillateur réalise une conversion continu-alternatif).



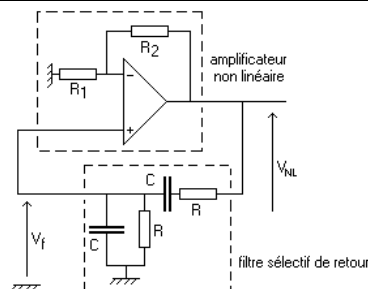
En théorie, un système de ce type peut rester en équilibre instable. Cependant, en pratique, la moindre perturbation électrique (bruit) va pousser le système hors de son état d'équilibre et les oscillations vont démarrer.

• Les oscillateurs constituent l'une des fonctions de base de l'électronique (analogique comme numérique...). Ils vont être utilisés pour cadencer le fonctionnement des systèmes (horloges de circuits numériques, montres...). Ils peuvent également être utilisés pour fabriquer directement des signaux classiques de tests en électronique (générateurs analogiques) ou pour fabriquer des porteuses en télécommunication ou en instrumentation.

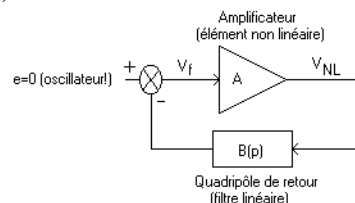
III.1. Etude d'un exemple détaillé : l'oscillateur à pont de Wien.

Nous allons désormais nous intéresser au cas particulier de l'oscillateur à pont de Wien. Cet oscillateur, quoi que peu performant, va nous permettre d'appliquer une méthode d'approche générale pour les oscillateurs de ce type. Nous allons tout d'abord faire apparaître la structure générale d'un oscillateur quasi-sinusoïdal en identifiant l'amplificateur et le filtre sélectif. Ceci étant fait, nous verrons la condition à vérifier pour que les oscillations apparaissent. Nous pourrons alors calculer les principales grandeurs attendues (fréquence et amplitude des oscillations notamment).

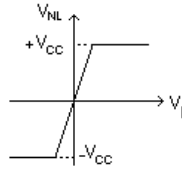
- Structure de l'oscillateur à pont de Wien. Identification des différents éléments.



On va essayer de se ramener à une symbolique de système bouclé classique (sauf qu'ici, on travaille à entrée nulle puisque l'on étudie un oscillateur...)



• Dans sa zone de fonctionnement linéaire, l'amplificateur a un gain $A=1+R_2/R_1$ (pour l'étude du démarrage, ce gain sera suffisant). Cependant la tension de sortie de l'amplificateur est limitée à la plage $[-V_{cc}; +V_{cc}]$. Sa caractéristique entrée-sortie, si on suppose l'amplificateur opérationnel parfait (excepté vis à vis de la saturation) est donc la suivante:



- Le filtre de retour est un filtre passe bande dont la fonction de transfert est la suivante

$$B(p) = \frac{-V_f}{V_{NL}} = - \frac{\frac{R}{1+R.C.p}}{\frac{R}{1+R.C.p} + R + \frac{1}{C.p}} = - \frac{R}{R + R + R^2.C.p + R + \frac{1}{C.p}} = \frac{-1}{3 + R.C.p + \frac{1}{R.C.p}} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + Q \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)}$$

(si on pose $\omega_0=1/RC$ et $Q=1/3$).

Calcul des caractéristiques de sortie.

- *Le démarrage des oscillations.*

Nous avons vu, lors de l'étude de la stabilité des systèmes bouclés qu'un tel circuit sera instable lorsque l'un des pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée a une partie réelle positive. Ces pôles sont les solutions de l'équation

$$A.B(p) = -1$$

Ils peuvent être calculés en résolvant l'équation

$$p^2 + \frac{\omega_0}{Q} \left(1 - \frac{A}{3} \right) p + \omega_0^2 = 0$$

On rappelle que $Q = 1/3$.

- Le déterminant de cette équation sera positif pour $A < 1$ ou $A > 5$. Dans ce cas, les racines sont réelles et valent

$$p_{\pm} = \frac{-3.\omega_0.(1 - A/3) \pm \sqrt{9.\omega_0^2.(1 - A/3)^2 - 4.\omega_0^2}}{2}$$

Si $A < 1$ les racines sont négatives (pas d'oscillations). Si $A > 5$ elles sont positives (oscillations).

- Si $1 < A < 5$, le déterminant est négatif et les racines sont complexes. On constate alors que leur partie réelle sera négative tant que $1 < A < 3$ (pas d'oscillations). En revanche, elle sera positive si $3 < A < 5$ (oscillations). Ces racines valent

$$p_{\pm} = \frac{-3.\omega_0.(1 - A/3) \pm j.\sqrt{-9.\omega_0^2.(1 - A/3)^2 + 4.\omega_0^2}}{2}$$

Le calcul des racines montre donc que le montage est instable pour $A > 3$. De plus, on peut dire que le démarrage sera pseudo-oscillant pour $3 < A < 5$ alors qu'il sera exponentiel croissant pour $A > 5$.

- *Le régime permanent: fréquence et amplitude des oscillations.*

- En régime permanent, la non linéarité de l'amplificateur se fait sentir et il n'est plus possible de raisonner aussi simplement que lors du démarrage. On va faire l'hypothèse dite du premier harmonique. Pour une amplitude de signal en entrée de l'amplificateur donnée, on regarde l'allure de la sortie (elle est affectée par la non-linéarité). De la sortie distordue, on extrait le premier harmonique. La non linéarité est alors modélisée par un gain linéaire $\bar{N}$ équivalent, rapport du premier harmonique de la sortie sur l'entrée (ce gain remplace le gain A de l'étude du démarrage).
- Une fois $\bar{N}$ calculé, la condition d'oscillation est donnée par

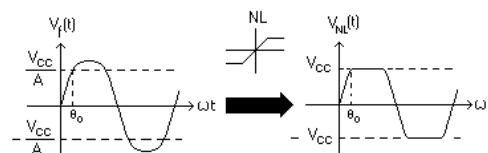
$$\bar{N}.B(j\omega) = -1$$

La résolution de cette équation complexe nous donnera la fréquence des oscillations ainsi que leur amplitude.

- Dans le cas de notre exemple, nous allons calculer $\bar{N}$.

Nous allons supposer que $V_f(t) = V \cdot \sin(\omega.t)$ (V et ω sont les inconnues que nous recherchons).

$V_{NL}(t)$ vaut $A.V_f(t)$ tant que $V_f(t)$ est inférieure, en valeur absolue, à V_{cc}/A . Sinon elle vaut $+V_{cc}$ ou $-V_{cc}$.



On constate que la non-linéarité n'introduit pas de déphasage (il n'y a pas d'hystérésis) ce qui signifie que le gain équivalent $\bar{N}$ sera réel. L'amplitude du premier harmonique de V_{NL} est notée V_{NL1} et elle vaut

$$V_{NL1} = \frac{2}{T} \int_T V_{NL}(t) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_{NL}(\theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\theta_0} A \cdot V \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta + \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V_{cc} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \right]$$

Sachant que $V_{cc} = A \cdot V \cdot \sin \theta_0$, on trouve

$$\bar{N} = \frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \left(\theta_0 + \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right)$$

- La condition $\bar{N} \cdot B(j\omega) = -1$ nous donne que

$$\boxed{\omega = \omega_0} \quad \text{et que} \quad \boxed{\bar{N} = \frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \left(\theta_0 + \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right) = 3} \quad \text{ce qui permet de trouver } V \text{ (approche graphique)}$$

rq : l'hypothèse du premier harmonique sera d'autant plus justifiée que les harmoniques ont peu d'incidence sur l'entrée de l'amplificateur, c'est à dire que le filtre de retour est sélectif.

III.2. Les améliorations indispensables pour un tel montage.

La relation $\bar{N} \cdot B(j\omega) = -1$ permet d'écrire $\text{Arg}(\bar{N}) + \text{Arg}(B(j\omega)) = \pi$ ce qui conduit à la fréquence d'oscillation. En différenciant la dernière relation, on trouve

$$\delta\theta + d\phi = 0 \quad (\phi \text{ argument de } B) \quad \text{soit} \quad \delta\theta = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} \cdot d\omega$$

on peut alors écrire que $\frac{\delta\omega}{\delta\theta} \approx \frac{-1}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}}$

Dans le cas du pont de Wien, on a

$$B(p) = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + Q \cdot \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)} \approx \frac{-\frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot j \cdot Q \cdot \frac{\delta\omega}{\omega_0}} \quad \text{soit} \quad \phi \approx \pi - \text{Arc tan} \left(2 \cdot Q \cdot \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right) \quad \text{et donc} \quad \frac{\delta\omega}{\delta\theta} \approx \omega_0 / 2 \cdot Q$$

Le fait que le filtre de retour ait un fort coefficient de qualité permet de rendre l'oscillateur moins sensible aux éventuelles variations d'état de l'amplificateur (si les variations donnent lieu une variation de phase de ce dernier...). C'est pourquoi on utilise souvent des oscillateurs à quartz, dans lesquels la cellule sélective de retour est réalisée à partir d'un composant piézoélectrique dont le comportement permet d'obtenir des facteurs de qualité supérieurs à 10000. Ce composant est notamment utilisé pour réaliser la seconde dans les montres...

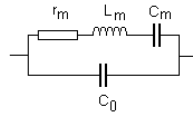
III.3. Exemple d'oscillateur.

III.3.1. Présentation du quartz.

- Le quartz est réalisé à partir d'un matériau piézoélectrique (constitué de silice SiO_2). Ce matériau présente une structure anisotrope et a pour particularité d'être le siège de couplages électromécaniques importants. On constate notamment que si le matériau est placé dans un champ électrique (on applique une d.d.p. à ses bornes), il va se déformer. Inversement, s'il est soumis à des efforts mécaniques, une différence de potentiel va apparaître à ses bornes. Cet effet est utilisé dans bon nombre de capteurs, de micro-actionneurs. Les piézoélectriques sont aussi utilisés pour réaliser des transformateurs (téléphones portables).

- Dans notre cas, on va appliquer une variation de champ électrique alternative. Celle-ci va induire une vibration dans le cristal. La fréquence de la vibration permet l'existence d'une onde stationnaire dans ce dernier. Il va entrer en résonance, résonance qui ne sera atténuée que par les pertes mécaniques qui sont très faibles.

- Electriquement, le comportement que nous venons de décrire peut être modélisé de la façon suivante :



La capacité C_0 représente physiquement une capacité (deux conducteurs séparés par un isolant). En revanche, les éléments r_m , L_m et C_m sont des éléments motionnels, c'est à dire des éléments électriques équivalents représentant le couplage électromécanique dans le matériau (on peut faire l'analogie avec le modèle électrique équivalent d'un haut-parleur). C'est pourquoi leurs valeurs ne correspondent pas à des composants électriques usuels.

ex.:

quartz 32768 Hz : $L = 7860\text{H}$; $C = 3\text{ fF}$; $r = 32000\ \Omega$; $C_0 = 1,5\text{ pF}$; $Q = 50000$

quartz 1MHz : $L = 4\text{H}$; $C = 6\text{ fF}$; $r = 240\ \Omega$; $C_0 = 8\text{ pF}$; $Q = 110000$

• Nous allons maintenant nous intéresser à l'impédance équivalente du composant en négligeant les pertes (pour simplifier les calculs). Dans la mesure où il s'agit d'une structure parallèle, nous allons travailler en admittance.

$$\bar{Y}(j\omega) = jC_0 \cdot \omega + \frac{1}{jL_m \cdot \omega + \frac{1}{jC_m \cdot \omega}} = jC_0 \cdot \omega + \frac{jC_m \cdot \omega}{1 - L_m C_m \cdot \omega^2} = j(C_0 + C_m) \cdot \omega \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}}$$

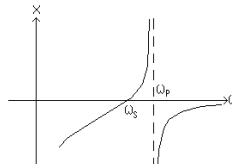
en posant $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_m \cdot C_m}}$ et $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_m \cdot \frac{C_0 \cdot C_m}{C_0 + C_m}}}$

ω_s est appelée **pulsation de résonance série** et ω_p **pulsation d'antirésonance parallèle**.

On remarque que ces deux pulsations sont très proches car $C_0 \gg C_m$. En effet

$$\frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_s} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_0}{C_0 + C_m}}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{C_m}{C_0}} - 1$$

L'impédance du quartz sans pertes est donc purement complexe. Si on pose $\bar{Z} = 1/\bar{Y} = jX$, X représente la réactance. Le tracé de son évolution en fonction de ω a l'allure suivante

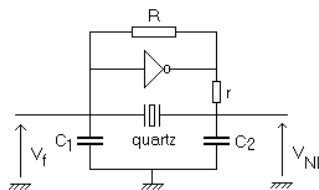


Le quartz est donc capacitif partout, sauf entre ω_s et ω_p où il est inductif. On observe une zone où l'impédance s'annule au voisinage de ω_s (dans la réalité, en raison de l'élément dissipatif r_m , l'impédance n'est pas nulle mais minimale dans cette zone). C'est ce qui explique que l'on observe une résonance de courant.

III.3.2. Exemple de réalisation d'oscillateur à quartz.

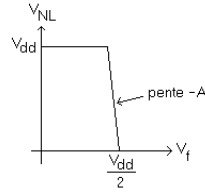
Il existe différentes structures possibles pour utiliser le composant décrit précédemment. Celle que nous allons donner est fréquemment utilisée pour réaliser les horloges dans les systèmes à microprocesseurs.

• Notre oscillateur comprend une non linéarité réalisée notamment à partir d'un inverseur logique (porte NAND à deux entrées reliées entre elles) et un filtre de retour très sélectif comportant un quartz et deux capacités. Le schéma complet est le suivant :



Etude des différents éléments.

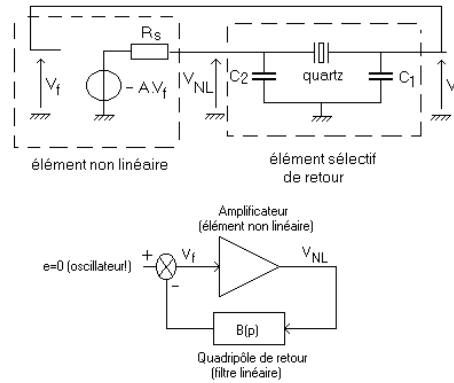
• La porte inverseuse a la caractéristique suivante :



L'impédance d'entrée de cette porte est infinie. De plus, en régime continu, l'impédance du circuit de retour l'est aussi. Grâce à la résistance R , la porte se retrouve donc polarisée au milieu de sa zone de basculement (là où le gain dynamique vaut $-A$). En effet, le courant qui traverse cette résistance est alors nul en statique ce qui garantit la relation $\langle V_f \rangle = \langle V_{NL} \rangle$. En revanche, ça ne sera évidemment plus le cas en régime dynamique.

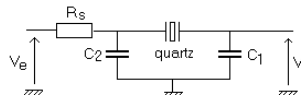
La résistance r permet juste de modifier la valeur de la résistance de sortie de la chaîne directe. Cette dernière sera la somme de r avec l'impédance de sortie de la porte. Elle sera notée R_s . On la prendra en compte dans l'élément sélectif de retour.

• Tant que les oscillations sont d'amplitude assez faible, on peut modéliser l'élément amplificateur comme une source de tension de gain $-A$ et une résistance de sortie R_s .



Par la suite, lorsque les oscillations correspondent au régime permanent, la non linéarité doit être modélisée par un gain équivalent correspondant à la réponse au premier harmonique. Sachant que la non linéarité n'introduit pas de déphasage, on peut dire que le gain équivalent au premier harmonique sera réel. Il sera, de plus, négatif.

• Le quartz est associé à deux capacités C_1 et C_2 , ce qui constitue le filtre sélectif de retour. On va intégrer R_s à la réponse du système et étudier le gain du suivant :



En utilisant le théorème de Thévenin pour représenter l'ensemble (V_e, R_s, C_2) , en supposant que l'impédance du quartz vaut jX , et en notant X_1 et X_2 les réactances des capacités C_1 et C_2 , on trouve que

$$\frac{\overline{V_s}}{\overline{V_e}} = \left(\frac{jX_2}{R_s + jX_2} \right) \cdot \left(\frac{jX_1}{jX + jX_1 + \frac{jX_2 \cdot R_s}{R_s + jX_2}} \right) = \frac{-X_1 \cdot X_2}{-X_2 \cdot (X + X_1) + jR_s \cdot (X_1 + X_2 + X)}$$

Si on exploite ce résultat dans le cadre du système bouclé, on en déduit que

$$B(j\omega) = \frac{X_1 \cdot X_2}{-X_2 \cdot (X + X_1) + jR_s \cdot (X_1 + X_2 + X)}$$

Condition de démarrage des oscillations.

Au démarrage, le gain de l'élément non linéaire vaut $-A$ (oscillation d'amplitude assez faible...pas d'effet non-linéaire). Dans ce cas, la condition limite de démarrage sera

$$1 - A \cdot B(j\omega) = 0$$

Cette condition impose notamment que $B(j\omega)$ soit réelle et donc que $X_1 + X_2 + X = 0$.

$$-\frac{1}{C_1 \cdot \omega} - \frac{1}{C_2 \cdot \omega} + X = -\frac{1}{\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot \omega} + X = -\frac{1}{C_{eq} \cdot \omega} + X = 0$$

La fréquence d'oscillation est donnée par l'intersection de $X(\omega)$ représentée précédemment avec la courbe d'équation $1/(C_{eq} \cdot \omega)$. La solution se trouve dans la zone où $X > 0$, là où le quartz se comporte de façon inductive. Elle est donc comprise entre ω_s et ω_p , qui sont deux fréquences très proches.

La condition de démarrage sur le gain est

$$A \geq \frac{1}{B(j\omega_0)} = \frac{-X_2 \cdot (X + X_1)}{X_1 \cdot X_2} = \frac{X_2}{X_1} = \frac{C_1}{C_2}$$

cette condition sera toujours remplie en prenant $C_1 = C_2$ car une porte inverseuse a toujours un gain $A \gg 1$ (penser que l'on commute de quelques volts en quelques mV).

Régime permanent.

Si on fait une modélisation de la non linéarité au premier harmonique, on constate que le gain équivalent $\bar{N}$ est réel (aucun déphasage introduit) et négatif. L'équation qui caractérise le régime permanent est alors la suivante :

$$1 + \bar{N} \cdot B(j\omega) = 0$$

(penser à un système qui donne une sortie finie avec une entrée nulle).

On constate que la solution qui donne la fréquence est exactement la même que celle que l'on avait pour le démarrage des oscillations. En régime permanent, la système va donc osciller à la pulsation ω_0 comprise entre ω_s et ω_p (là où le quartz est inductif).

remarques :

- La résistance motionnelle r_m (modélisant les pertes dans le quartz) a peu d'incidence sur la fréquence d'oscillation. On pourra donc légitimement la négliger pour prédéterminer le comportement de l'oscillateur.
- La température a en revanche une incidence notable sur la caractéristique $X(\omega)$ de l'oscillateur (et donc sur ω_s et ω_p). Elle peut donc faire fluctuer la fréquence d'oscillation. A plus long terme, le vieillissement va, lui aussi, faire dériver lentement la fréquence de l'oscillateur (une ppm par an environ).

Dans la pratique, on utilise un système intégré, dans lequel le circuit précédent est réalisé, ainsi que la mise en forme du signal de sortie. Il n'y a qu'à polariser l'ensemble. On peut alors obtenir une horloge de fréquence extrêmement stable.

Remarque : importance de la stabilité de fréquence pour une montre.

Si l'oscillateur d'une montre a une stabilité relative de 10^{-3} en fréquence, sur un an cela représente une dérive temporelle de 31356 s (un peu plus de 8h). En revanche, avec une stabilité relative de 10^{-6} , la dérive est inférieure à 32s.

IV. Système bouclé stable : application à l'asservissement d'une grandeur physique.

Dans la plupart des processus industriels, mais aussi dans bon nombre de procédés expérimentaux complexes (n'importe quelle expérience de physique de haut niveau), il est indispensable de maîtriser certains paramètres physiques.

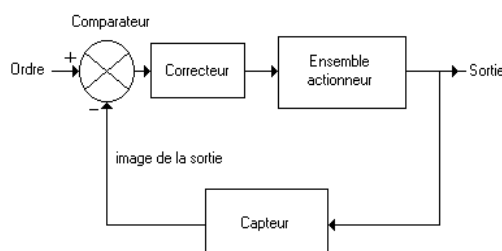
Exemples:

- Contrôler le débit d'une source électrique malgré les fluctuations imposées par sa charge.
- Contrôler les variations de vitesse d'un moteur.
- Température à réguler sans intervention humaine (corps humain, habitation...).
- Réglages fins automatisés dans une expérience d'optique.

Structure d'un système asservi:

Pour cela, on va être amené à concevoir des dispositifs dans lesquels un capteur rend compte de la sortie du système qui va devoir s'aligner sur ce que l'on a demandé en entrée. On a donc un système bouclé (réaction de la sortie sur le signal d'entrée).

On peut alors représenter le système par:



L'ordre donné en entrée est comparé avec l'image de la sortie fournie par le **capteur**. Le signal obtenu en sortie du **comparateur** (appelé souvent signal d'erreur ε) va permettre de commander la chaîne d'action composée de deux éléments principaux, le **correcteur** et l'**ensemble actionneur**.

Le rôle du correcteur est d'adapter le signal d'erreur afin d'obtenir une réponse optimale de l'actionneur. Les critères choisis peuvent être divers: précision, rapidité, stabilité... Nous verrons que ces derniers sont souvent antagonistes ce qui demande de faire des compromis. La forme du correcteur va dépendre des critères choisis...

L'actionneur est chargé de réaliser l'action demandée par l'ordre d'entrée, à partir du signal de sortie du correcteur. C'est en général l'élément qui apporte la puissance pour l'action.

remarque: Pour une action humaine, l'ensemble (comparateur-correcteur) sera réalisé par le cerveau alors que l'ensemble actionneur est constitué de l'ensemble (muscle-outil)... Le capteur peut être l'œil, l'oreille, le nez, la peau... Les animaux qui parviennent à maintenir leur température constante ont un métabolisme mettant en jeu un système rétroactionné.

Définitions:

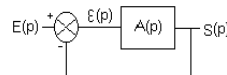
- Quand la grandeur de sortie suit une grandeur d'entrée qui varie dans le temps, on parle d'**asservissement** (asservissement de vitesse, de position...).
- Quand la grandeur de sortie suit une grandeur d'entrée constante, on parle plutôt de **régulation** (régulation de température, de pression...).

IV.1. Que cherche-t-on en réalisant un asservissement ?

Nous avons vu que le premier problème, quand on intègre un système physique dans une boucle fermée, c'est de savoir si l'ensemble va fonctionner de façon stable. Une fois que l'on s'est assuré d'une stabilité satisfaisante (assez robuste pour résister aux éventuelles fluctuations du système), il est possible d'améliorer certains aspects de la réponse du système bouclé, notamment la rapidité et la précision.

IV.1.1. Précision.

Obtenir une bonne précision consiste à faire en sorte que la sortie du système finisse par tendre vers une valeur la plus proche possible de l'entrée. L'objectif est d'atteindre systématiquement (après un transitoire) un état de la sortie parfaitement défini, quelque soit l'état du système (penser au problème que peut poser la dérive d'un gain). Pour illustrer ce point, on va supposer que le système se présente sous la forme suivante :



Améliorer la précision revient à dire que l'on cherche à **minimiser le signal d'erreur $\varepsilon(t)$** quand t tend vers l'infini. En général, on a accès à la fonction de transfert. Il est, par conséquent, plus simple de travailler en variable de Laplace. C'est pourquoi on va utiliser le **théorème de la valeur finale** défini précédemment, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

Le système sera donc réellement précis quand

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{E(p)}{1 + A(p)} = 0$$

Il faut noter que la précision dépend de la nature du signal d'entrée.

Exemples :

- Considérons un système du premier ordre en boucle ouverte tel que

$$A(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On attaque ce système par un signal échelon. On a donc

$$E(p) = \frac{a}{p}$$

Dans ce cas l'erreur au bout d'un temps suffisamment long sera de la forme

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{a}{1 + K}$$

Pour diminuer cette erreur, on peut chercher à augmenter K , mais on risque alors de rendre le système instable si ce dernier n'est pas un « vrai premier ordre ». Tant que l'erreur statique n'est pas nulle, l'état de la sortie dépend de l'état du système à travers K .

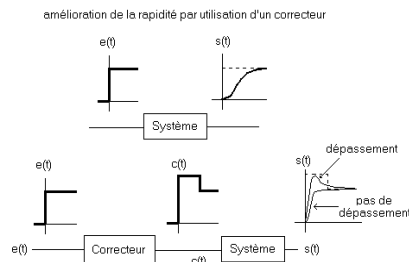
- Supposons maintenant que le système soit tel que

$$A'(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$$

Dans ce cas, si on applique un signal échelon en entrée, on aura une erreur ε qui tend vers 0 au bout d'un temps suffisamment long. La fonction de transfert $A'(p)$ peut être vue comme le produit de $A(p)$ par $1/p$. Ce dernier terme correspond à une intégration, opération que l'on peut réaliser avec un étage correcteur dont nous verrons la réalisation par la suite.

IV.1.2 Rapidité.

Cette fois on s'intéresse à la durée nécessaire pour que le système atteigne le régime permanent. La rapidité est liée à la valeur des paramètres du système (un système physique est en général d'autant plus rapide que sa bande passante est élevée...on peut par exemple penser à un système du premier ordre pour s'en convaincre). Pour améliorer la rapidité du système, on va devoir agir sur le signal d'entrée...ce sera le rôle du correcteur, qui va en général augmenter l'amplitude du signal au moment de la transition...



L'inconvénient est que cela peut conduire à un dépassement...c'est alors à l'utilisateur de faire un compromis entre avantages et inconvénients afin d'optimiser son asservissement...

Augmenter la rapidité d'un système revient à augmenter sa bande passante (donc à diminuer ses constantes de temps !). Cela revient la plupart du temps à rapprocher le système d'un régime de fonctionnement instable.

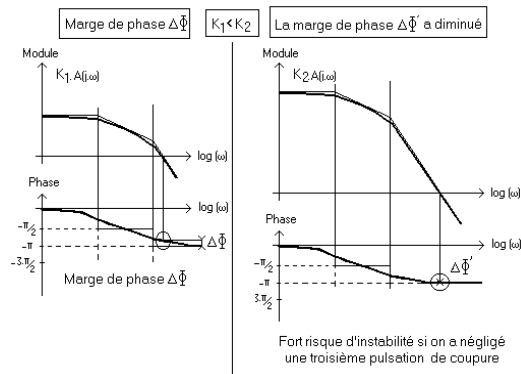
IV.2. Intérêt d'un élément correcteur.

Le correcteur est placé dans la chaîne directe. Il peut se présenter sous forme d'un circuit analogique ou sous forme d'un système numérique (convertisseur analogique numérique, mémoire, calculateur et convertisseur numérique analogique). Les correcteurs les plus simples réalisent principalement des fonctions de type « proportionnelle », « intégrale », « dérivée » ou une combinaison de certaines d'entre elles. On peut envisager d'autres actions (retard, ...) mais elles ne seront pas traitées par la suite.

IV.2.1. L'action proportionnelle.

- Une action proportionnelle permet de substituer, en entrée de la chaîne d'action, le signal $\varepsilon(t)$ à un signal $K\varepsilon(t)$ où K est un simple gain réel. Son rôle sera de dilater l'effet de l'erreur pour que le système réagisse de façon plus violente (comme si l'erreur était plus importante qu'elle n'est en réalité). Le risque d'un gain trop fort est l'apparition de dépassements qui peuvent être préjudiciables (surintensité mortelle pour le système électronique, ou dépassement de position d'un bras de robot à proximité d'un mur ou d'une personne...).

- Un gain trop élevé peut donc contribuer à rendre un système plus instable. On peut donner l'exemple d'un système modélisé par un filtre passe-bas du second ordre associé à un gain K . L'augmentation de K va contribuer à diminuer la marge de phase du système (théoriquement inconditionnellement stable). Si le système comporte en fait une coupure supplémentaire négligée dans le modèle, il risque fort de devenir instable...



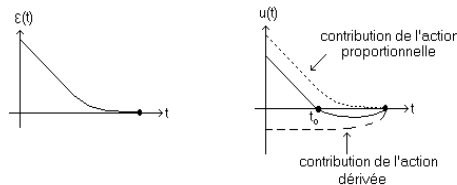
IV.2.2. L'action dérivée.

Cette action va permettre de fournir, en entrée du processus à commander, un signal qui va dépendre du signe et de la vitesse de variation de l'erreur ε .

Supposons que l'on veuille positionner un objet très proche d'un mur sans risque de choc avec ce dernier (bras de robot, navire qui accoste). Si on a recours à une action proportionnelle dérivée, le signal $u(t)$, construit par le correcteur à partir de $\varepsilon(t)$ sera de la forme

$$u(t) = K_p \left[\varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]$$

On peut alors mettre en parallèle les deux signaux et essayer d'expliquer leurs allures respectives.



On constate que, dans un premier temps, l'action proportionnelle est prépondérante (c'est elle qui va permettre une convergence rapide vers une erreur faible). Cependant, dans le cas d'une simple action proportionnelle, on aurait risqué de dépassement (imaginer un bateau qui se rapproche d'un quai sans pouvoir inverser la rotation des hélices... il s'écraserait sur le quai entraîné par son inertie...).

A partir de t_0 , le signal $u(t)$ qui commande le processus s'inverse et c'est l'action dérivée qui devient prépondérante (même si elle décroît en amplitude). Cette action va tempérer l'action proportionnelle et ainsi permettre une approche en douceur, sans dépassement de la position souhaitée. La conjonction des deux actions permet donc une convergence rapide (action proportionnelle) et stable (action dérivée qui évite un dépassement).

IV.2.3. L'action intégrale.

On attend souvent d'une action intégrale de supprimer une erreur statique. Tant qu'une erreur statique ε subsiste, elle va être intégrée ce qui va conduire à un signal en sortie du correcteur (entrée de la chaîne d'action) de plus en plus important. Le système va donc agir pour limiter l'erreur.

La commande intégrale peut être considérée comme progressive mais persévérante. Un automobiliste qui appuie sur l'accélérateur jusqu'à atteindre la vitesse désirée et maintenant l'accélérateur afin de conserver une vitesse constante réalise une action proportionnelle intégrale.

IV.3. Problème de la modélisation et de l'identification du système.

Pour asservir un système de façon convenable, il est nécessaire de connaître certaines de ses caractéristiques, afin d'élaborer un correcteur qui permettra d'obtenir des réponses plus satisfaisantes (rapidité de la réponse, précision...). Pour cela, deux approches (souvent complémentaires) sont possibles.

On peut soit élaborer un modèle physique de la chaîne à commander (modèle de connaissance), soit tester directement la réponse de cette dernière à des signaux particuliers et en déduire une forme approchée de la fonction de transfert (modèle de comportement). On se moque alors de ce qu'il y a dans le système... La première approche permet de comprendre le rôle des différents paramètres, ce qui la rend indispensable lorsque l'on cherche à réaliser une optimisation. En revanche, l'identification correcte d'un tel modèle est souvent délicate.

IV.3.1. Représentation des systèmes au moyen de modèles physiques.

C'est l'approche la plus satisfaisante pour le physicien, mais ce n'est pas toujours la plus efficace. En effet, elle est longue à mettre en œuvre et elle est dépendante des imperfections des modèles et de l'identification... Néanmoins, elle peut se révéler utile pour commander des systèmes complexes car elle permet d'avoir une idée approchée du rôle des différents paramètres... Le modèle obtenu est appelé **modèle de connaissance**...

• Principe.

Cette approche nécessite de connaître les caractéristiques physiques du système à commander. On obtient alors des systèmes d'équations différentielles que l'on va éventuellement devoir linéariser autour de points de fonctionnement. Au moyen de la transformée de Laplace, on peut alors remonter à la fonction de transfert du système.

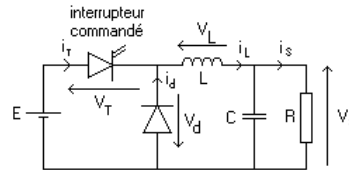
Cette approche est longue à mettre en œuvre, car il faut mesurer un à un les paramètres du modèle... Elle n'est pas toujours très fiable. En effet, on est à la merci des erreurs de mesures lors de l'identification. De plus, un modèle est toujours une image (plus ou moins) simplifiée du réel...

Néanmoins, si elle est bien conduite, elle va permettre de prévoir le comportement du système et éventuellement de le modifier pour optimiser certains paramètres, afin de rendre la commande plus facile et plus performante...

- Exemple d'une alimentation régulée (réalisée à partir d'un hacheur).

Le hacheur est un convertisseur d'énergie qui permet de réaliser une conversion du continu fixe vers du continu variable. Dans notre exemple, nous allons nous intéresser au cas particulier d'un hacheur série dont on peut commander le rapport cyclique.

Aspect statique (principe de fonctionnement du hacheur série).



La charge est constituée par la résistance R. Les éléments L et C forment un filtre dont le but est de limiter l'ondulation résultant du découpage sur la tension et le courant de sortie. Si ces éléments sont correctement calculés, on peut supposer que i_s et v_s sont continus (on néglige l'ondulation résiduelle). L'ensemble (filtre + charge) peut être composé différemment, mais nous raisonnerons sur cet exemple par la suite.

Le cycle de fonctionnement, de période de hachage T ($T=1/f$), comporte deux étapes.

- Lors de la première, on rend le transistor (interrupteur commandé) passant et la diode, polarisée en inverse, est bloquée. Cette phase dure de 0 à $\alpha.T$, avec α compris entre 0 et 1. α est appelé rapport cyclique.

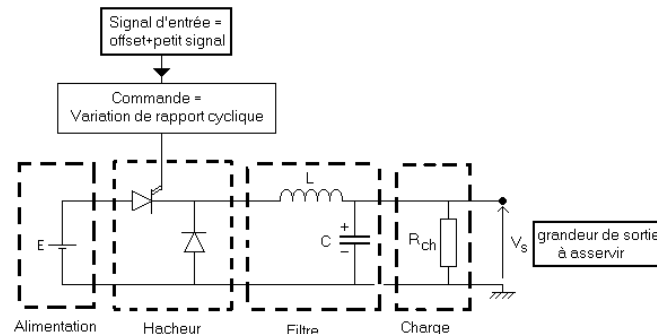
- Lors de la seconde, on bloque le transistor. La diode devient passante. Cette phase dure de $\alpha.T$ à T.

Globalement, dans des conditions optimales de fonctionnement, on a

$$V_s = \alpha.E$$

Principe de la commande.

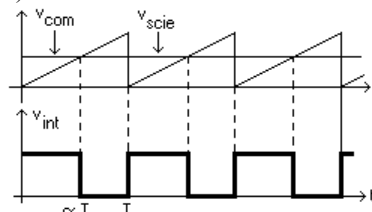
Nous allons nous intéresser au cas d'un hacheur série décrit au paragraphe précédent



- On suppose que les ondulations de courant sont négligeables (inductance suffisamment forte et fréquence de hachage élevée), ce qui justifie de raisonner en valeur moyenne. On suppose alors que

$$V_s = \alpha.E \quad \text{où } \alpha \text{ est le rapport cyclique proportionnel à la tension de commande.}$$

- Pour obtenir α , on compare la tension d'entrée (v_{com} = tension de commande) à un signal en dents de scie (v_{scie}) généré par la partie commande du hacheur. Le fruit de la comparaison est le signal de commande (v_{int}) envoyé sur les transistors (IGBT ou MOS).



Si la dent de scie est de pente λ , alors on a

$$\lambda \cdot \alpha.T = v_{com} \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{v_{com}}{\lambda.T}$$

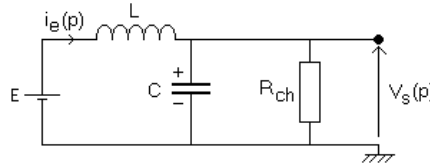
- La relation entre v_{com} et V_s peut donc se mettre sous la forme d'un gain statique G_0 avec

$$G_0 = \frac{E}{\lambda \cdot T}$$

Aspect dynamique de la commande du hacheur.

Pour commander notre système, nous allons supposer que la tension E délivrée par l'alimentation stabilisée est constante et que le paramètre d'entrée susceptible de varier est le rapport cyclique α (on va faire fluctuer la tension v_{com} d'entrée). Suivant l'état de l'interrupteur commandé, le hacheur va se présenter comme l'un des deux circuits suivants :

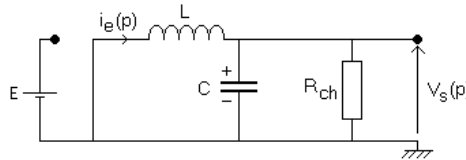
• Lors du premier, sur l'intervalle de temps $[0 ; \alpha T]$, le transistor est passant et la diode est bloquée. On se retrouve donc avec un circuit dans l'état suivant :



Ce qui nous conduit aux équations suivantes :

$$E = L \cdot p \cdot i_e(p) + V_s(p) \quad (1) \quad \text{et} \quad i_e(p) = C \cdot p \cdot V_s(p) + \frac{V_s(p)}{R_{ch}} \quad (2)$$

• Lors du second, sur l'intervalle de temps $[\alpha T ; T]$, le transistor est bloqué et la diode passante ce qui correspond à un nouveau circuit :



On en déduit les deux équations suivantes :

$$0 = L \cdot p \cdot i_e(p) + V_s(p) \quad (3) \quad \text{et} \quad i_e(p) = C \cdot p \cdot V_s(p) + \frac{V_s(p)}{R_{ch}} \quad (4)$$

• **Modèle moyen :** En supposant que la fréquence de découpage est très grande devant les fréquences caractéristiques du système et les évolutions de l'entrée α , on peut supposer que le comportement de ce dernier correspond à la moyenne temporelle des deux circuits. La réponse obtenue est celle que l'on obtient en faisant la moyenne temporelle de (1) et (3) puis la moyenne de (2) et (4). On est donc ramené à deux nouvelles équations :

$$\alpha(p) \cdot E = L \cdot p \cdot i_e(p) + V_s(p) \quad \text{et} \quad i_e(p) = C \cdot p \cdot V_s(p) + \frac{V_s(p)}{R_{ch}}$$

d'où la réponse :

$$\frac{V_s(p)}{\alpha(p)} = \frac{E}{1 + \frac{L}{R_{ch}} \cdot p + L \cdot C \cdot p^2} = \frac{A}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2}$$

Nous verrons que cette réponse est celle d'un système passe-bas du second ordre de caractéristiques suivantes

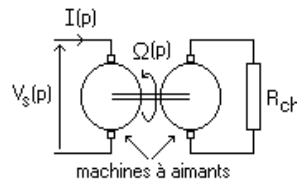
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2 \cdot R_{ch}} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le fait d'avoir suivi cette démarche nous permet, par exemple, de comprendre que pour obtenir un système suffisamment amorti ($m > 1$), il va falloir travailler avec une résistance de charge assez faible (forte charge) et une inductance la plus forte possible... On prévoit ainsi l'incidence des différents paramètres sur le comportement global du système...

Exemple de la réponse en courant et en vitesse d'une machine à courant continu.

Nous allons nous intéresser à une machine à aimants (on ne contrôle pas le flux d'excitation). Nous allons supposer que l'induit de la machine est de résistance R , d'inductance L (cette inductance comprend également l'inductance de lissage en sortie du hacheur quand on alimente la machine avec ce type de convertisseur) et que sa f.e.m. à vide E_v est donnée par la relation $E_v = K \cdot \Omega$, si Ω est la vitesse de rotation. Nous supposons que

l'ensemble fixé à l'arbre de la machine est de moment d'inertie J et que le moment du couple de frottement est $C_f = f.\Omega$ (frottement visqueux).



rq : le banc de machine utilisé a des frottements secs importants ce qui conduit à un couple de frottements de forme $C = C_0 + f.\Omega$. Cependant si la machine est chargée par une génératrice, on verra que le couple résistant appliqué par cette dernière est un couple de forme $C_r = K'.\Omega$ ce qui permet de dire que le couple qui s'oppose au couple moteur a un moment pratiquement proportionnel à Ω .

Le modèle va permettre d'écrire les relations suivantes

- Equation électrique: $V_s(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + K.\Omega(t)$

soit en variable de Laplace $V_s(p) = R.I(p) + L.p.I(p) + K.\Omega(p)$

d'où $I(p) = \frac{1}{L.p + R} [V_s(p) - K.\Omega(p)]$

- Equation mécanique: $J.\frac{d\Omega(t)}{dt} = K.i(t) - f.\Omega(t) - C_{ch}(t)$

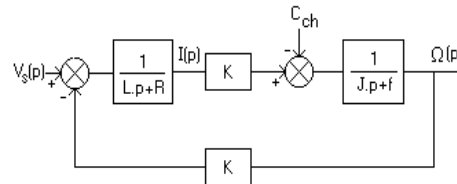
soit en variable de Laplace $J.p.\Omega(p) = K.I(p) - f.\Omega(p) - C_{ch}(p)$

ce qui permet d'écrire que $\Omega(p) = \frac{1}{J.p + f} [K.I(p) - C_{ch}(p)]$

rq: $C_{ch}(t)$ est le moment du couple de charge

- Schéma bloc :

finalement, on peut représenter le moteur par le schéma suivant:



- Fonction de transfert tension-courant:

Si on suppose que la charge mécanique de notre moteur est une génératrice à courant continu débitant sur une charge R_{ch} , alors on peut dire que

$$C_{ch} = K.I_{ch} = K.\frac{E}{R_{ch}} = \frac{K^2}{R_{ch}}.\Omega \quad \text{soit} \quad C_{ch} = \frac{K^2}{R_{ch}}.\Omega = K'.\Omega$$

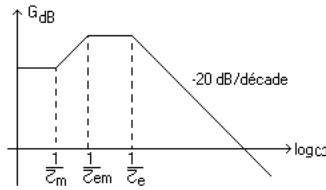
Compte tenu des équations précédentes, on a alors

$$T_1(p) = \frac{I(p)}{V_s(p)} = \frac{J.p + f + \frac{K^2}{R_{ch}}}{K^2 + (L.p + R).(J.p + f + \frac{K^2}{R_{ch}})}$$

Pour les fréquences élevées, ce système va avoir un comportement identique à un passe-bas du premier ordre. C'est pourquoi, en pratique, quand on cherche à asservir le courant dans un tel système, on l'identifie souvent comme tel. Moyennant quelques hypothèses, on peut préciser davantage l'allure de la fonction de transfert. Si on suppose que le dénominateur de la fonction de transfert permet de faire apparaître des constantes de temps (que nous appellerons τ_e et τ_{em}), alors on peut écrire que

$$T_1(p) = A.\frac{(1 + \tau_m.p)}{(1 + \tau_e.p).(1 + \tau_{em}.p)}$$

Pour de nombreuses machines (inertie mécanique assez forte...), on a $\tau_e \ll \tau_{em} \ll \tau_m$. Dans ce cas, on peut donner le diagramme asymptotique de Bode suivant:



- Fonction de transfert tension-vitesse:
Pour le système utilisé, on a vu que

$$C_{ch} = \frac{K^2}{R_{ch}} \cdot \Omega = K' \cdot \Omega$$

Par calcul, on peut montrer que

$$T_{\Omega}(p) = \frac{\Omega(p)}{V_s(p)} = \frac{K_m}{1 + (T_{em} + \mu \cdot T_e) \cdot p + T_e \cdot T_{em} \cdot p^2}$$

avec $K_m = \frac{K}{K^2 + R \cdot (f + K')}$, $\mu = \frac{R \cdot (f + K')}{K^2 + R \cdot (f + K')}$, $T_e = \frac{L}{R}$, $T_{em} = \frac{R \cdot J}{K^2 + R \cdot (f + K')}$

Cette fonction correspond à un comportement de type second ordre. Elle peut être simplifiée en faisant certaines hypothèses sur la machine employée.

rq : on remarque qu'une variation de la charge entraîne une modification du modèle du système.

IV.3.2. Modélisation par une approche de type "boîte noire".

Cette fois, on se contente de savoir quelles sont les entrées et quelles sont les sorties. On envoie des signaux de test sur les entrées (créneaux, sinusoïde...) et l'étude des sorties nous conduit à un modèle mathématique du système. On parle alors de **modèle de comportement**.

Lorsque l'on met au point une modélisation très fine des systèmes que l'on étudie, on va souvent arriver à des modèles complexes et donc à des fonctions de transfert qui dépendent de très nombreux paramètres. C'est parfois intéressant pour comprendre l'incidence de différentes grandeurs physiques sur le comportement d'un système. En revanche, c'est très souvent difficile à exploiter directement en pratique. En effet, les paramètres sont d'autant plus difficiles à identifier précisément qu'ils sont nombreux. Pour identifier un modèle, par exemple lorsque l'on va chercher à asservir un système, on va souvent se contenter d'identifier un modèle simple (peut être parfois simpliste... c'est à l'expérimentateur de juger jusqu'où il peut aller). Pour nous, ce sera souvent un système passe bas du premier ou du second ordre.

rq : pour la coupure haute, elle s'explique par le fait que tout système physique cesse de répondre lorsqu'on le sollicite trop rapidement. La bande passante des systèmes n'est évidemment pas toujours aussi simple que celle d'un passe bas mais nous contenterons d'étudier ce type de cas par volonté de simplification. Par ailleurs, il arrive qu'un système plus complexe qu'un passe-bas puisse être considéré comme tel lorsque le spectre du signal d'entrée est assez étroit.

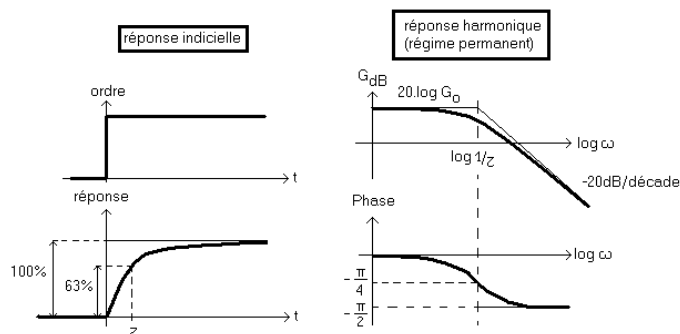
- Filtre passe-bas du premier ordre.

En terme de variable de Laplace, le gain d'un tel système va s'écrire de la façon suivante :

$$G(p) = \frac{G_0}{1 + \tau \cdot p}$$

G_0 et τ sont les paramètres caractéristiques du modèle (τ est la constante de temps).

Pour identifier le système, on choisira soit la réponse à un échelon, soit la réponse fréquentielle.



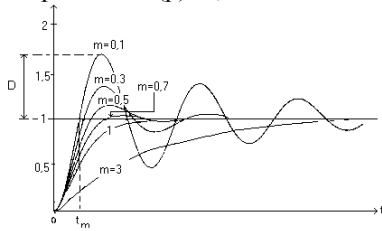
• Filtre passe-bas du second ordre.

En terme de variable de Laplace, le gain d'un système passe-bas du second ordre peut s'écrire de la façon suivante

$$G(p) = \frac{G_0}{1 + 2.m.\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

G_0 , m et ω_0 sont les paramètres caractéristiques (m est le coefficient d'amortissement).

Pour la réponse à un échelon, on obtient une réponse telle que celle qui est présentée sur la figure suivante. On a représenté $G(p)/G_0$ en fonction du temps pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement.



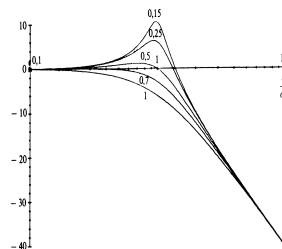
- si $m > 1$: pas de dépassement.
- si $1 > m > 1/\sqrt{2}$: dépassement sans pseudo-oscillations.
- si $m < 1/\sqrt{2}$: dépassement et pseudo-oscillations.

A partir de la mesure de t_m et de D , on peut remonter aux valeurs des trois paramètres qui interviennent dans le modèle. Pour cela, on va utiliser des tables.

m	$t_m \cdot \omega_0$	D (%)
0,1	1,68	73
0,15	1,74	62
0,2	1,81	53
0,25	1,88	44
0,3	1,97	37
0,35	2,06	31
0,4	2,16	25
0,45	2,28	21
0,5	2,42	16
0,55	2,58	12,6
0,6	2,77	9,5
0,65	3,00	6,8
0,7	3,29	4,6
0,75	3,66	2,84
0,8	4,16	1,52
0,85	4,91	0,63
0,90	6,17	0,15
0,95	9,09	0,01

Pour la réponse fréquentielle, on ne s'intéresse qu'au régime permanent atteint, lorsque l'on applique une entrée sinusoïdale. La fonction de transfert est de la forme

$$G(j.\omega) = \frac{1}{1 + 2.j.m.\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j.\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

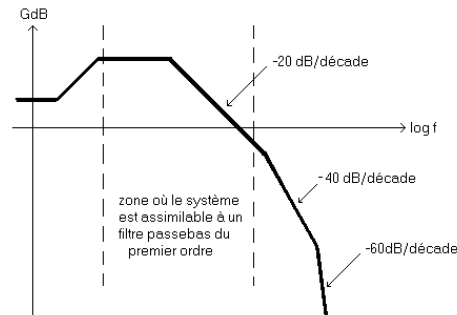


On constate que le Bode d'amplitude se situe sous le diagramme asymptotique quand m est supérieur à 1 alors qu'il est au dessus dans le cas contraire. On observe alors une pseudo résonance (penser au cas du sacro-saint circuit RLC et à la résonance de tension qui n'est observée que pour des valeurs assez faibles de

résistance...). On peut également vérifier que les constantes de temps ne seront **séparables** que lorsque **m sera supérieur à 1** (pas de pseudo-résonance). La phase décroît, quant à elle, progressivement de 0 à $-\pi$.

• Pourquoi peut-on souvent se ramener à des systèmes d'ordre 1 ou 2 ?

Considérons par exemple un système dont la réponse fréquentielle aurait l'allure suivante :



Il ne s'agit manifestement pas d'un passe-bas du premier ordre. Cependant, si les harmoniques du signal d'entrée, sont tous (du moins ceux de puissance notable) compris dans la plage de fréquence telle que le gain est constant ou décroît à -20 dB/décade, la réponse en sortie sera la même que pour un passe bas « pur sucre ». En identifiant un passe-bas du premier ordre, on ne rend pas compte de toute la complexité du système étudié et le modèle risque de se révéler insuffisant si la sollicitation d'entrée présente un spectre plus large. Cependant, dans bien des cas, on peut se contenter d'une telle approche.

rq : l'exemple présenté correspond à la réponse en courant d'un moteur à courant continu (moteur + capteur).

• Cas d'un système présentant un retard (exemple parmi d'autres...).

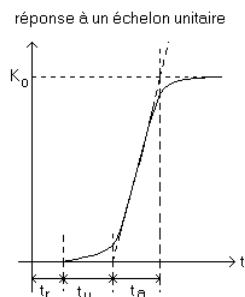
Quand le système présente un retard, que la réponse est apériodique et ne comporte qu'un point d'inflexion, on peut avoir recours à la méthode de Strejc.

L'objectif est de représenter le système par un modèle approché de type

$$G = \frac{K_0 \cdot e^{-\tau \cdot p}}{(1 + T \cdot p)^n}$$

K_0 , n , τ et T sont les paramètres à déterminer.

Pour cela, on envoie l'échelon en entrée et on déduit les paramètres de la réponse en relevant les paramètres t_r , t_u et t_a .



On détermine K_0 en faisant le rapport entre la valeur statique de la réponse en sortie et celle de l'échelon d'entrée. T et n sont déterminés à partir du tableau suivant

n	1	2	3	4	5	6
t_u/t_a	0	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493
t_a/T	1	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699

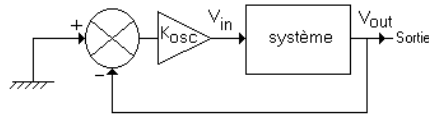
Si on obtient directement une valeur exacte de n , alors $t_r = \tau$. Sinon, on prend la valeur n entière directement inférieure et on calcule à partir du tableau une valeur t'_u . On aura alors

$$\tau = t_r + (t_u - t'_u)$$

Il existe bon nombre de méthodes de ce genre, toutes aussi empiriques, qui permettent d'obtenir une identification convenable pour des systèmes particuliers...

• remarque importante : il n'est pas toujours indispensable de connaître précisément un modèle du système à asservir pour établir un correcteur. Il existe en effet des méthodes qui conduisent directement à un correcteur par interprétation de la réponse à une sollicitation donnée. On peut citer la méthode de Ziegler-Nichols bien adaptée à des systèmes passe-bas potentiellement instables. Elle consiste à boucler le système sans signal d'entrée et à

augmenter artificiellement le gain jusqu'à ce qu'il soit instable et entre en oscillation (on fabrique un oscillateur...).

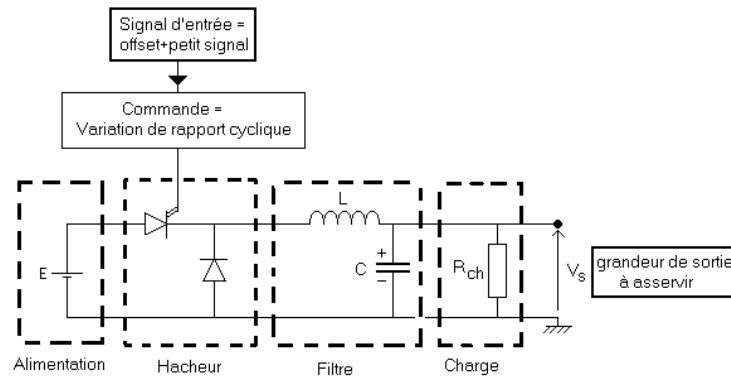


En fonction de la fréquence d'oscillation observée, on en déduit les caractéristiques de la correction à réaliser pour assurer une stabilité robuste, tout en optimisant la rapidité et/ou la précision. Nous verrons un exemple d'identification de ce type dans la suite.

IV.4. Asservissement d'une source de tension.

Nous allons chercher à réaliser une alimentation de tension dont la valeur de sortie est asservie à un signal de commande. On verra que ce genre de système permet notamment de rendre la tension de sortie insensible aux éventuelles variations de la source qui nous apporte l'énergie.

Nous allons commencer par identifier le système (en vérifiant l'incidence des différents paramètres pour vérifier que cela concorde avec notre modèle). Une fois l'identification réalisée, nous allons boucler en insérant différents correcteurs judicieusement calculés. Pour chacun d'entre eux, on cherchera à quantifier les différentes améliorations apportées. L'ensemble présente la structure suivante :



IV.4.1. Identification du système.

Présentation de la boucle ouverte et commentaires sur les différents éléments :

- On va alimenter un hacheur série non réversible en courant par une alimentation stabilisée de tension de sortie à priori fixée (elle peut par exemple représenter un pont redresseur à diode branché sur le réseau). La sortie du hacheur est filtrée pour pouvoir avoir une tension continue en sortie.
- Le signal d'entrée du système est l'entrée de commande du rapport cyclique du hacheur. En effet, pour une telle structure en conduction continue (niveau de courant de sortie assez haut) permet d'obtenir, en statique, une tension de sortie continue $V_s = \alpha \cdot E$, si E est la tension délivrée par l'alimentation stabilisée. On peut donc agir sur V_s en jouant sur α (paramètre électronique aisément commandable).
- L'ensemble (L,C) permet de filtrer les ondulations de tension et de courant en sortie du hacheur, ce qui permet de récupérer une tension continue aux bornes de la résistance de charge.

Réalisation pratique de l'identification :

- On va réaliser un signal en créneaux, éventuellement avec offset (afin de faire évoluer le rapport cyclique sur une plage définie, sans qu'aucun effet non linéaire n'apparaisse). La fréquence va être choisie pour que l'attaque du système par un créneau permette d'atteindre le régime permanent. A priori, on ne sait pas quel est le résultat, on doit donc essayer différentes fréquences...
- Si le système est très amorti, sa réponse ressemblera énormément à celle d'un système du premier ordre. Pour identifier, on relèvera le gain et le temps de réponse à 63% en utilisant les curseurs de l'oscilloscope. On peut alors envisager un modèle de comportement passe-bas du premier ordre, soit :

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

La modélisation nous a montré que le système était en réalité du second ordre, mais cette approximation est justifiée lorsque les pulsations de coupure sont assez écartées (cas des systèmes très fortement amortis, lorsque

l'on a $m \gg 1$). Cependant, on verra, lors du calcul des correcteurs que le comportement « second ordre » réapparaît dès que l'on cherche à rendre le système plus rapide...

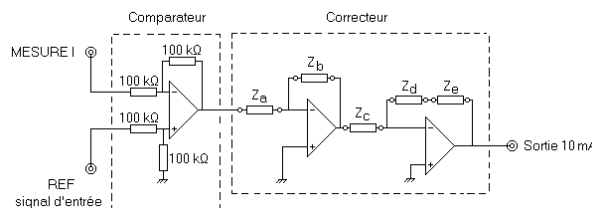
- Dans le cas d'un système peu amorti, l'existence d'un dépassement interdit dès le départ la modélisation par un premier ordre. On va donc mesurer le dépassement et en déduire les caractéristiques du système.

rq : Quand il n'y a pas de dépassement, pour déterminer si le système est plutôt premier ordre ou plutôt second ordre, on peut regarder la pente à l'origine lors de la réponse à un créneau. Si cette pente semble non nulle, on modélise par un premier ordre. Si elle est nulle, on modélise alors plutôt par un second ordre.

rq : Dans la plupart des systèmes physiques, une étude de plus en plus poussée des paramètres conduit en général à faire apparaître de nouvelles fréquences de coupure, de plus en plus élevées, des retards... Dans la pratique, quand les constantes de temps sont assez éloignées les unes des autres et que le système n'est sollicité que par des harmoniques de basse fréquence, on peut se contenter, sans risques excessifs, de ne conserver que les coupures concernées par les harmoniques du signal d'entrée. On se contente alors d'un modèle du premier ordre si seule la première coupure est concernée, du second ordre si le signal d'entrée sollicite la seconde coupure...etc.

IV.4.2. Bouclage et calcul de différents correcteurs – améliorations observées.

Pour réaliser l'ensemble (comparateur/correcteur) on peut réaliser le circuit électronique suivant



Bouclage simple (correcteur proportionnel de gain de 1).

On prend $Z_a=Z_b=Z_c=Z_d=10k\Omega$ et Z_e est un fil. Le correcteur réalise alors un gain de 1. La structure du système bouclé est alors la suivante :



- Si on utilise notre modèle approché de système du premier ordre, on s'attend à obtenir les caractéristiques suivantes pour la boucle fermée

$$G_{BF}(p) = \frac{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}}{1 + 1 \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p}} = \frac{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau \cdot p}} = \frac{K}{1 + K} = \frac{K_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$$

Expérimentalement :

- On mesure le nouveau gain et la nouvelle constante de temps du système et on compare au résultat du calcul. On observe la pente à l'origine de la réponse (début de la montée).
- On observe l'allure du signal en sortie du correcteur. On regarde si le signal obtenu correspond à un fonctionnement linéaire du système.
- Dans le cas où l'on a réalisé une modélisation au second ordre, on peut essayer de mesurer le nouveau temps de montée à 100 % (premier passage) et comparer à ce qui était théoriquement attendu...

Bouclage simple (correcteur proportionnel de gain de K_c).

Cette fois, l'un des deux amplificateurs du correcteur est monté en inverseur de gain supérieur à 1 (augmenter par exemple Z_d).

Dans le cas d'un système du premier ordre, la nouvelle fonction de transfert attendue est

$$G_{BF}(p) = \frac{\frac{K_c \cdot K}{1 + \tau \cdot p}}{1 + K_c \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p}} = \frac{\frac{K_c \cdot K}{1 + \tau \cdot p}}{1 + \frac{K_c \cdot K}{1 + \tau \cdot p}} = \frac{K_c \cdot K}{1 + K_c \cdot K} = \frac{K_2}{1 + \tau_2 \cdot p}$$

Expérimentalement :

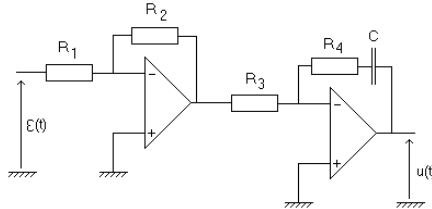
- pour $K_c=2$, on mesure le nouveau temps de réponse. On constate que le système a été accéléré par rapport au cas précédent. On compare à la valeur attendue théoriquement. Si le système n'est pas

d'amortissement assez élevé, le fait que le système soit réellement du second ordre va faire perdre tout son sens à la constante de temps mesurée.

- on constate que l'erreur statique n'est pas nulle mais qu'elle diminue avec le gain.
- Si on reprend l'expérience avec un gain K_c de 5 ou même 10, il est de plus en plus évident que le modèle du premier ordre n'est plus suffisant. On peut mesurer le dépassement, le temps de réponse à 90% et éventuellement la période des pseudo-oscillations. On peut également observer que le signal en sortie du correcteur sort de la plage correspondant à un système linéaire.

Correcteur proportionnel intégral

- Pour réaliser un correcteur de type proportionnel intégral, on doit réaliser la structure suivante (



- La fonction de transfert de ce correcteur est de la forme

$$C(p) = \left(\frac{R_2 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_3} \right) \left(1 + \frac{1}{R_4 \cdot C \cdot p} \right) = K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_c \cdot p} \right)$$

- Si on l'intègre comme correcteur dans notre système, et si on utilise le modèle du premier ordre, on peut alors écrire que

$$G_{BF}(p) = \frac{K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_c \cdot p} \right) \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p}}{1 + K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_c \cdot p} \right) \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p}}$$

- On prendra $R_1 = R_2 = 10k\Omega$. Pour éliminer l'erreur statique, on compense le pôle de la boucle ouverte du système, ce qui revient à calculer τ_c de telle sorte que $\tau_c = \tau$ (la boucle ouverte avec correcteur est alors un intégrateur pur).

$$G_{BF}(p) = \frac{K_c \cdot \frac{K}{\tau_c \cdot p}}{1 + K_c \cdot \frac{K}{\tau_c \cdot p}} = \frac{K \cdot K_c}{\tau_c \cdot p + K \cdot K_c} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_c}{K \cdot K_c} \cdot p}$$

On constate bien que le gain statique vaut 1 ce qui signifie que l'erreur statique a été éliminée. On calcule K_c pour que la constante de temps du système fermé avec le correcteur P.I. soit la même que pour le système identifié en boucle ouverte. On peut ensuite augmenter K_c , mais on risque de faire apparaître des effets non linéaires...

- Expérimentalement :

- On observe que l'erreur statique est annulée (la sortie suit exactement la tension d'entrée...).
- La constante de temps du système dépend du gain du correcteur (mais attention aux non-linéarités !).
- Si on augmente K_c , on peut rendre le système plus rapide. Cependant, la réponse présente très vite un dépassement (ce qui serait impossible si le modèle du premier ordre était correct). Le modèle identifié n'est donc pas suffisant (il aurait fallu faire une identification d'un second ordre pour expliquer ce que l'on observe). On peut tout de même mesurer le temps de réponse à 90% pour juger de sa rapidité. Il faut noter qu'un tel dépassement en tension peut être dangereux pour les éléments alimentés par notre alimentation.
- On commande le système par une tension continue (juste l'offset du GBF). On modifie la tension délivrée par l'alimentation stabilisée E. On constate que la sortie n'est pas affectée (excepté durant un bref transitoire...), dans la mesure où l'on ne modifie pas la commande. Dans une plage de fonctionnement donné, on a donc rendu le système insensible aux perturbations extérieures (notamment de la source d'énergie... penser à une chute de tension sur le réseau de distribution).
- En fait, en faisant varier davantage la tension d'entrée E, on constate qu'il existe une limite à partir de laquelle le système ne réagit plus de façon satisfaisante. Une non linéarité a modifié trop fortement le système. Dans notre cas, c'est qu'il faudrait un rapport cyclique trop fort pour que la tension de sortie soit capable de compenser la baisse de E par une augmentation de α .

IV.5. Asservissement de vitesse d'une machine à courant continu.

Nous allons nous intéresser à l'asservissement de la vitesse d'une machine électrique. Nous étudierons le cas de la machine à courant continu, dont l'asservissement est le plus simple à réaliser (la machine asynchrone demande d'avoir recours à des techniques et des matériels beaucoup plus complexes).

Nous allons commander directement la vitesse. Pour assurer un meilleur asservissement de ce système, il faudrait contrôler le courant dans la machine avant de s'intéresser à la vitesse...c'est ce qu'explique un paragraphe ultérieur.

IV.5.1. Asservissement de vitesse.

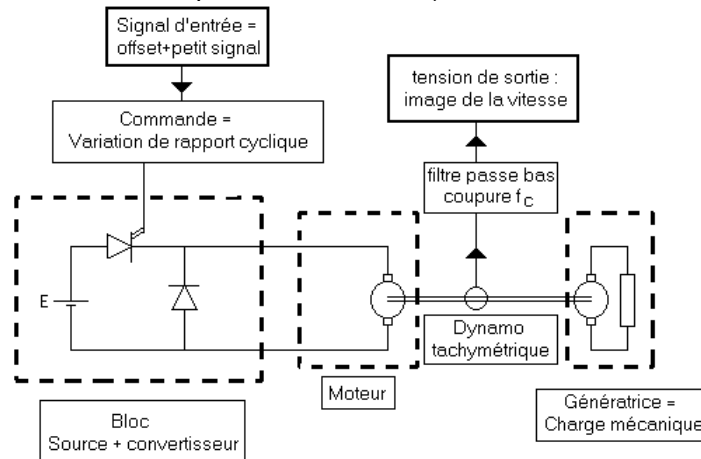
L'entrée du système en boucle ouverte est l'entrée de commande du hacheur. La sortie est celle de la dynamo tachymétrique.

Objectif.

Nous allons chercher à faire en sorte que la vitesse de la machine soit contrôlée par une tension de référence délivrée par un GBF. Notre objectif final est, qu'en l'absence de fluctuation de la tension du GBF, la vitesse soit insensible (sur une plage à déterminer) à une fluctuation d'un des éléments du système (nous verrons l'incidence de deux paramètres : la tension délivrée par l'alimentation de puissance qui sera découpée par le hacheur, ainsi que la charge mécanique sur l'arbre de rotation).

Identification du système et remarques pratiques.

Le système en boucle ouverte étudié se présente donc de la façon suivante :



L'ensemble (hacheur + machine) peut être représenté par un filtre passe-bas du second ordre. Nous savons également que dans certains cas particuliers, quand les constantes de temps sont séparables, il est possible de négliger les plus élevées. C'est ce que nous ferons en supposant que le système est un passe-bas du premier ordre. Pour le filtre de la dynamo tachymétrique (souvent nécessaire car ces systèmes sont très bruités), nous choisirons une fréquence de coupure assez élevée pour pouvoir être négligée lors de l'identification, et assez faible pour pouvoir éliminer une partie des perturbations présentes sur le signal. Une valeur de 1 kHz est satisfaisante dans notre cas.

En pratique, on va envoyer en entrée du système un signal qui est la somme d'une composante continue et d'un signal en créneau ayant une période valant quelques constantes de temps du système étudié. La composante continue et l'amplitude des créneaux sont choisis afin d'avoir un comportement linéaire. On observe la réponse et on en déduit le gain et la constante de temps de la boucle ouverte.

rq : Quand on dit que le système est du second ordre, c'est que l'on a déjà négligé implicitement les constantes de temps apportées par la dynamo tachymétrique et le filtre qui lui sera associé. Simplifier un modèle est donc une démarche courante. Reste à savoir jusqu'où on peut aller. C'est à l'expérience et au cahier des charges de nous le dire.

rq : Expérimentalement, pour mettre en évidence l'intérêt de la correction, on peut, en boucle ouverte, faire varier E sur une plage donnée et mesurer la variation de vitesse correspondant à cette perturbation. De même, on peut faire varier brutalement la charge mécanique en faisant varier rapidement la résistance de charge R_{ch} branchée sur la seconde machine et mesurer la variation de vitesse correspondante une fois le régime permanent atteint. Lorsque que le système aura été corrigé comme nous le souhaitons, nous verrons qu'excepté durant un transitoire qui dépend de la dynamique de la boucle, le système fera en sorte de compenser l'effet de la perturbation pour maintenir une vitesse constante en régime permanent.

Fermeture de la boucle et caractéristiques du systèmes bouclé.

Pour faire en sorte que le système soit indépendant de perturbations extérieures comme une fluctuation de E ou du couple de charge, on réalise une correction de type proportionnelle intégrale, ce qui nous permet d'éliminer l'erreur statique. Pour cela, on choisit la constante de temps du correcteur pour compenser le pôle du système et son gain pour obtenir la meilleur dynamique possible (attention, si on cherche à rendre le système trop rapide, ce dernier cesse de répondre de façon linéaire, ce que l'on vérifie en étudiant la tension en sortie du correcteur).

On peut alors observer que sur une plage donnée des valeurs de E, le régime permanent de vitesse est indépendant de ce dernier facteur. De même, lorsque le moment de couple appliqué sur l'arbre de rotation subit une brusque modification (court-circuiter rapidement une partie du rhéostat de charge sur la génératrice), la vitesse finit par revenir à sa valeur initiale. La vitesse de rotation a donc été rendue (relativement) indépendante de l'état d'alimentation ou de charge du moteur.

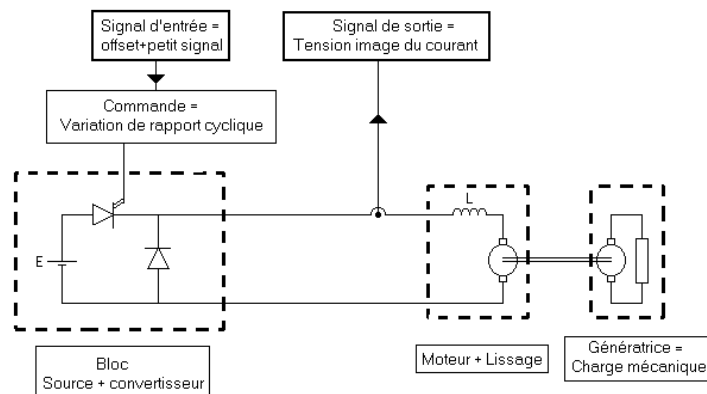
IV.5.2. Annexe : Rôle d'un asservissement de courant.

Si on asservit directement la vitesse, on laisse le couple de la machine (et donc le courant) évoluer librement pour satisfaire aux conditions de vitesse imposées. Dans la pratique, il est préférable de contrôler le courant (on peut par exemple améliorer le temps de réponse...) et, de plus, faire en sorte que ce dernier ne dépasse pas la valeur nominale du moteur utilisé. Pour limiter le courant, on a, en plus, intérêt à introduire une limitation qui permettra de faire en sorte que la sauvegarde du système (ne pas dépasser le courant nominal) prenne le pas sur l'asservissement (suivre la commande de vitesse) si cela est nécessaire. Cela revient à introduire une non-linéarité supplémentaire dans le système...

Identification de la réponse en courant.

- L'entrée de notre système, c'est l'entrée de commande du rapport cyclique du hacheur (valider la variation par tension d'entrée au dépend de la variation manuelle). Le capteur de courant (intégré à la maquette hacheur) nous donne la réponse en sortie. Il faut noter que la tension de commande en entrée du hacheur doit être comprise dans une plage limitée pour être prise en compte ... attention aux entrées de commande trop élevées ou trop faibles (lire la notice du hacheur)...

L'ensemble à identifier peut être représenté de la façon suivante :



- On fait alors en sorte de se placer autour d'un point de fonctionnement et de faire des petites variations (on cherche à rester en régime linéaire). Pour les variations, on peut alors envisager deux solutions
 - travailler en régime sinusoïdal et relever le Bode (c'est potentiellement plus précis mais plus long...).
 - Travailler avec un signal en créneau (plus rapide mais plus rustique...) et identifier la réponse.
- Pour les machines usuelles, on peut se contenter de représenter cette boucle ouverte par un premier ordre dont on relève la constante de temps (la pente à l'origine...c'est rustique mais si ça marche, c'est largement suffisant) et le gain statique (rapport entre les valeurs de sortie et d'entrée prises en régime permanent).

La fonction de transfert identifiée sera alors de la forme

$$F_I(p) = \frac{K}{1 + \tau_a \cdot p}$$

On peut éventuellement prendre en compte le retard moyen introduit par le hacheur (la constante de temps est estimée à la moitié de la fréquence T de hachage). Dans ce cas la fonction de transfert devient

$$F_I(p) = \frac{K}{1 + \tau_a \cdot p} \cdot e^{-\frac{T \cdot p}{2}}$$

Il faut noter que le retard n'est pas identifiable simplement par un essai indiciel pour les fortes fréquences de hachage. On se contente souvent de le prendre en compte dans le calcul. Il nous permettra de vérifier l'incidence des paramètres sur la stabilité (le retard peut nous rapprocher du point critique...).

rq. le système identifié correspond au point de fonctionnement choisi ! On pourra, en première approximation considérer que les caractéristiques de l'ensemble ne dépendent pas notablement du niveau de courant. Cependant, le système ne doit pas être modifié. On ne doit surtout plus changer la charge, l'inductance de lissage ou quoi que ce soit...on modifierait les caractéristiques du système et on rendrait, par conséquent, le modèle établi caduc.

rq. la fréquence de hachage doit être choisie la plus élevée possible afin d'écraser le plus possible les ondulations de courant. Il est alors possible de suivre les évolutions de « la valeur moyenne » du courant...L'inductance en série avec l'induit de la machine contribuera elle aussi au lissage (attention, une fois choisie, l'inductance ne doit pas être modifiée, sous peine de modifier fortement le modèle établi...Cf point précédent).

Calcul du correcteur.

- Nous allons essayer de supprimer l'erreur statique.

Pour cela, nous choisirons de réaliser une correction proportionnelle intégrale dont la fonction de transfert $C_I(p)$ se présente sous la forme

$$C_I(p) = K_I \left(1 + \frac{1}{\tau_I \cdot p} \right)$$

- Si le système est susceptible d'être instable, le gain et la constante de temps du correcteur sont calculés en fonction des considérations suivantes :

- On compense le pôle τ_I de la machine, afin de se ramener à une fonction de transfert en boucle ouverte qui permet d'assurer une annulation de l'erreur statique. On impose donc

$$\tau_I = \tau_a$$

En effet, avec le correcteur, la fonction de transfert en boucle ouverte devient

$$F_I(p) \cdot C_I(p) = K_I \cdot \left(\frac{1 + \tau_I \cdot p}{\tau_I \cdot p} \right) \cdot \frac{K}{1 + \tau_a \cdot p} \cdot e^{-\frac{T \cdot p}{2}} = K_I \cdot K \cdot \frac{e^{-\frac{T \cdot p}{2}}}{\tau_I \cdot p}$$

D'après le théorème de la valeur finale, on voit bien qu'une telle fonction de transfert conduit à une erreur statique nulle (à vérifier en pratique), d'où l'intérêt de compenser le pôle.

- On s'assure une marge de phase de 45° (phase au-dessus de -135° quand le module vaut 1). Cela se traduit par

$$\frac{T \cdot \omega}{2} \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{quand} \quad \frac{K_I \cdot K}{\tau_I \cdot \omega} = 1$$

On constate qu'assurer **une bonne stabilité impose d'appliquer un gain limité...**

- Si on estime que le système est vraiment très stable (modèle du premier ordre satisfaisant...) et que le retard du hacheur ne risque pas de le déstabiliser, on peut déterminer le gain du correcteur en cherchant à s'imposer une constante de temps en boucle fermée (la plus faible possible...). Sachant que cette constante de temps est (si on néglige le retard du hacheur...).

$$\tau_{BF} = \frac{\tau_I}{K \cdot K_I}$$

On constate que pour diminuer la constante de temps et avoir ainsi un système plus rapide, il faut choisir un gain le plus fort possible... c'est le contraire du cas précédent, lorsque l'on se souciait de stabilité, ce qui conduisait à ne pas dépasser une valeur limite de gain...

La constante de temps est calculée comme dans le cas précédent et on annule bien l'erreur statique...

- Cette boucle doit être suffisamment rapide pour que les évolutions de courant (et donc du couple électromagnétique) permettent des évolutions rapides de vitesse (cela revient à dire que la boucle de courant doit faire intervenir des constantes de temps plus petites que la boucle de vitesse...).

Fermeture de la boucle.

- Une fois les valeurs de résistances et de capacité calculées pour satisfaire aux paramètres espérés, on réalise le correcteur et on boucle (la plaquette réalisant le correcteur comprend un comparateur réalisé à partir d'un soustracteur à AOP). On relève alors la réponse du système bouclé et on compare à ce qui a été observé en boucle ouverte.

- Compte tenu de la compensation du pôle de la boucle ouverte, une fois la boucle fermée, on se retrouve avec un système dont la fonction de transfert est de la forme suivante (on néglige le retard introduit par le convertisseur).

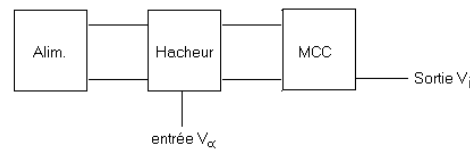
$$F_{IBF} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_I}{K \cdot K_I} \cdot p}$$

On constate que la constante de temps de cette fonction de transfert sera d'autant plus faible (système rapide) que le gain K_I aura été choisi fort. Mais nous avons vu précédemment qu'un gain fort conduit à des risques d'instabilité (provoqués par un retard, ou plus probablement dans la plupart des systèmes, par des pulsations de coupure situées à fréquences élevées, et négligées dans les modèles). Cela illustre l'antagonisme entre rapidité et stabilité.

- Une fois la boucle de courant réalisée, c'est l'entrée de cette boucle qui constitue la nouvelle entrée du système à modéliser. Cette fois, la sortie qui nous intéresse est celle de la dynamo tachymétrique fournissant une tension proportionnelle à la vitesse de rotation.

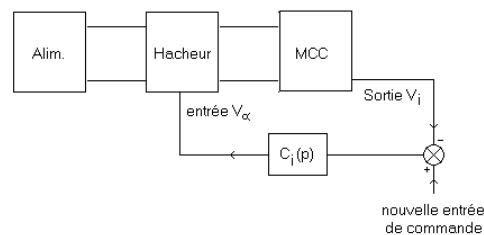
- Les étapes d'un asservissement complet de vitesse avec contrôle du courant sont les suivants

Première étape : Elle consiste à identifier la boucle de courant. On travaille donc dans la configuration suivante :



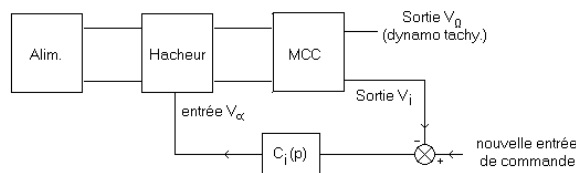
On en déduit la réponse en courant en boucle ouverte.

Seconde étape : On place un correcteur $C_i(p)$ et on asservit le courant (la nouvelle entrée est celle du comparateur situé juste avant le correcteur).

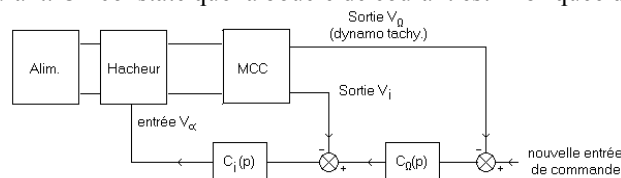


On a donc réalisé l'asservissement de courant. A partir de la nouvelle entrée, on va chercher à asservir la vitesse. Les deux boucles seront donc imbriquées.

Troisième étape : On identifie la boucle de vitesse. On envoie un signal sur la nouvelle entrée de commande (fréquence différente des essais sur le courant !) et on regarde la réponse de la dynamo tachymétrique (nouvelle sortie).



Dernière étape : On boucle en vitesse avec un correcteur. Notre nouvelle entrée de commande va agir sur la vitesse tout en pilotant le courant. On constate que la boucle de courant est imbriquée dans la boucle de vitesse...



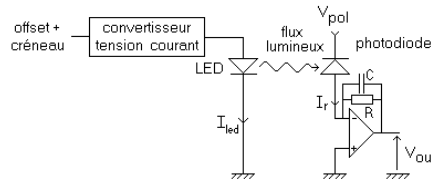
IV.6. Asservissement du flux lumineux émis par une LED.

Cet asservissement va nous permettre d'adopter une démarche différente de ce qui a été vu précédemment. Cette fois, on va faire en sorte, par une méthode empirique, de déterminer les caractéristiques d'un correcteur, sans connaître précisément les caractéristiques du système commandé. Le correcteur obtenu garantit la stabilité, sans que les autres performances du système (notamment la rapidité ne soient trop altérées).

rq : il n'est pas nécessaire de connaître le système, mais il faut avoir conscience que les méthodes empiriques, qui sont fort nombreuses, et adaptées à des types de problèmes particuliers, ne fonctionnent pas systématiquement. Si on emploie une méthode plutôt qu'une autre, c'est que l'on a une petite idée du comportement général (sans le connaître précisément).

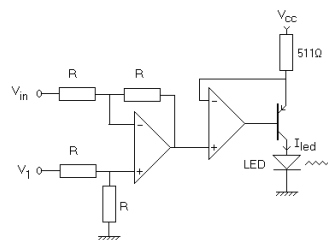
IV.6.1. Structure du système et analyse du problème.

Le système étudié se présente sous la forme suivante :



• le convertisseur tension/courant :

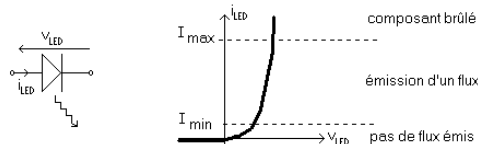
Le flux lumineux émis par la LED est contrôlé par le courant I_{led} . Ce courant est commandé par une tension au moyen d'un circuit électronique adapté (réalisé avec un transistor et des amplificateurs opérationnels). Il est réalisé de la façon suivante :



La tension V_1 est continue et permet de polariser correctement la LED. La tension V_{in} est une composante variable qui permet de moduler le faisceau. La polarisation de la LED se fait par l'intermédiaire d'une tension de polarisation V_{cc} de 12V à travers une résistance R_o de 511Ω. Avec ce système, on injecte, dans la LED un courant I_{led} , tel que

$$I_{led} = \frac{V_{cc} - (V_1 - \tilde{V}_{in})}{R_o}$$

• fonctionnement de la LED :

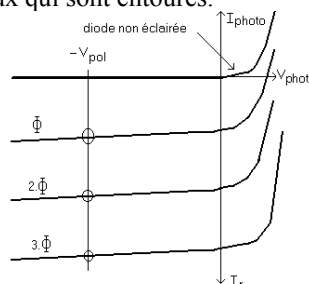


Pour moduler le flux émis par une LED, il faut injecter une composante continue de courant comprise entre I_{min} et I_{max} à laquelle on va ajouter une petite fluctuation, suffisamment faible pour rester dans cette plage de courant. Grâce au circuit décrit précédemment, on va pouvoir fixer la composante continue par $V_{cc} - V_1$ et moduler l'intensité émise par V_{in} . En régime dynamique, ce système va, comme tout système physique, avoir un temps de réponse ce qui va, dans notre cas, nécessiter de faire apparaître au moins une fréquence de coupure.

• fonctionnement de la photodiode :

Le flux lumineux émis par la LED va être en partie converti en courant par la photodiode. Ce courant I_r sera alors converti en tension V_{out} (plus facile à visualiser que I_r) au moyen d'un montage transconductance.

Régime statique : Compte tenu de la structure du montage transconductance, la photodiode est directement polarisée sous la tension $-V_{pol}$. Sur la figure suivante, on a représenté la caractéristique courant en fonction de la tension de la photodiode, pour différents flux lumineux reçus. En la polarisant en inverse on se retrouve donc sur des points de fonctionnement du type de ceux qui sont entourés.

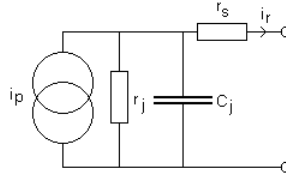


Dans ce cas, le courant inverse I_r dans la photodiode peut s'écrire, pour des éclairagements suffisants

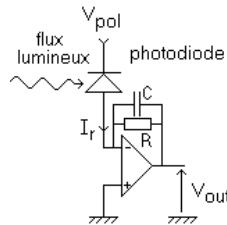
$$i_r = I_{obs} + K \cdot \Phi \approx K \cdot \Phi$$

I_{obs} s'appelle courant d'obscurité (courant quand ϕ est nul) et ϕ représente la puissance optique reçue. En statique, on peut donc dire que le courant dans la photodiode est pratiquement proportionnel à la puissance lumineuse reçue. Dans notre cas, la puissance lumineuse provient de la LED et de l'éclairage ambiant (lumière naturelle et éclairage... attention aux fluctuations à 50 Hz apportées par ce dernier)

Régime dynamique : en dynamique, la photodiode peut être représentée de la façon suivante :



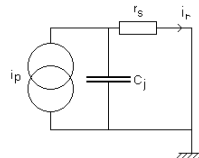
En pratique, on peut considérer que r_j (résistance de jonction) est pratiquement infinie et que r_s (résistance de connectique) est très faible. C_j est la capacité de jonction (elle est d'autant plus faible que la jonction est polarisée en inverse). Le courant i_p est le courant résultant du flux lumineux ϕ . Dans ce cas, l'ensemble photodiode + montage transconductance peut être représenté, pour ce qui concerne les variations par une fonction de transfert d'ordre 2.



Pour comprendre ce point, on peut procéder de la façon suivante. Le courant i_r qui sort de la photodiode conduit à la tension V_{out} par l'intermédiaire d'une fonction de transfert telle que

$$v_{out}(p) = \frac{-R}{1 + R \cdot C_j \cdot p} \cdot i_r(p)$$

Ce courant i_r est lié au courant i_p résultant du flux lumineux incident. Compte tenu de la structure du montage transconductance, pour trouver la relation entre i_p et i_r , on peut raisonner, en régime variable, à partir du schéma suivant :



on a alors

$$i_r(p) = i_p(p) \cdot \frac{1}{1 + r_s \cdot C_j \cdot p}$$

Globalement, on a donc

$$v_{out}(p) = \frac{-R}{1 + R \cdot C_j \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + r_s \cdot C_j \cdot p} \cdot i_p(p)$$

Le gain global de la boucle ouverte sera donc d'ordre supérieur strictement à 2 (il faut ajouter à ce qui vient d'être calculé la fréquence de coupure de la LED, les limitations en fréquence des amplificateurs opérationnels...). Le système est donc potentiellement instable ce qui permet d'envisager d'utiliser la méthode de Ziegler Nichols.

On remarque par ailleurs qu'il est négatif. Pour éviter les risques de rétroaction positive, on va placer un amplificateur inverseur (simple gain -1) en sortie du montage transconductance.

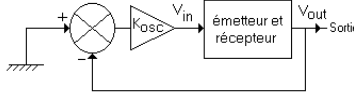
• comment déterminer un correcteur dans ce cas ?

Dans le cas de cet exemple, on pourrait, comme précédemment chercher à faire une identification de la boucle ouverte et en déduire un correcteur qui permettrait d'avoir la réponse désirée en boucle fermée. Cependant, dans le cas qui nous intéresse, il apparaît assez rapidement que l'ordre du système est au moins égal à 3 (à cause de la LED, des amplificateurs opérationnels, de la photodiode, de l'amplificateur de courant en sortie). Pour des systèmes d'ordre élevé, il n'est pas évident de déterminer précisément l'ordre auquel on peut se permettre de s'arrêter dans la modélisation (et donc dans l'identification).

Plutôt que de perdre son temps dans de fastidieuses et probablement infructueuses réflexions et expériences, on peut choisir d'adopter une méthode empirique, qui nous conduira directement à un correcteur satisfaisant (PI ou PID). Nous pouvons, par exemple, choisir la méthode de Ziegler Nichols, qui est adaptée à notre système

IV.6.2. Détermination du correcteur.

• Tout d'abord, on va identifier la réponse du système dans des conditions particulières. On fait en sorte de fermer la boucle d'asservissement. Le signal récupéré sur la photodiode est injecté sur l'entrée «-» du comparateur et l'entrée «+» est mise à la masse. En sortie du comparateur, on place un simple correcteur proportionnel de gain réglable. On règle ce gain jusqu'à la valeur K_{osc} pour laquelle on a apparition d'oscillations. On note alors K_{osc} , ainsi que T_{osc} , la période de ces oscillations.



• Ensuite, on déduit des valeurs obtenues les paramètres caractéristiques du correcteur P.I. par les relations suivantes : $K_c = 0,45.K_{osc}$ et $T_c = 0,83.T_{osc}$

rq : on rappelle que le correcteur P.I. a pour fonction de transfert

$$C(p) = K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{T_c \cdot p} \right)$$

On remplace alors le correcteur proportionnel par le PI calculé, on applique la consigne désirée en entrée, et on constate :

- que le système est stable.
- qu'il est sans erreur statique

On peut également mesurer le temps de réponse (appliquer un signal offset + créneaux adapté en entrée). Ce temps de réponse peut être diminué en augmentant K_c , mais le fait d'augmenter K_c va finir par rendre le système instable...

IV.7. Principe du capteur de courant à zéro de flux.

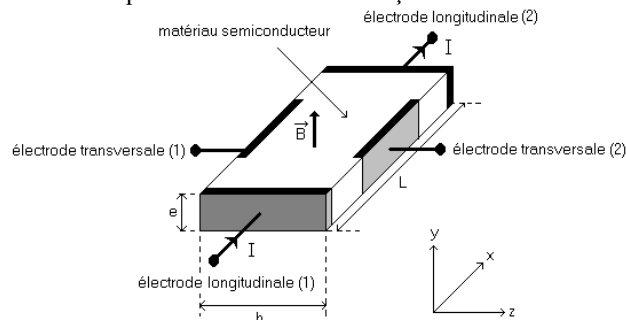
Dans ce paragraphe, nous allons voir qu'il est simple de concevoir un système susceptible de donner une image du courant traversant un circuit électrique. Cependant, si on veut rendre le système insensible aux perturbations extérieures (température, vibrations...) ou à l'état du système de mesure (saturation du circuit magnétique), il est préférable de rajouter une boucle d'asservissement et quelques éléments électroniques supplémentaires.

IV.7.1. Le capteur à effet Hall.

Le capteur à effet Hall permet de récupérer une image du flux magnétique qui traverse un barreau semi-conducteur. Nous allons voir que l'on peut l'utiliser pour réaliser un capteur de courant (système qui délivre une tension proportionnelle au courant à observer).

• *Structure de base.*

En simplifiant, on peut réaliser un capteur à effet Hall de la façon suivante :

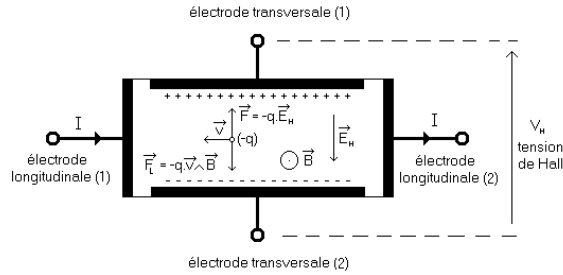


On distingue un barreau de semi conducteur sur lequel arrivent quatre électrodes reliées à des plaques métalliques. On fait passer un courant I entre les deux électrodes longitudinales. Nous allons chercher à comprendre ce qui se passe lorsque l'ensemble est plongé dans le champ d'induction magnétique B orienté comme sur la figure.

rq : la zone utile de semi conducteur est d'épaisseur e, de hauteur h et de longueur L. On peut par ailleurs définir la section S du canal conducteur par $S = e \cdot h$.

• *Principe de fonctionnement.*

Nous allons commencer par faire une représentation du système dans le plan Oxx



Nous allons supposer que la conduction (courant I) est assurée par les électrons (densité de porteur n et mobilité μ). Sous l'action du champ magnétique, ces charges négatives vont être déviées vers l'électrode transversale (2) (force de Lorentz). Cette accumulation de charges va provoquer l'apparition d'un champ électrique E (entre les électrodes transversales). Il va être à l'origine d'une force qui s'oppose à la force de Lorentz. On finit par atteindre un régime stationnaire lorsque les deux forces s'équilibrent. Le champ électrique qui règne alors entre les électrodes transversales explique la différence de potentiel V_H qui existe entre elles. La tension V_H est appelée tension de Hall.

Quantitativement, on peut écrire qu'en régime stationnaire, on a

$$-q \cdot E_H = -q \cdot \frac{V_H}{h} = -q \cdot v \cdot B$$

De plus

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S} = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{S} = -q \cdot n \cdot v \cdot S$$

(où j est la densité de courant, ρ la densité volumique de charges, n le nombre de charges par unité de volume, S la section de conducteur, v la vitesse moyenne des porteurs, I le courant considéré).

De ces deux équations, on déduit que

$$V_H = \left(\frac{-1}{q \cdot n} \right) \cdot \frac{I \cdot B}{e} = K_H \cdot \frac{I \cdot B}{e}$$

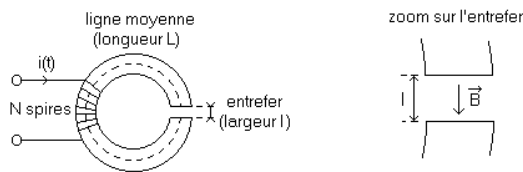
- Ainsi, si on injecte un courant I connu fixé, on récupère une tension V_H proportionnelle à B (que B soit continu ou variable ce qui est un grand avantage par rapport aux capteurs de flux inductifs classiques).
- Si on applique un champ magnétique B connu fixé, V_H est directement proportionnel à I.
- Dans tous les cas, on remarque que K_H est d'autant plus forte que la densité de porteurs est faible. Si on veut une tension suffisante, il ne faudra pas doper trop fortement le matériau semi-conducteur.
- La densité de porteurs susceptibles de participer à la conduction va dépendre de la température. T va donc avoir une influence sur K_H .

IV.7.2. Application à la mesure de courant.

Nous allons essayer de comprendre comment utiliser un capteur à effet Hall pour récupérer une tension image d'un courant à étudier. Il faut savoir que les principes qui vont être énoncés correspondent à ce qui se passe dans les pinces de courant qui permettent de détecter des courants continus comme des courants variables (dans la limite de la bande passante).

• Première approche :

Dans un premier temps, on peut envisager la structure simple suivante :



Le bobinage entourant le circuit magnétique est parcouru par un courant $i(t)$. De ce courant va résulter un champ d'induction B_e proportionnel à i dans l'entrefer. En effet :

- le théorème d'Ampère donne

$$H_f(t) \cdot L + H_e(t) \cdot l = N \cdot i(t)$$

- Si on considère que le circuit magnétique canalise suffisamment les lignes de champ, on peut négliger les flux de fuite et par conservation du flux, on aura

$$B_e \cdot S_e = B_f \cdot S_f$$

où B_e et B_f représentent respectivement le champ d'induction moyen dans l'entrefer et dans le matériau magnétique et où S_e et S_f représentent respectivement la section de l'entrefer et du circuit magnétique.

- Si on suppose que le matériau magnétique est assez doux (faible champ coercitif) et qu'il n'est pas trop saturé (probable en raison de l'existence de l'entrefer), alors on peut raisonnablement définir une perméabilité relative μ_r telle que

$$B_f = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H_f$$

L'équation déduite du théorème d'ampère peut alors être transformée de la façon suivante :

$$\frac{B_f}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot L + \frac{B_e}{\mu_0} \cdot l = N \cdot i \quad \text{ou encore} \quad B_e \cdot \left(\frac{S_e/S_f}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot L + \frac{1}{\mu_0} \right) = N \cdot i \quad \text{et ainsi}$$

$$B_e(t) = \alpha \cdot i(t)$$

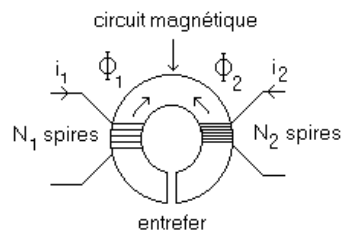
Si on place un capteur à effet Hall dans l'entrefer, il est soumis à B_e . On peut alors imposer le courant I continu (fixé le plus précisément possible) qui traverse le barreau de semi conducteur. On va alors récupérer une tension V_H proportionnelle à B_e c'est à dire

$$V_H = K_H \cdot \frac{I \cdot B_e}{e} = K_H \cdot \frac{I \cdot \alpha}{e} \cdot i(t)$$

Il suffit alors de faire un étalonnage pour déterminer le coefficient de proportionnalité entre $V_H(t)$ et $i(t)$. Cependant, ce système présente un défaut important. En effet, le coefficient peut être modifié par les conditions expérimentales (température, position du capteur, saturation magnétique...), ce qui rend la procédure d'étalonnage caduque. On peut alors envisager un système un peu plus complexe, mais moins sensible aux différentes perturbations expérimentales. On va faire en sorte que le capteur ne soit plus destiné qu'à détecter un zéro de flux (ce qui élimine les effets de la fluctuation du coefficient de proportionnalité).

• Amélioration du système précédant (capteur à zéro de flux):

On va considérer la structure suivante :



Si on applique le théorème d'ampère à la structure suivante (Φ est le flux global dans le circuit, différence entre Φ_1 et Φ_2 et $\mathcal{R}$ est la réluctance de ce dernier), alors

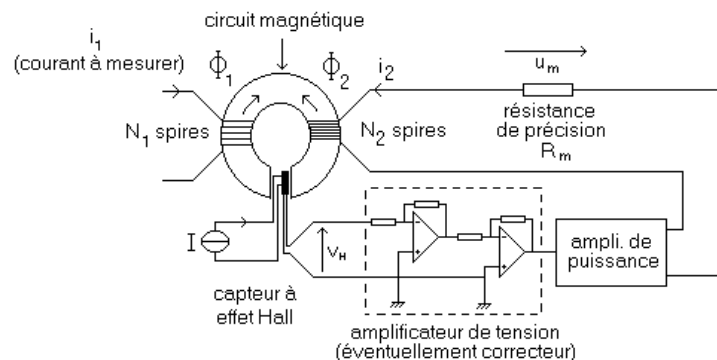
$$N_1 \cdot i_1(t) + N_2 \cdot i_2(t) = \mathcal{R} \cdot \Phi(t)$$

Si on parvient à faire en sorte que $\Phi(t)$ soit nul, alors

$$i_2(t) = -\frac{N_1}{N_2} \cdot i_1(t)$$

C'est grâce au capteur à effet Hall que l'on va réussir à détecter l'annulation du flux. L'intérêt de ce montage, c'est que lorsque l'on cherche à mesurer un courant i_1 de forte valeur, il suffit de prendre un rapport de spires adapté afin de pouvoir se contenter de travailler avec i_2 de beaucoup plus faible valeur mais directement proportionnel à i_1 . On place alors une résistance de précision connue dans le circuit parcouru par i_2 et on mesure la tension à ses bornes.

- ♦ Pour parvenir à annuler le flux, on va instrumenter le système de la façon suivante :



Dans le capteur à effet Hall, on fait à nouveau passer un courant continu I fixé (le plus stable possible !) afin que la tension de Hall V_H détectée soit directement proportionnelle à la valeur du champ d'induction B_e dans

l'entrefer. La tension V_H est amplifiée (éventuellement, on peut placer un correcteur intégral pour éliminer l'erreur statique sur V_H ce qui conduit à un zéro de flux).

♦ On peut alors écrire les équations suivantes

- La tension de Hall V_H est proportionnelle à B_e champ d'induction dans l'entrefer, lui même proportionnel à la différence des flux Φ_1 et Φ_2 . On a donc

$$V_H(p) = \alpha \cdot (\Phi_1 - \Phi_2)$$

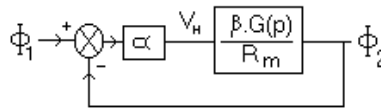
- Si $G(p)$ représente le gain de l'ensemble amplificateur de tension/correcteur, sachant que l'amplificateur de puissance n'agit pas sur la tension mais seulement sur le courant, et si on néglige la constante de temps introduite par l'inductance du bobinage N_2 , on a

$$G(p) \cdot V_H(p) = R_m \cdot i_2(p)$$

- Sachant que i_2 est beaucoup plus petit que i_1 , la relation entre i_2 et Φ_2 peut être supposée linéaire (pas de saturation magnétique), soit

$$\Phi_2(p) = \beta \cdot i_2(p) \text{ et donc } G(p) \cdot V_H(p) = \frac{R_m \cdot \Phi_2(p)}{\beta}$$

- En utilisant l'ensemble des équations précédentes, on peut faire apparaître la structure du système bouclé suivant :



On a donc la relation

$$\frac{\Phi_2(p)}{\Phi_1(p)} = \frac{\frac{\alpha \cdot \beta}{R_m} \cdot G(p)}{1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{R_m} \cdot G(p)}$$

Si le correcteur utilisé est un intégrateur de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{1}{\tau \cdot p}$$

Alors on a

$$\frac{\Phi_2(p)}{\Phi_1(p)} = \frac{1}{1 + \frac{R_m \cdot \tau}{\alpha \cdot \beta} \cdot p}$$

Il s'agit bien d'un système sans erreur statique, ce qui signifie que Φ_2 va tendre vers Φ_1 en régime permanent. Le flux global dans le circuit magnétique va donc tendre à s'annuler. On va alors avoir une relation de proportionnalité entre i_2 et i_1 qui sera le simple rapport du nombre de spires entre les deux bobinages (voir la relation d'Hopkinson déduite du théorème d'Ampère lorsque le flux est nul). Il suffira alors de mesurer la tension aux bornes de la résistance de précision connue R_m pour connaître précisément i_1 .

rq : on peut être étonné d'avoir une tension V_H qui tend vers 0 alors que le courant i_2 finit par se stabiliser à une valeur constante. Cependant, il n'y aucune contradiction. Initialement, $V_H(t)$ est non nulle et est intégrée durant le transitoire qui conduit au régime permanent sans erreur statique. La tension en sortie de l'intégrateur évolue alors et finit par prendre une valeur constante en régime permanent dès que V_H s'annule. C'est cette valeur de tension constante en sortie du correcteur qui est à l'origine du courant i_2 souhaité. Il ne faut donc pas confondre le signal d'erreur et le signal de sortie du correcteur !

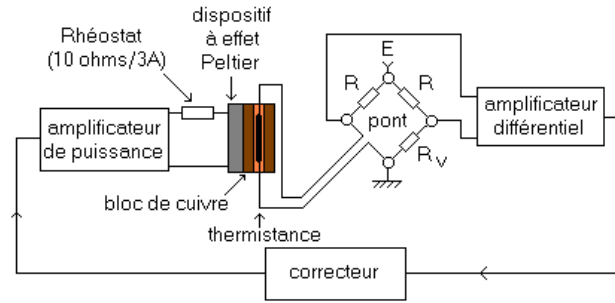
rq : dans le temps de réponse du système, on n'a pas fait apparaître le temps de réponse introduit par le passage de la tension de sortie de l'amplificateur de puissance au courant i_2 ... Ce retard dépend notamment de la résistance des bobinages et des valeurs d'inductances (intimement liées aux caractéristiques du matériau magnétique utilisé). On a, par ailleurs, négligé le couplage entre les deux circuits électriques à travers le circuit magnétique).

IV.8. Asservissement de température.

Le contrôle de température est l'une des applications principale des asservissements, tant pour la vie courante (régulation de température dans une habitation, dans un four...), que dans des expériences de physique (contrôle de température sur une expérience, protection d'un composant électronique susceptible de chauffer...). Ces expériences sont intéressantes, mais elles conduisent souvent à des constantes de temps élevées, ce qui rend leur réalisation pénible, excepté si on est patient.

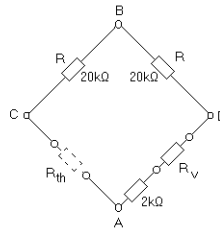
IV.8.1. Structure du système de contrôle de température.

Globalement, une fois bouclé et corrigé, le système étudié se présente sous la forme suivante :



Nous allons maintenant essayer de détailler les différents éléments de ce système.

- le pont de résistances : Ce pont présente la structure suivante :



Nous allons considérer que le dispositif électronique qui récupère la tension entre C et D présente une impédance d'entrée très grande devant l'ensemble des résistances du pont. Lors de l'emploi du dispositif, on vérifiera que cette hypothèse est justifiée. Si E est la tension entre A et B, si $R_{th} = R_0 - \Delta R(T)$ et si $R' = R_v + 2k\Omega$ alors on a

$$u_{CD} = R.E \left[\left(\frac{1}{R + R_0 - \Delta R} \right) - \left(\frac{1}{R + R'} \right) \right]$$

Si on a fait en sorte qu'à température ambiante, $u_{CD}=0$, alors c'est que l'on a $R' = R_0$. On en déduit que

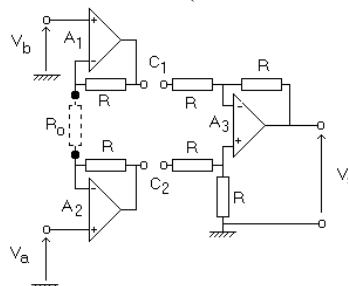
$$u_{CD} = R.E \left[\frac{\Delta R}{(R + R_0 - \Delta R)(R + R_0)} \right]$$

Si on suppose que $\Delta R \ll R + R_0$ (vérifier si c'est le cas expérimentalement), on obtient

$$u_{CD} \approx \frac{R.E}{(R + R_0)^2} \cdot \Delta R$$

rq : le pont décrit est destiné à fonctionner avec une thermistance de 4,7 k Ω environ à température ambiante, ce qui explique que le pont comprenne un bras avec une résistance de 2k Ω en série avec un potentiomètre R_v qui permet de fixer la résistance de l'ensemble à une valeur comprise entre 2 k Ω et 7 k Ω environ.

- l'amplificateur différentiel: pour exploiter la tension en sortie du pont, on va commencer par réaliser une amplification différentielle (qui permet d'éviter un problème de masse tout en augmentant l'amplitude de la réponse...). Le circuit utilisé présente la structure suivante (mettre un cavalier au niveau de C1 et C2):

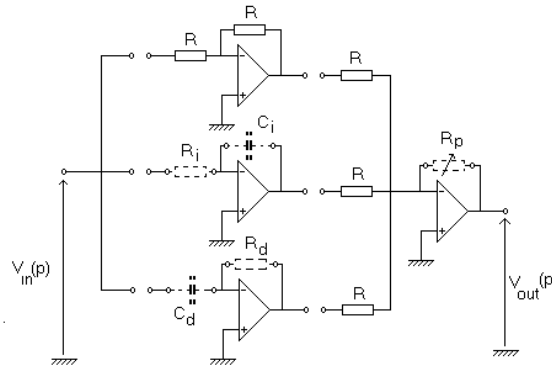


Les résistances R sont des résistances de précision de 10k Ω , La résistance R_0 doit être rajoutée pour fixer le gain de l'amplification différentielle. En effet, si on suppose les amplificateurs opérationnels parfaits, le gain de ce montage est le suivant :

$$V_s = \left(1 + 2 \cdot \frac{R}{R_0} \right) \cdot (V_a - V_b)$$

- correcteur :

Lorsque l'on cherche à réaliser une correction pour améliorer les performances de la boucle, on va utiliser le circuit suivant qui permet d'envisager une action proportionnelle, dérivée, intégrale, ou toute combinaison de plusieurs d'entre elles. La structure de ce correcteur est la suivante :



Si toutes les branches sont reliées, ce circuit a pour fonction de transfert

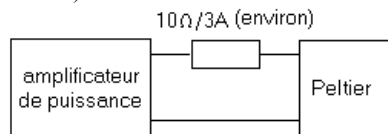
$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = K \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} + \tau_d \cdot p \right)$$

avec $\tau_i = R_i \cdot C_i$, $\tau_d = R_d \cdot C_d$ et $K = R_p / R$. Lorsque l'on ne recherche qu'une partie des actions, il suffit de n'utiliser que les parties du circuit dont on a besoin.

- l'amplificateur de puissance et l'alimentation du dispositif à effet Peltier :

La sortie du correcteur ne peut pas délivrer un courant suffisant pour alimenter le dispositif à effet Peltier. On doit donc intercaler un amplificateur de puissance entre ces deux éléments. Cet amplificateur réalise à la fois une amplification de tension (peu utile pour nous), mais également une amplification de courant. Il est réalisé au moyen d'un amplificateur opérationnel de puissance (OPA 548, courant maximal délivré 3A en théorie...en pratique, on évitera de dépasser 1A).

L'impédance du dispositif à effet Peltier est très faible. Si on veut que la tension délivrée en sortie de l'amplificateur de puissance ne conduise pas à un courant trop important (et même rapidement à la saturation de la source de courant), on devra placer en série, une résistance susceptible de supporter quelques ampères (prendre un Rhéostat d'une dizaine d'ohms...). On réalise donc le circuit suivant :

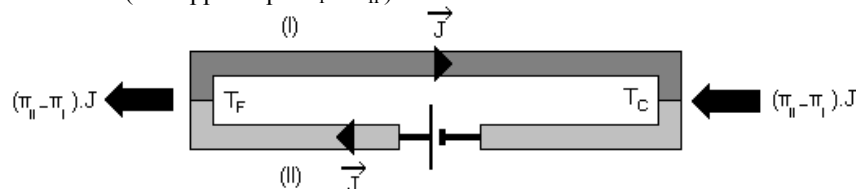


- le module à effet Peltier et le bloc chauffé avec le capteur de température :

Le module à effet Peltier est un dispositif à base de semi-conducteur permettant de créer une circulation de chaleur (sens de circulation qui dépend du sens du courant d'alimentation). Pour comprendre le principe du dispositif à effet Peltier, on prend deux matériaux différents tels que pour chacun d'entre eux, on puisse écrire

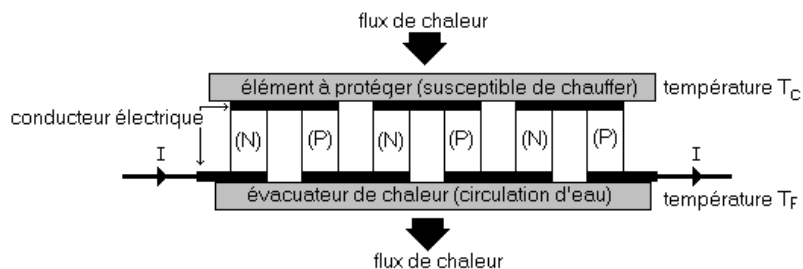
$$\vec{J}_Q(k) = \pi(k) \cdot \vec{J}(k)$$

où, $J_Q(k)$ et $J(k)$ sont respectivement la densité de courant thermique et la densité de courant électrique et $\pi(k)$ un coefficient appelé coefficient Peltier du matériau (k). Ces deux matériaux, nommés (I) et (II) vont être associés de la façon suivante (on suppose que $\pi_I < \pi_{II}$) :



Si on impose la même densité de courant électrique J dans les deux matériaux et que l'on néglige la dissipation d'énergie dans les matériaux, il va y avoir création d'un flux thermique à chacune des deux jonctions (portées à température T_c pour la jonction chaude et à température T_F pour la jonction froide) afin de compenser la différence de flux thermique entre le premier milieu et le second.

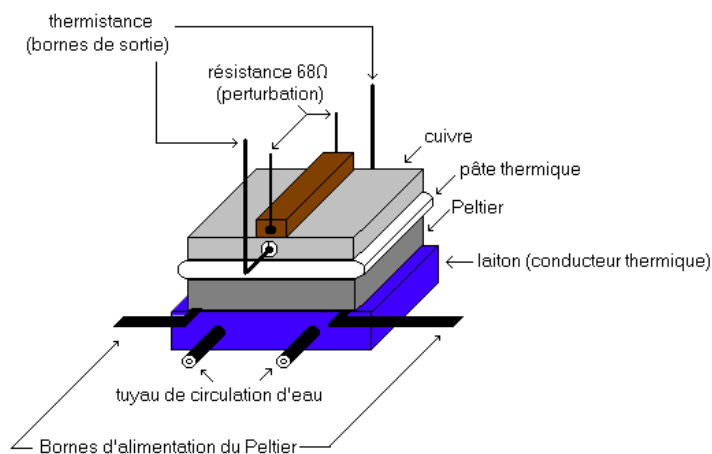
Dans notre cas, les deux matériaux différents sont des semi-conducteurs dopés respectivement (N) et (P). La structure simplifiée du dispositif peut être vue de la façon suivante :



Le système est constitué de plusieurs barreaux alternativement de type (N) et (P). Compte tenu du flux de chaleur recherché, on doit faire circuler le courant dans le sens indiqué car $\pi(N) < \pi(P)$ (en fait on a même $\pi(N) < 0$ et $\pi(P) > 0$).

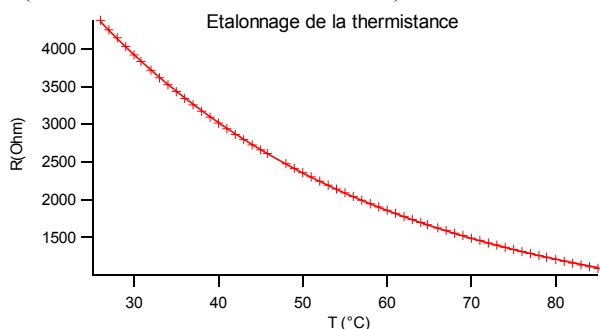
Dans notre système, la face froide du Peltier est reliée à un bloc de laiton dans lequel on peut faire circuler de l'eau (puits thermique). La face chaude est en contact avec un bloc de cuivre (par l'intermédiaire d'une pâte thermique), au niveau duquel on cherche à contrôler la température. Dans ce bloc, on a placé une thermistance (dans un trou, en contact avec le cuivre par l'intermédiaire d'une pâte thermique). Le bloc de cuivre pourrait par exemple représenter un composant électronique qui chauffe en fonctionnant et que l'on cherche à protéger en pompant l'énergie résultant du fonctionnement par l'intermédiaire du système à effet Peltier (ce qui permet de maintenir la température du composant constante, inférieure à la température de destruction).

La structure globale de l'ensemble est donc la suivante



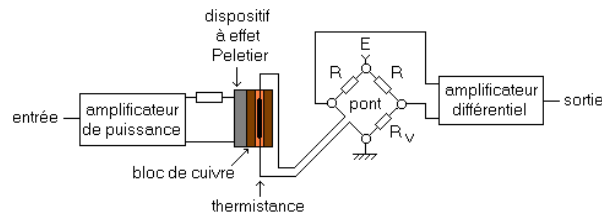
Sur la face supérieure du bloc de cuivre, on a placé une résistance de 68Ω destinée à représenter une perturbation thermique. En effet si elle est parcourue par un courant, elle provoquera, en l'absence d'asservissement, une augmentation de température sur le cuivre. Pour revenir à l'analogie du composant protégé contre les échauffements, cette résistance représente l'apport d'énergie résultant du fonctionnement du composant électronique.

• **Caractéristique de la thermistance** : la relation entre la résistance de la thermistance et la température à laquelle cette dernière est placée, n'est pas linéaire. On remarque au passage qu'il s'agit d'une CTN (coefficient de température négatif), c'est à dire que la résistance diminue quand la température augmente. L'allure de la caractéristique est la suivante (merci au binôme Fabienne/Fabien).



On pourra supposer que la variation de résistance de la thermistance évolue linéairement en fonction de la variation de température, pour de petites variations. Le gain va cependant dépendre de la température autour de laquelle on travaille.

• Représentation globale de la boucle ouverte : nous allons considérer que l'entrée du système est l'entrée de l'amplificateur de puissance et que la sortie est la sortie de l'amplificateur différentiel qui donne la tension de déséquilibre du pont. Globalement, le système peut être schématisé de la façon suivante :



Lorsque l'on ferme la boucle, on intercalera le correcteur entre l'entrée et la sortie. Dans ce système, c'est le pont qui joue le rôle de comparateur.

IV.8.2. Réalisation d'une correction destinée à rendre le système sans erreur statique : interprétation.

On déconnecte la boucle en sortie de l'amplificateur différentiel et on supprime le correcteur. On applique manuellement un échelon de tension en entrée de l'amplificateur de puissance (de 0 à 5V par exemple) et on observe la réponse en sortie de l'amplificateur différentiel. La réponse observée est assimilable à celle d'un système passe-bas du premier ordre. On identifie ce modèle et on calcule les caractéristiques d'un correcteur proportionnel intégral comme nous l'avons fait dans les expériences précédentes.

IV.8.3. Intérêt de ce type de montage.

Une fois le bouclage réalisé avec le bon correcteur, on peut envisager deux types d'expériences :

Le contrôle de la température du bloc de cuivre étudié : On suppose que le pont est initialement équilibré et que le système est bouclé afin d'éliminer toute erreur statique. Dans ce cas, on fait fluctuer brutalement la résistance R_v (utiliser le potentiomètre « fin »). On fait donc apparaître un écart entre la résistance de la thermistance et R' . Il apparaît alors une tension non nulle à la sortie du pont et donc à la sortie de la chaîne d'amplification. Si le correcteur cherche à éliminer l'erreur statique, le signal en entrée du Peletier va imposer à ce dernier d'amener le bloc de cuivre à la température qui fait que la thermistance tend à prendre la valeur de résistance égale à R' . On peut ainsi, grâce à R' , commander la température de régime permanent du bloc de cuivre.

L'effet d'une perturbation : (faire circuler un courant dans la résistance de chauffage placée sur le bloc de cuivre). On suppose que le pont est initialement équilibré, que R' garde une valeur fixée pendant toute l'expérience et que le système est bouclé afin d'éliminer toute erreur statique. Brutalement, on fait circuler un courant dans la résistance de 68Ω (appliquer une tension de 5V), il en résulte un échauffement du bloc de cuivre qui va mettre le pont transitoirement hors d'équilibre. Cependant, grâce au correcteur, le Peletier va pomper le surplus d'énergie apporté et va l'expulser du bloc de cuivre afin que ce dernier conserve une température constante. Si la perturbation avait refroidi le bloc de cuivre, le Peletier aurait apporté l'énergie permettant de maintenir une température constante en régime permanent.

IV.9. Boucle à verrouillage de phase.

Dans bon nombre d'applications électroniques (télécommunications, instrumentation...), on doit pouvoir disposer de signaux indépendants, strictement à même fréquence. Par exemple, pour démoduler un signal, on va souvent devoir disposer de la fréquence de porteuse. Dans le cas d'un récepteur, il va souvent falloir reconstruire la porteuse à partir du signal reçu. Il serait illusoire de chercher à fabriquer un oscillateur local ayant la même fréquence que celui qui a servi à la modulation. En effet, quand bien même on parviendrait à un instant donné à égaliser les deux fréquences, par la suite, les deux systèmes évoluant indépendamment (variations de température, vieillissement...), les fréquences seraient forcément proches, mais différentes. Pour une démodulation, ce faible écart est catastrophique...

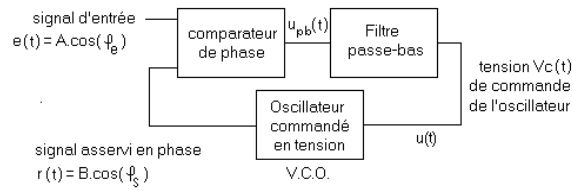
La boucle à verrouillage de phase permet d'éviter ce problème. Elle est principalement constituée d'un oscillateur commandé en tension, intégré dans une boucle d'asservissement, qui permet d'accrocher la fréquence de l'oscillateur sur une fréquence du signal d'entrée (dans l'exemple cité précédemment, on fera par exemple en sorte que cette fréquence soit celle de la porteuse si elle fait partie du signal modulé).

• Avant d'aller plus loin, on rappelle la notion de phase et de fréquence instantanées. Si on considère un signal $s(t) = S_m \cos(\varphi(t))$, on peut donner les définitions suivantes :

- $\varphi(t)$ est la phase instantanée
- la pulsation instantanée est $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$
- la fréquence instantanée $f(t) = \omega(t)/2\pi$

IV.9.1. Présentation de la structure de la P.L.L.

Le système se présente sous la forme d'un système bouclé dans lequel on va trouver les éléments suivants :



- Le comparateur de phase :

Ce système doit fournir un signal $u(t)$ de la forme

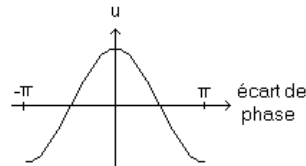
$$u_{pb}(t) = K_c \cdot (\varphi_e - \varphi_s)$$

Il existe plusieurs façons de le réaliser. L'une des méthodes consiste à utiliser un multiplieur et à se servir du filtre passe bas qui se trouve juste après. En effet dans ce cas, on récupère en sortie du multiplieur le signal

$$u_m(t) = k.A.B.\cos(\varphi_e).\cos(\varphi_s) = \frac{k.A.B}{2} [\cos(\varphi_e + \varphi_s) + \cos(\varphi_e - \varphi_s)]$$

Si le système est asservi en fréquence, ce signal est voisin de la somme d'une sinusoïde de fréquence $2f_c$ avec un signal basse fréquence. Si le filtre passe-bas élimine le premier terme, on se retrouve avec

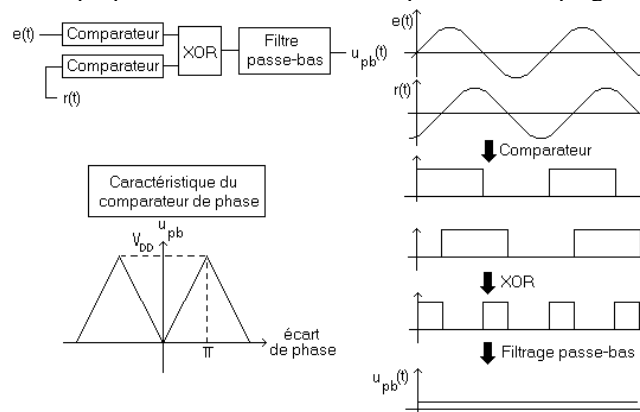
$$u_{pb}(t) = \frac{k.A.B}{2} \cdot \cos(\varphi_e - \varphi_s)$$



La relation obtenue n'est pas linéaire. Cependant, si l'écart de phase, une fois la boucle accrochée se stabilise, alors on peut linéariser autour de ce point, pourvu que l'écart ne soit pas trop important. Alors, on a

$$u(t) = k_{cp} \cdot (\varphi_e - \varphi_s)$$

rq : dans bon nombre de systèmes, on utilise une autre technique, qui consiste à transformer, via un comparateur, les signaux d'entrée et de sortie en des créniaux de même phase. Les deux créniaux obtenus sont envoyés dans un ou exclusif (XOR). On prend alors la valeur moyenne grâce à un filtre passe bas, ce qui permet de récupérer un signal réellement proportionnel à la variation de phase sur une plage de fréquence donnée.

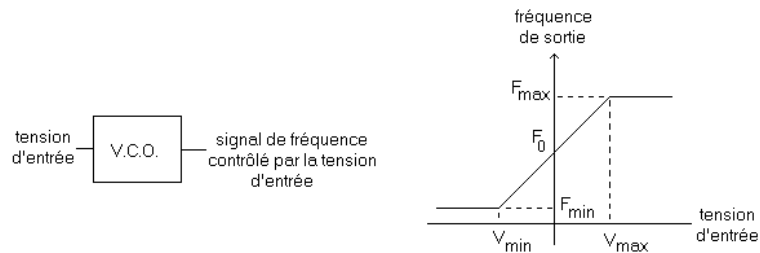


Entre 0 et π , la réponse du comparateur est donc de la forme

$$u_{pb} = \frac{V_{DD}}{\pi} \cdot (\varphi_e - \varphi_s) = k_{cp} \cdot (\varphi_e - \varphi_s)$$

- L'oscillateur commandé en tension (V.C.O. = voltage controlled oscillator):

Un oscillateur commandé en tension a, en simplifiant, une caractéristique donnant une variation de fréquence évoluant linéairement avec la tension d'entrée pour une plage $[V_{min}; V_{max}]$. En revanche, en dehors de cette zone, la fréquence du signal de sortie est fixée à F_{min} ou F_{max} .



• Filtre passe-bas :

Pour simplifier l'étude qui va suivre, on va supposer, dans un premier temps que la caractéristique du filtre passe-bas est idéalisée.



IV.9.2. Fonctionnement de la boucle : capture et verrouillage.

• Pour décrire le comparateur de phase réalisé avec un multiplieur, nous avons fait l'hypothèse que le signal d'entrée de la boucle et le signal de sortie du V.C.O. avaient des variations de phase proches. Pour que cela soit vrai, il est nécessaire que la boucle soit verrouillée, c'est à dire que la fréquence du signal d'entrée prenne une valeur comprise dans une plage étroite qui dépend des éléments qui la composent.

• La plage qui permet au système de s'accrocher est appelée plage de capture (plage d'accrochage, "acquisition range"...). Elle dépend principalement de la fréquence de coupure du filtre passe-bas.

• Une fois que la boucle est accrochée, la plage de fréquence qui lui permet de rester dans cet état est appelée plage de verrouillage (plage de poursuite, plage de maintien, tracking range, lock range...). Cette plage dépend principalement de zone de fréquence dans laquelle le V.C.O. et le comparateur de phase se comportent linéairement. Elle doit être plus large que la plage d'accrochage, sinon la boucle ne peut pas fonctionner...

Capture.

• Présentation du problème: On suppose que la boucle n'est pas accrochée. On rapproche progressivement la fréquence f_e du signal d'entrée de la fréquence centrale du V.C.O. F_0 . Dès que f_e rentre dans une plage de fréquence $[F_0 - F_{cap}; F_0 + F_{cap}]$, la boucle va s'accrocher et la fréquence de sortie du V.C.O. va atteindre f_e après un régime transitoire caractérisant la dynamique de la boucle...

• La boucle n'est pas encore accrochée.

Si $f_e < F_0 - F_c$, le V.C.O. oscille à F_0 . En effet, dans ce cas, le signal d'entrée présente les fréquences $F_0 - f_e$ et $F_0 + f_e$ qui sont toutes les deux supérieures à F_c ce qui fait que le signal en sortie du passe-bas est nul, d'où une fréquence F_0 en sortie de l'oscillateur.

On aurait pu raisonner en faisant décroître la fréquence d'entrée à partir d'un état où la boucle n'est pas accrochée ce qui aurait fait apparaître le caractère particulier de la fréquence $F_0 + F_c$.

• La boucle s'accroche: état permanent atteint par le système.

Lorsque f_e va rentrer dans la plage $[F_0 - F_c; F_0 + F_c]$, il va apparaître une tension non nulle en sortie du filtre passe-bas, ce qui va faire évoluer la fréquence de sortie de l'oscillateur.

Pour comprendre l'évolution du système, on va présenter ce dernier en terme de système bouclé dans lequel tous les éléments ont un comportement linéaire (simplification).

On supposera que le filtre passe-bas est du premier ordre. On va faire un changement de variable, afin de travailler avec des fréquences f_e' et f_r' qui sont les écarts des fréquence d'entrée f_e et de sortie f_r à la fréquence centrale du V.C.O. f_0 . On pourra ainsi éviter de travailler avec des grandeurs continues, délicates à gérer en terme de variables de Laplace.

On a alors

$$f_r'(t) = f_r(t) - f_0 = K_0 \cdot u(t) \quad \text{soit} \quad f_r'(p) = K_0 \cdot u(p)$$

En terme de phase, on en déduit que

$$\frac{d\phi_r'(t)}{dt} = 2\pi \cdot K_0 \cdot u(t) \quad \text{soit} \quad \phi_r'(p) = \frac{2\pi \cdot K_0}{p} \cdot u(p)$$

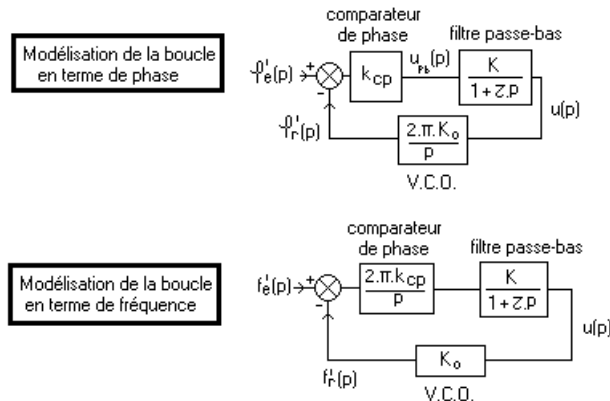
De plus

$$f_e' = f_e - f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\phi_e'}{dt} \quad \text{soit} \quad \phi_e'(p) = \frac{2\pi \cdot f_e'}{p}$$

On remarque également que

$$u_{pb} = k_{cp} \cdot (\varphi_e - \varphi_r) = k_{cp} \cdot (\varphi_e' - \varphi_r')$$

En utilisant les expressions précédentes (fruit de linéarisations représentant des hypothèses « lourdes »), on peut établir les schémas suivants :



Si on raisonne en terme de fréquence, appliquer soudainement une sinusoïde à f_e revient à appliquer un échelon de fréquence d'amplitude f_e . D'après le théorème de la valeur finale, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f_e'(t) - f_r'(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (f_e(t) - f_r(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot (f_e'(p) - f_r'(p)))$$

En calculant l'écart de phase, on trouve que

$$f_e'(p) - f_r'(p) = f_e'(p) - \left(\frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K \cdot K_o}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)} (f_e'(p) - f_r'(p)) \right)$$

ce qui conduit à

$$f_e'(p) - f_r'(p) = \frac{f_e'(p)}{1 + \frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K \cdot K_o}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}}$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f_e(t) - f_r(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot (f_e'(p) - f_r'(p))) = 0$$

Le signal de sortie de V.C.O. sera de même fréquence que la sinusoïde d'entrée. En revanche, une fois le régime permanent établi, on va vérifier que ces deux signaux sont déphasés l'un par rapport à l'autre

♦ Calcul du déphasage entre le signal d'entrée et le signal de sortie du V.C.O. :

Dans le cas d'un comparateur de phase à base de multiplieur et de filtre passe-bas, le signal $u(t)$ est de la forme $u(t) = k_{cp} \cdot \cos(\varphi_e(t) - \varphi_r(t)) = k_{cp} \cdot \cos \varphi(t)$. En régime permanent, on a égalité de fréquence pour $e(t)$ et $r(t)$ et $\varphi(t)$ est constante. On peut donc écrire que

$$f_e = f_r = f_0 + k_{cp} \cdot K \cdot K_o \cdot \cos \varphi \quad \text{soit que} \quad \cos \varphi = \frac{f_e - f_0}{k_{cp} \cdot K \cdot K_o}$$

Dans le cas particulier où $f_e = f_0$, on trouve donc que $\cos \varphi = 0$, ce qui signifie que le déphasage peut prendre les valeurs $+$ ou $-\pi/2$. La position stable dépend du signe du gain du V.C.O. et du comparateur de phase...

• La boucle s'accroche: dynamique d'évolution du système.

Si on s'intéresse à la dynamique de la réponse en fréquence, on calcule la fonction de transfert en boucle fermée du système ce qui donne

$$\frac{\Delta f_r(p)}{\Delta f_e(p)} = \frac{\frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K \cdot K_o}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}}{1 + \frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K \cdot K_o}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K \cdot K_o} \cdot p + \frac{\tau}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K \cdot K_o} \cdot p^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\pi \cdot m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On constate qu'il s'agit d'un système du second ordre avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K \cdot K_o}{\tau}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K \cdot K_o \cdot \tau}}$$

Si on réalise le filtre passe-bas avec un filtre R-C, alors $K = 1$ et τ sera choisi pour que le coefficient d'amortissement soit assez fort pour limiter le dépassement. On s'assurera ainsi une bonne marge de phase.

rq: Il ne faut pas oublier que τ représente la coupure du filtre. C'est donc un paramètre qui influe sur la plage de capture. Il faudra veiller à ce que cette fréquence de coupure maintienne une plage de capture inférieure à la plage de verrouillage, sinon, la boucle ne pourra jamais s'accrocher!

rq: Lors de la capture, la dynamique (notamment l'amortissement) est importante. En effet, un dépassement trop fort peut empêcher la capture. La boucle ne parviendra alors jamais à atteindre un état permanent. On est dans le cas d'un système linéarisé théoriquement toujours stable mais qui est rendu instable par une non linéarité...

rq: La tension en entrée du V.C.O. reste nulle tant que la fréquence d'entrée n'est pas dans la plage de capture. Dès que f_e rentre dans cette plage, la tension u évolue afin que f_r tende vers f_e . Une fois que le système a atteint le régime permanent, u prend une valeur constante. Si on fait alors fluctuer lentement f_e par rapport à la dynamique de la boucle, u va suivre les évolutions de cette dernière ...

• Bilan :

On en déduit donc la plage dans laquelle la fréquence du signal d'entrée permet au système de s'accrocher:

$$[F_0 - F_c ; F_0 + F_c]$$

Le fait d'appliquer une sinusoïde dans cette plage en entrée de la boucle va permettre d'obtenir, en régime permanent, un signal $r(t)$ de même fréquence mais déphasé.

Plage de verrouillage.

Après avoir appliqué un signal de fréquence compris dans la plage de capture, on vient de voir que la sortie de l'oscillateur se retrouvait, après un état transitoire, à même fréquence mais déphasée par rapport à l'entrée. Nous allons maintenant faire varier lentement la fréquence f_e . Nous supposons par exemple qu'elle augmente (le raisonnement serait identique pour une diminution...).

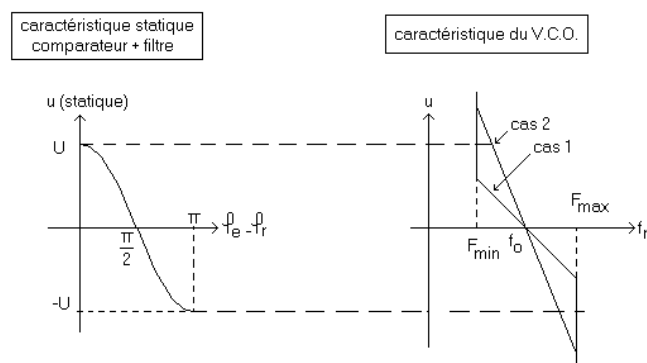
• Si on fait augmenter f_e , on va finir par rencontrer la plage de fonctionnement non-linéaire du V.C.O., représentée dans notre cas par la fréquence F_{max} . Au-delà de cette fréquence, le V.C.O. est incapable de répondre à l'ordre qui lui est donné. Dans ce cas, la boucle décroche et la fréquence du V.C.O. revient à la valeur F_0 . En effet, l'état $f_e = F_{max}$ est instable. Dès que le système est poussé au-delà de F_{max} , le filtre passe-bas permet de récupérer un signal $V_s(t)$ de la forme

$$V_s(t) = k_{cp} \cdot (2 \cdot \pi \cdot f_e \cdot t - 2 \cdot \pi \cdot F_{max} \cdot t + cte)$$

ce signal est nul en valeur moyenne ce qui fait que la fréquence du V.C.O. ne reste pas à F_{max} , mais retombe à F_0 . On définit ainsi la plage de verrouillage la plus large possible.

• Cependant, la non linéarité du comparateur de phase peut elle aussi provoquer le décrochage de la boucle (la tension en sortie du comparateur de phase à multiplieur est bornée, ce qui va limiter la plage de variation de tension en entrée du V.C.O. et donc la plage de fréquence en sortie de ce dernier). Si on demande à la boucle de s'accrocher sur une fréquence qui n'appartient pas à cette plage, elle en sera incapable... Dans ce cas, la plage de capture dépendra des caractéristiques du comparateur de phase et du gain du V.C.O. ...

• Pour résumer, dans le cas d'un comparateur de phase à multiplieur, on peut ainsi envisager les deux configurations différentes suivant la caractéristique du V.C.O.:

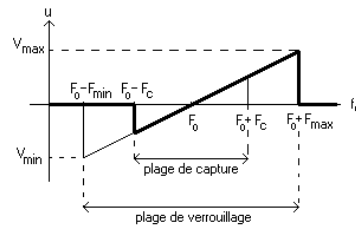


Le cas 1 correspond à une plage de verrouillage imposée par le V.C.O. alors que le cas 2 correspond à une plage de verrouillage imposée par le comparateur de phase.

rq: En pratique U peut évoluer avec l'amplitude du signal d'entrée, ce qui signifie que la plage de verrouillage peut varier notablement suivant l'utilisation que l'on fait de la P.L.L....

Caractéristique statique générale.

On peut caractériser les différents états du V.C.O. suivant la fréquence du signal d'entrée sur la caractéristique suivante (on suppose ici que c'est le V.C.O. qui limite la plage de verrouillage):



En gras, on a représenté l'évolution de la tension du V.C.O. (image de la fréquence de sortie) pour un signal d'entrée présentant une fréquence croissante... A $F_0 - F_c$, on observe la capture, alors qu'à $F_0 + F_{\max}$, on observe le décrochage (on sort de la plage de verrouillage)...

rq : les états transitoires n'ont pas été représentés... On suppose que l'évolution conduisant à cette caractéristique se fait de façon quasi-statique.

IV.9.3. Réalisation pratique.

Il existe des composants électroniques qui comportent tous les éléments d'une boucle à verrouillage de phase, excepté le filtre (4046, ...). Cependant, il est également possible de réaliser une boucle avec des éléments séparés, ce qui est un peu plus pédagogique. Pour cela, on peut réaliser l'ensemble (comparateur de phase / filtre) avec un multiplieur analogique (AD633 par exemple) et un filtre passe bas de type RC.. Comme oscillateur commandé en tension, on utilise un générateur avec une entrée de wobulation (« sweep in ») comme par exemple un générateur Thandar. On fixe la plage de capture avec le filtre RC (prendre quelques kHz de bande passante) et on choisit une fréquence centrale de l'oscillateur (fréquence pour l'entrée « sweep in » nulle) de quelques 100 kHz (par exemple 200 kHz).

On applique alors en entrée de la boucle un signal sinusoïdal de fréquence assez inférieure à 200 kHz (hors de la plage de capture). Dans ce cas, les deux oscillateurs sont non synchrones et si on les observe à l'écran, la trace dérive.

En augmentant la fréquence du signal d'entrée, celle-ci finit par rentrer dans la plage de capture et l'oscillateur commandé s'accroche sur le signal d'entrée. Les deux traces à l'écran sont alors stables et le restent tant que l'on est dans la plage de verrouillage (pourvu que la fréquence n'évolue pas trop vite).

Bibliographie :

- [1] « Cours d'automatique », Tome 1, 2 et 3, Rivoire & Ferrier, Eyrolles
- [2] « Transmission de signaux », C. More, Tec & Doc
- [3] « Asservissements », M. Chauveau, poly CNED.
- [4] « Commande des machines à courant continu à vitesse variable » J.P. Louis, B. Multon & M. Lavabre, Techniques de l'ingénieur, D3III-3610
- [5] « Alimentations à découpage – convertisseurs à résonance - principes, composants, modélisation » J.P. Ferrieux & F. Forest, DUNOD.
- [6] Texte de TP phytem sur les photorécepteurs, B.Journet et C. T. Nguyen.