#### Sébastien Bourdreux

Agrégation de Physique Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Utilisation des propriétés de symétrie dans l'étude des champs électromagnétiques Exemples

# Table des matières

1	Cor	omportement des grandeurs électromagnétiques dans les opérations de symétrie				
	1.1	Grandeurs polaires et axiales	6			
		1.1.1 Définitions générales	6			
		1.1.2 Cas des grandeurs électromagnétiques	6			
	1.2	Propriétés de symétrie spatiale des vecteurs	7			
		Symétrie spatio-temporelle des grandeurs physiques	8			
	1.4		8			
		Le principe de symétrie	9			
			9			
		1.5.2 Enoncé du principe	9			
		1.5.3 Deux exemples simples	.0			
			.1			
			1			
			.5			
		1.6.3 Antisymétrie plane	.8			
		1.6.4 En résumé	20			
			20			
<b>2</b>	Syn	nétrie des champs électriques 2	1			
2	<b>Syn</b> 2.1	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	1 21			
2	•	Utilisation du principe de Curie				
2	2.1	Utilisation du principe de Curie       2         Calcul des champs électriques       2	21			
2	2.1	Utilisation du principe de Curie       2         Calcul des champs électriques       2         2.2.1 La surface de Gauss conventionnelle       2	21 22			
2	2.1	Utilisation du principe de Curie       2         Calcul des champs électriques       2         2.2.1 La surface de Gauss conventionnelle       2         2.2.2 Principales symétries rencontrées       2	21 22 23			
2	2.1	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques22.2.1 La surface de Gauss conventionnelle22.2.2 Principales symétries rencontrées22.2.3 Les doublets électriques2	21 22 23 23			
2	2.1 2.2	Utilisation du principe de Curie       2         Calcul des champs électriques       2         2.2.1 La surface de Gauss conventionnelle       2         2.2.2 Principales symétries rencontrées       2         2.2.3 Les doublets électriques       2         Exemple : la feuille plane d'épaisseur $e$ chargée uniformément       2	21 22 23 23 26			
2	2.1 2.2	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques2 $2.2.1$ La surface de Gauss conventionnelle2 $2.2.2$ Principales symétries rencontrées2 $2.2.3$ Les doublets électriques2Exemple : la feuille plane d'épaisseur $e$ chargée uniformément2 $2.3.1$ Symétrie du problème2	21 22 23 23 26 28			
2	2.1 2.2	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques2 $2.2.1$ La surface de Gauss conventionnelle2 $2.2.2$ Principales symétries rencontrées2 $2.2.3$ Les doublets électriques2Exemple : la feuille plane d'épaisseur $e$ chargée uniformément2 $2.3.1$ Symétrie du problème2 $2.3.2$ Calcul des champs et potentiels3	21 22 23 23 26 28			
2	2.1 2.2 2.3	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques22.2.1 La surface de Gauss conventionnelle22.2.2 Principales symétries rencontrées22.2.3 Les doublets électriques2Exemple : la feuille plane d'épaisseur e chargée uniformément22.3.1 Symétrie du problème22.3.2 Calcul des champs et potentiels3Exemple classique : la spire chargée3	21 22 23 23 26 28 29			
2	2.1 2.2 2.3	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques22.2.1 La surface de Gauss conventionnelle22.2.2 Principales symétries rencontrées22.2.3 Les doublets électriques2Exemple : la feuille plane d'épaisseur e chargée uniformément22.3.1 Symétrie du problème22.3.2 Calcul des champs et potentiels3Exemple classique : la spire chargée3Méthode des images électriques3	21 22 23 23 26 28 29 30			
2	2.1 2.2 2.3	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques22.2.1 La surface de Gauss conventionnelle22.2.2 Principales symétries rencontrées22.2.3 Les doublets électriques2Exemple : la feuille plane d'épaisseur e chargée uniformément22.3.1 Symétrie du problème22.3.2 Calcul des champs et potentiels3Exemple classique : la spire chargée3Méthode des images électriques32.5.1 Théorème d'unicité3	21 22 23 23 26 28 29 30 31			
2	2.1 2.2 2.3	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques22.2.1 La surface de Gauss conventionnelle22.2.2 Principales symétries rencontrées22.2.3 Les doublets électriques2Exemple : la feuille plane d'épaisseur e chargée uniformément22.3.1 Symétrie du problème22.3.2 Calcul des champs et potentiels3Exemple classique : la spire chargée3Méthode des images électriques32.5.1 Théorème d'unicité32.5.2 Théorème des images électriques3	21 22 23 23 26 28 29 30 31 33			
3	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques22.2.1 La surface de Gauss conventionnelle22.2.2 Principales symétries rencontrées22.2.3 Les doublets électriques2Exemple : la feuille plane d'épaisseur e chargée uniformément22.3.1 Symétrie du problème22.3.2 Calcul des champs et potentiels3Exemple classique : la spire chargée3Méthode des images électriques32.5.1 Théorème d'unicité32.5.2 Théorème des images électriques32.5.3 Conseils pratiques3métrie des champs magnétiques3	21 22 23 23 26 28 29 30 31 33 33 33			
	2.1 2.2 2.3 2.4 2.5	Utilisation du principe de Curie2Calcul des champs électriques22.2.1 La surface de Gauss conventionnelle22.2.2 Principales symétries rencontrées22.2.3 Les doublets électriques2Exemple : la feuille plane d'épaisseur e chargée uniformément22.3.1 Symétrie du problème22.3.2 Calcul des champs et potentiels3Exemple classique : la spire chargée3Méthode des images électriques32.5.1 Théorème d'unicité32.5.2 Théorème des images électriques32.5.3 Conseils pratiques3métrie des champs magnétiques3	21 22 23 23 26 28 29 30 31 33 33 33			

	3.2.1	Courant rectiligne infini				
	3.2.2	Courant circulaire				
3.3	Le théorème d'Ampère					
	3.3.1	Distribution de révolution				
	3.3.2	Distribution invariante par translation				
3.4	Le the	éorème de Stokes				
	3.4.1	Courant rectiligne infini				
	3.4.2	Courant circulaire				
3.5	La spi	re de courant				
	3.5.1	Champ magnétique				
	3.5.2	Application : l'expérience de Rowland				
	3.5.3	Application: le solénoïde				
	3.5.4	Application: les bobines d'Helmholtz				
3.6	Exem	ple : la feuille conductrice plane d'épaisseur $e$				
	3.6.1	Analyse de la symétrie				
	3.6.2	Expressions des champs $\vec{B}$ et $\vec{A}$				
3.7	Quelq	ues phénomènes propres au magnétisme				
	3.7.1	Champ créé par les aimants				
	3.7.2	Aimant ellipsoïdal				
	3.7.3	Effet Hall				
	3.7.4	Effet Wiedemann				
	3.7.5	Effets gyromagnétiques				

# Introduction

Cristallographes, physiciens et chimistes se sont rapidement aperçus, au cours du XIXème siècle, que les propriétés d'un milieu cristallin dépendent largement de sa symétrie. Il en est ainsi de ses propriétés mécaniques qui, à la différence de celles d'un verre ou d'un liquide, sont anisotropes : existence de faces naturelles et de faces de clivage, croissance cristalline anisotrope, coefficients anisotropes de Lamé, figures de pression, de choc, de corrosion...

Il en est de même des propriétés optiques et électriques : biréfringence (Biot, Fresnel, Brewster), pouvoir rotatoire (Arago 1811), pouvoir rotatoire magnétique (Faraday 1846), pyroélectricité, piézoélectricité (frères Curie 1880)... En travaillant sur les tatrates, Pasteur découvrit en 1848 que le pouvoir rotatoire était intimement lié à la symétrie, en dépendant soit de la symétrie des molécules composant le cristal ou de la symétrie de l'empilement cristallin (quartz).

Dès 1830, Vivell affirma que la symétrie des propriétés optiques d'un solide est identique à sa symétrie géométrique. Cette affirmation n'avait rien d'évident : en effet, des échantillons distincts d'un même milieu cristallin peuvent avoir des formes extérieures différentes, la morphologie dépendant des conditions de croissance : il faut alors se référer à des conditions de croissance "idéales" pour lesquelles la morphologie reflète la symétrie ponctuelle du cristal. A la suite des travaux de Biot, Brewster et Fresnel, Franz Neumann énonça en 1833 un principe de symétrie selon lequel toutes les propriétés physiques macroscopiques d'un cristal possèdent la même symétrie ponctuelle que ce cristal. Les travaux de Pasteur puis des frères (Pierre et Jacques) Curie, qui prédirent puis observèrent l'effet piézoélectrique, permirent finalement à Pierre Curie d'énoncer de manière claire, générale, rigoureuse et opérationnelle, dès 1894, le principe de symétrie qui porte son nom et qui est applicable à tout milieu.

Les propriétés d'invariance d'un système physique, classique ou quantique, sont essentielles. Nous allons en faire la démonstration plus d'une fois. Pour chaque système dont on cherchera à déterminer les propriétés physiques,

- il faut rechercher de manière exhaustive les invariances du système, qu'elles soient géométriques ou spatio-temporelles
- la symétrie étant connue, il faut savoir en tirer un maximum d'informations

Historiquement, l'exploitation de la symétrie s'est faite en plusieurs temps. Des considérations de symétrie très élémentaires, mais efficaces, se sont tout d'abord développées sur la base du principe de Curie. Cependant, bien des résultats intéressants de physique classique ne peuvent être ainsi obtenus que très péniblement, et restent hors de portée.

La symétrie n'est pas un simple jeu mathématique, elle ne sert pas seulement à décrire ou à caractériser un système physique. Comme l'analyse dimensionnelle, comme l'utilisation des trois principes de la thermodynamique macroscopique ou celle du principe de causalité, l'étude de la symétrie d'un système permet d'atteindre certaines de ses propriétés. Elle est utile même si l'on connaît les lois ou interactions mises en jeu dans le système considéré, et si ce système est suffisamment simple pour que les équations qui le décrivent soient solubles exactement. Elle est indispensable dans le cas contraire, car les seuls résultats exacts qu'on peut espérer obtenir sont ceux qui résultent de propriétés de symétrie. C'est typiquement le cas en physique cristalline : l'évaluation de propriétés d'un cristal est considérablement simplifiée par l'exploitation systématique de la triple périodicité, cette opportunité disparaissant avec les amorphes ou les quasicristaux.

Néanmoins, les propriétés dégagées à l'aide de méthodes de symétrie n'ont qu'un caractère qualitatif, ce qui n'enlève rien de leur intérêt. Si on ne peut pas se dispenser d'élaborer des modèles physiques, si la symétrie n'apporte pas de résultats nouveaux par rapport aux principes fondamentaux de la Physique, elle simplifie leur dérivation.

En mécanique quantique, la factorisation d'une fonction d'onde est possiblr en une fonction déterminée par la symétrie du problème et une fonction dépendant explicitement du système ou du modèle considéré. Cette factorisation simplifie la résolution de l'équation de Schrödinger. Plus généralement, la symétrie fournit une base de fonctions adaptée au problème considéré et facilite les diagonalisations : la recherche des modes normaux de vibration des molécules, effectuée péniblement par Brester, a aisi été condensée en quelques pages par Wigner. Un résultat une fois acquis, elle permet d'en clarifier la signification, de bien comprendre s'il est une conséquence de la géométrie du système ou des interactions mises en jeu.

Dans cette leçon, nous allons montrer que l'utilisation des propriétés de symétries dans l'étude des champs électromagnétiques permet de simplifier les problèmes avant l'application des théories physiques s'y référant.

# Chapitre 1

# Comportement des grandeurs électromagnétiques dans les opérations de symétrie

# 1.1 Grandeurs polaires et axiales

#### 1.1.1 Définitions générales

On peut classer les grandeurs physiques en deux catégories :

– les grandeurs **polaires** : encore appelées "vraies" grandeurs, leur signe est une propriété intrinsèque à ces grandeurs, une donnée de la nature en quelque sorte. Ce signe est totalement indépendant de toute convention d'orientation d'espace.

Exemples de vecteurs polaires :  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{E}$ 

Exemples de scalaires polaires : longueur, volume, angle, masse, travail dW =  $\vec{F} \cdot d\vec{r}^{\ 1}$ 

– les grandeurs **axiales** : encore appelées "pseudo"-grandeurs, leur signe est sans signification physique et est arbitraire ; il est fixé en se référant à la convention d'orientation de l'espace et change avec cette convention.

Exemples de vecteurs axiaux : la surface  $\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{a}\wedge\vec{b},\,\vec{\Gamma}=\vec{r}\wedge\vec{F},\,\vec{L}=\vec{r}\wedge m\vec{v},\,\vec{B}^{\ 2}$ 

Exemples de scalaires axiaux : surfaces, angles orientés

# 1.1.2 Cas des grandeurs électromagnétiques

Nous allons montrer que les vecteurs du champ électromagnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  n'ont pas le même comportement vis-à-vis des symétries recontrées.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Le produit scalaire de deux grandeurs polaires sera une grandeur polaire : le signe de ce produit traduira une propriété physique...

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Tout vecteur défini comme le produit vectoriel de deux vecteurs polaires est dit axial, puisque la définition de ce produit fait intervenir la convention d'orientation...

#### Grandeurs électriques

Il résulte de la loi de force de Coulomb

$$\vec{F_{el}} = q\,\vec{E}$$

que le champ électrostatique  $\vec{E}$  est un vrai vecteur (ou vecteur polaire). Comme nous le verrons, sa transformation par un plan de symétrie l'envoie sur son symétrique par rapport à ce plan. Nous verrons par ailleurs que l'expression du potentiel électrique scalaire,

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$$

tout comme celle du champ  $\vec{E}$ , conduit à dire qu'il s'agit d'un scalaire polaire ou vrai.

#### Grandeurs magnétiques

Si l'on examine la formule de Lorentz donnant l'action d'un champ  $\vec{B}$  sur une charge en mouvement

$$\vec{F_L} = q \, \vec{v} \wedge \vec{B}$$

où  $\vec{F_L}$  et  $\vec{v}$  sont de vrais vecteurs, on voit nécessairement que  $\vec{B}$  est un pesudo-vecteur (ou vecteur axial). Dans l'opération de symétrie par rapport à un plan de symétrie, comme nous le verrons, le champ  $\vec{B}$  se transforme en son antisymétrique, c'est-à-dire en l'opposé de son symétrique.

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est un champ vectoriel car il s'exprime à un coefficient près comme la somme de vecteurs densités de courant  $\vec{J}$ . Il résulte que  $\vec{A}$  présente les mêmes caractéristiques de symétrie que le champ électrique  $\vec{E}$ , il se transforme en son symétrique par rapport à un plan de symétrie.

# 1.2 Propriétés de symétrie spatiale des vecteurs

De la définition d'un vecteur axial  $\check{V}$ , on peut déduire immédiatement ses propriétés de transformation dans une opération de symétrie, pour deux raisons.

- le définition du produit vectoriel est incomplète en ce sens qu'elle ne précise pas ses propriétés de transformation dans une isomérie T. On écrire ici que  $T(\vec{A} \wedge \vec{B}) = T\vec{A} \wedge T\vec{B}$ : pour trouver l'image de V, il faudra déterminer l'image du système physique auquel il est associé (exemple : le cercle orienté pour le vecteur rotation), et l'image de V sera le vecteur axial V associé à l'image du système physique
- pour déterminer  $\check{V}'$ , il faudra utiliser dans l'espace-image la même convention d'orientation que dans l'espace-objet : la convention d'espace ne sera pas symétrisée<sup>3</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Tout à fait logiquement, d'ailleurs, puisqu'un observateur peut à priori observer simultanément l'objet et l'image, et utilisera alors spontanément la même convention d'orientation pour les décrire.

# 1.3 Symétrie spatio-temporelle des grandeurs physiques

Après avoir classé les grandeurs physiques en deux catégories, polaires et axiales (ou vraies et pseudo), une classification analogue s'introduit dès que l'on considère leurs transformations concernant le temps.

En effet, l'axe des temps peut être orienté de manière arbitraire, soit vers l'avenir - c'est la convention habituelle, à la manière de l'utilisation de repères d'espace directs -, soit vers le passé.

Considérons le mouvement d'une particule sur son orbite. Avec la convention habituelle, le vecteur vitesse est, à chaque instant, dirigé dans le sens du mouvement. Si on utilise la convention inverse, la loi du mouvement ne change pas (il est évidemment indépendant de l'observateur), mais le vecteur vitesse change de signe, comme tout intervalle de temps. L'accélération est au contraire invariante dans ce changement de convention, en complet accord avec l'expression du principe fondamental de la dynamique. Renverser le sens du temps est équivalent à renverser le sens du mouvement en conservant le sens du temps.

On peut, dans ce cadre, classer les grandeurs physiques en deux catégories suivant leur comportement quand on renverse la convention d'orientation du temps,

- les grandeurs *paires*, qui sont invariantes
- les grandeurs *impaires*, covariantes, ce qui signifie qu'elles changent de signe

D'une manière générale, les variables d'espace ainsi que la masse et la charge électrique sont des grandeurs paires; si le temps lui-même et la vitesse sont impairs, l'accélération et la force sont paires. Toutes les grandeurs électrostatiques (champ électrique, moment dipolaire ou quadripolaire...) sont paires.

Pour un électron sur son orbite, le moment cinétique est impair (il change de signe avec la vitesse), comme le vecteur vitesse angulaire et le moment magnétique associé au mouvement, le champ magnétique créé par l'électron, et les potentiels scalaire et vecteurs magnétiques <sup>4</sup>.

## 1.4 Homogénéité symétrique des relations

Dès qu'une loi ne peut relier entre elles que des grandeurs ayant le même caractère polaire ou axial, elle ne peut relier entre elles que des grandeurs ayant le même caractère pair ou impair par rapport au temps. Cette remarque fournit une nouvelle méthode de vérification des formules, sachant qu'une grandeur prodit d'un nombre pair (impair) de grandeurs impaires est une grandeur paire (impaire).

La formule de Newton  $\vec{F}=m\vec{a}$  relie deux vecteurs polaires pairs, elle est donc plausible. Il en est de même du théorème du moment cinétique  $d\vec{L}/dt=\vec{\Gamma}$  qui relie deux vecteurs axiaux pairs ou encore de l'équation de continuité  $div(\rho\vec{v})=-\partial\rho/\partial t$  reliant deux scalaires polaires impairs.

Les grandeurs paires et les grandeurs impaires ont les mêmes propriétés de transformation dans les opérations de symétrie triviales. Leurs propriétés de transformation diffèrent au contraire dans les opérations de symétrie mixte. Prenons par exemple le cas des différences de

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Les grandeurs paires et impaires par rapport au temps sont parfois appelées respectivement électriques et magnétiques.

comportement entre un champ électrique et un champ magnétique dans les opération miroir (m) et anti-miroir (m').

#### Remarque

On pourrait également rajouter la notion de symétrie électrique. Le signe d'une charge électrique est arbitraire, ce n'est pas une propriété intrinsèque : par convention, la charge de l'électron est négative ; le signe des charges de toutes les autres particules est alors fixé sans ambiguité. Une classification nouvelle des grandeurs physiques s'introduit quand on envisage la convention qui fixe le signe des charges électriques et l'opération d'antisymétrie qui change le signe des charges électriques.

Les variables d'espace et les grandeurs mécaniques sont électriquement paires, la charge et les autres grandeurs électriques, électrocinétiques et magnétiques sont impaires.

# 1.5 Le principe de symétrie

#### 1.5.1 Contexte historique

Enoncé en 1833 par Franz Neumann, puis par Minnigerode en 1884, et de manière plus complète par Curie en 1894, le principe de symétrie permet avant l'utilisation de toute théorie physique d'extraire des informations qualitatives de la connaissance de la symétrie d'un système, et d'en simplifier l'étude ultérieure.

Comme les trois principes de la thermodynamique ou le principe de causalité, le principe de symétrie n'est justifié que par l'expérience. Son utilisation, implicite, est naturelle et ancienne.

- Anaximandre, philosophe grec, considéra la Terre comme un objet céleste isolé dans l'espace, cette Terre étant considérée comme située au centre de la sphère céleste. Et puisque celle-ci se trouve à égale distance de tous les points du ciel, elle n'a aucune raison de tomber.
- Suivant Archimède, si on place deux objets identiques sur les plateaux d'une balance parfaite, la balance reste en équilibre. On ne voit pas, en effet, pourquoi elle pourrait pencher d'un côté plutôt que de l'autre!
- Au XVIIIème siècle, on s'est demandé si les étoiles aller s'effondrer les unes sur les autres sous l'effet de leur attraction mutuelle. En effet, si les étoiles sont en nombre fini, un tel effondrement est inévitable, puisque la portée de la force de gravitation est infinie. En revanche, si elles sont en nombre infini, les attraction mutuelles s'annulent au contraire en raison de la symétrie statistique de translation et il ne peut y avoir effondrement.

## 1.5.2 Enoncé du principe

Considérons un système physique, c'est-à-dire l'ensemble d'un objet (atome, cristal, objet macroscopique ...) et de son environnement (champs extérieurs, de contrainte ...). L'étude d'une propriété physique quelconque de ce système peut être exprimée en ces termes : la *cause* est le système, et l'*effet* est la propriété considérée. Selon Curie,

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes.

Si l'on considère par exemple un anagyre <sup>5</sup> : cet objet ne présente pas de plan horizontal ou vertical de symétrie, il est donc *chiral* <sup>6</sup>. On constate que sa mise en rotation autour d'un axe vertical est facile dans un sens, mais qu'elle est vite arrêtée par les frottements dans l'autre sens. De même, si on appuie brièvement sur l'une de ses extrémités, il se met à tourner dans le sens "facile". Ces observations sont en accord avec le principe de symétrie.

Le principe de Curie a été formulé de manière très concise par Y. Bouligand : il n'y a pas de génération spontanée des dissymétries. Il faut donc souligner deux points importants : d'une part, le plus souvent, la symétrie de l'effet est identique à celle de la cause, et non supérieure ; d'autre part, le principe n'est valable que dans le cas où la solution du problème est unique, ce qui est loin d'être toujours le cas <sup>7</sup>. Le principe de Curie fixe donc une limite minimale de la symétrie d'un effet lorsque celle de la cause est connue, et donc une limite maximale de la cause quand celle de l'effet est connue. On parle alrs de formes directe et inverse du principe.

#### 1.5.3 Deux exemples simples

#### Les images électrostatiques

Considérons par exemple une ellipsoïde de révolution d'axe  $\Delta$  et de centre O, portant la charge q uniformément répartie en volume. On démontre que, pour calculer le potentiel extérieur, on peut le remplacer par son image électrostatique définie ainsi :

- si l'ellipsoïde est allongé, et si F et F' sont les foyers d'une section méridienne, l'image est le segment [FF'] uniformément chargé et portant la même charge totale q
- si l'ellipsoïde est une sphère, l'image est la charge ponctuelle q placée en O
- si l'ellipsoïde est aplati, l'image est un disque de centre O perpendiculaire à  $\Delta$ , uniformément chargé et de charge totale q. Les points de la circonférence du disque sont les foyers des sections méridiennes

On vérifie dans les trois cas que l'image a la même symétrie que le système. L'image d'une sphère chargée en mouvement uniforme est aussi une ellipsoïde de révolution, qui est plus symétrique que l'ensemble d'une sphère et d'un dimètre orienté.

#### En électrocinétique

Dans le circuit suivant, la force électromotrice e et les résistance R, R', R" et R"' sont connues, et on cherche les intensités algébriques des courants dans les différentes branches orientées du circuit et les différences de potentiel entre les différents noeuds.

On observe que le circuit est invariant dans une rotation de 180  $\,^\circ$  autour du point E. Par suite, on a les relations

$$i_1 = i_3$$

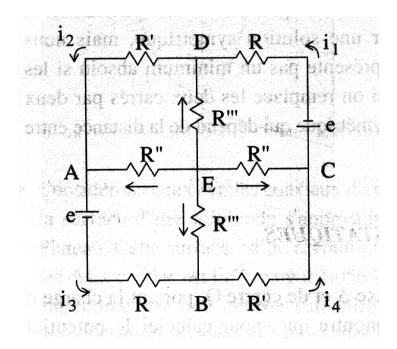
et

$$i_2 = i_4$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Morceau de bois allongé, dont la face supérieure est plane ; la face inférieure, sur laquelle il repose, est bombée.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Son image à travers un miroir ne lui est pas superposable.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Dans ce cas, il faut considérer l'ensemble des solutions pour retrouver la manifestation du principe de Curie. C'est l'exemple de la tige de bois verticale qu'on fait ployer ...



entre les intensités,

$$V_{CE} = V_{AE}$$

et

$$V_{DE} = V_{BE}$$

entre les différences de potentiel. On en déduit que les points A et C d'une part, et B et D d'autre part, sont au même potentiel. La simplification apportée par la symétrie est évidente : pour calculer les quatre intensités, il suffira d'écrire deux relations de Kirchhoff et non quatre!

# 1.6 Application aux champs électromagnétiques

Nous allons dans la suite chercher à appliquer le principe de Curie aux problèmes de l'électromagnétisme : les sources sont ici les "causes" évoquées par Curie, et les champs sont les "effets".

#### 1.6.1 Translations et rotations

Pour les opérations de translation et de rotation, les composantes électrique et magnétique du champ électromagnétique ont le même comportement.

#### **Translation**

En ce qui concerne une invariance de la distribution de charges ou de courants selon une translation  $\Delta z$  selon un axe (Oz) par exemple, un observateur percevrait la même distribution qu'il se place au point (x,y,z) ou au point (x,y,z +  $n\Delta z$ ), où n est entier : le champ sera donc

identique en ces deux points!

#### $D\'{e}monstration$

Une distribution de charge  $\Sigma$  telle que la charge volumique  $\rho$  soit invariante par translation d'un vecteur  $\vec{a}$  quelconque parallèle à (Oz) se caractérise par

$$\rho(\vec{r'} + \vec{a}) = \rho(\vec{r'})$$

ce qui fait que  $\rho$  ne dépend pas de z :  $\rho(x',y',z'+a)=\rho(x',y',z')=\rho(x',y')$ . Le potentiel  $V(M)=V(\vec{r})$  créé au point M(x,y,z) vaut

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\vec{r})}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|} d\tau'$$

En N défini par  $\vec{r} + \vec{a}$ ,

$$V(N) = V(\vec{r} + \vec{a}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\vec{r'})}{\|\vec{r} + \vec{a} - \vec{r'}\|} d\tau'$$

c'est-à-dire, par le changement de variable  $\vec{r''} = \vec{r'} - \vec{a}$ ,

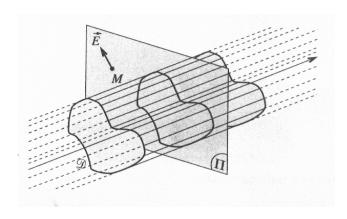
$$V(\vec{r} + \vec{a}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\vec{r''})}{\|\vec{r} - \vec{r''}\|} d\tau'' = V(\vec{r})$$

Ainsi, lorsque <u>les</u> sources sont invariantes par translation, le potentiel V, et par conséquent le champ  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ , le sont aussi :

$$V(M) = V(x, y)$$

et comme  $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ ,

$$\vec{E}(x,y) = E_x(x,y)\vec{e_x} + E_y(x,y)\vec{e_y}$$



Si une distribution de courant  $\Sigma$  présente l'invariance

$$\vec{J}(\vec{r} + \lambda \vec{a}) = \vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}(x, y)$$

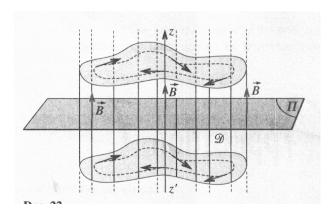
le potentiel vecteur

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\|\vec{r} - \vec{r'}\|} d\tau'$$

Le calcul à mener ici en magnétostatique est analogue à celui déjà effectué en électrostatique, en transposant  $V \to \vec{A}$ ,  $1/\varepsilon_o \to \mu_o$  et  $\rho(P) \to \vec{J}(P)$ . Lorsque les sources sont invariantes par translation, le potentiel vecteur, et par conséquent le champ magnétique  $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$  le sont aussi. Dans l'exemple choisi,

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(x, y)$$

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(x, y)$$



#### La rotation

Pour une distribution de charges ou de courants invariante par rotation  $\mathcal{R}$  d'axe  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  autour d'un axe (Oz), deux observateurs placés en M et  $M' = \mathcal{R}(M)$  percevront la même distribution.

Le champ électrique ou magnétique au point M' est le même qu'au point M, à une rotation autour de  $\vec{e_z}$  d'angle  $\alpha$  près.

#### Démonstration

Considérons une distribution  $\Sigma$  de densité volumique de charge  $\rho$  invariante par rotation autour d'un axe (Oz), c'est-à-dire telle que, en coordonnées cylindriques,

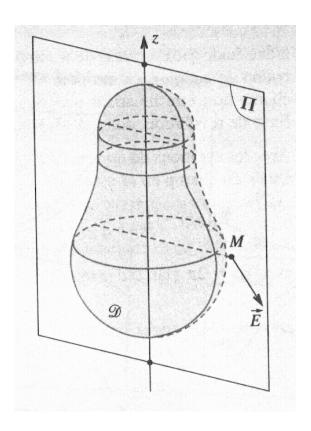
$$\rho(\vec{r'}) = \rho(r', z')$$

Le champ électrique  $\vec{E}(M)$  produit en un point  $M(r,\varphi,z)$  par cette distribution est contenu dans le plan méridien (Orz), qui est un plan de symétrie. Par conséquent  $E_{\varphi} = 0$  soit, puisque  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ ,

$$E_{\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

d'où

$$V(M) = V(r, z)$$



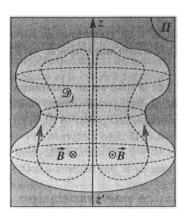
et inversement

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e_r} + E_z(r,z)\vec{e_z}$$

Lorsqu'une dstribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe (Oz), en coordonnées cylindriques,

$$\vec{J}(\rho, \varphi + \varphi', z) = \vec{J}(\rho, \varphi, z)$$

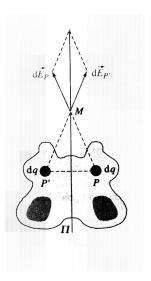
c'est-à-dire :  $\vec{J}(P) = \vec{J}(\rho,z)$ . La démonstration concernant les champ et potentiel-vecteur magnétiques est identique à celle effectuée pour les grandeurs électriques : la variable  $\varphi$  n'apparaît pas explicitement dans l'expression de leurs composantes.



## 1.6.2 Symétrie plane

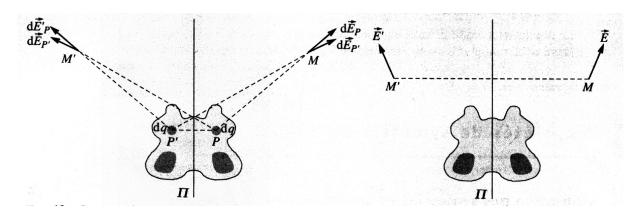
#### Le champ électrique

Pour des symétries élémentaires telles que la symétrie miroir et la symétrie antimiroir, il suffit de considérer les contributions élémentaires  $d\vec{E}_p(M)$  et  $d\vec{E}_{P'}(M)$  au champ total de deux éléments de même volume  $d\tau$  associées aux points P et P' le symétrique (ou antisymétrique) de P. Par exemple :



Sur un plan miroir  $\pi$  d'une distribution de charge  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique créé est parallèle au plan  $\pi$ .

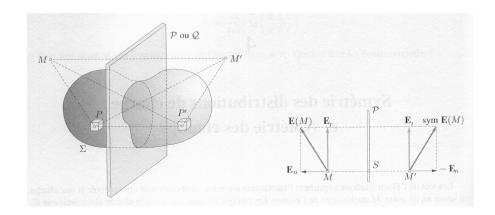
Aux points M et M' symétriques par rapport à un plan  $\pi$  d'une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , les champs électrostatiques  $\vec{E}$  et  $\vec{E'}$  sont symétriques l'un de l'autre.



Démonstration

Dans le cas de figure suivant,
nous avons que

$$dV(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} dq (\frac{1}{PM'} + \frac{1}{P'M'})$$



et en observant les égalités PM = P'M' et PM' = P'M, il en résulte que

$$V(M) = V(M')$$

En ce qui concerne le champ,

$$d\vec{E}(M) =$$

 $\operatorname{et}$ 

$$d\vec{E}(M') = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} + \frac{\overrightarrow{P'M}}{P'M^3}\right)$$

et de la même manière

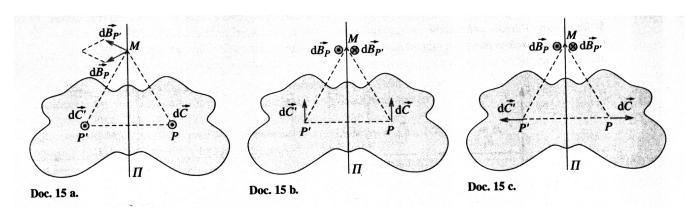
$$\vec{E}(M') = sym \, \vec{E}(M)$$

Tout point du plan de symétrie coïncidant avec son symétrique, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.

#### Le champ magnétique

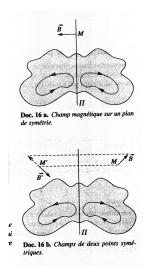
Considérons une une distribution  $\mathcal{D}_j$  de courants invariante par une symétrie plane par rapport à un plan  $\pi$ .

Plaçons-nous en un point M du plan de symétrie. Les contributions élémentaires  $d\vec{B_P}(M)$  et  $d\vec{B_P}(M)$  au champ total des deux éléments de courants  $d\vec{\mathcal{C}}$  et  $d\vec{\mathcal{C}}'$  associés aux points symétriques P et P' par rapport à  $\pi$  peuvent avoir plusieurs orientations.



Dans tous les cas de figure, le champ  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan de symétrie  $\pi$ . On peut donc conclure que le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire à un plan miroir  $\pi$  en chacun de ses points.

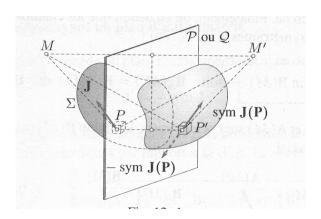
Plus généralement encore, au point M' symétrique d'un point M par rapport à un plan miroir  $\pi$ , le champ magnétique  $\vec{B'}$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{B}$  en M par rapport à ce plan. Ceci vient du fait, comme on l'a vu, que la règle de Biot et Savart définit le champ magnétique comme un produit vectoriel de deux vecteurs polaires : l'opération de symétrie plane inverse le produit vectoriel en respect des conventions d'orientation...



#### Démonstration

Une distribution de charge  $\Sigma$  possède un plan de symétrie magnétostatique si les courants volumiques en des points symétriques P et P' par rapport au plan sont symétriques

$$\vec{J}' = sym \, \vec{J}$$



D'après la figure précédente, nous pourrons écrire

$$d\vec{A}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} (\frac{\vec{J}}{PM} + \frac{\vec{J'}}{P'M}) d\tau$$

18

et

$$d\vec{A}(M') = \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\frac{\vec{J}}{PM'} + \frac{\vec{J'}}{P'M'}\right) d\tau$$

Comme ici aussi P'M' = PM, PM' = P'M et  $\vec{J'} = sym \vec{J}$ , les deux potentiels-vecteurs précédents en deux points symétriques sont égaux

$$\vec{A}(M') = sym \, \vec{A}(M)$$

En ce qui concerne  $\vec{B}$ ,

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} + \frac{\vec{J'} \wedge \overrightarrow{P'M}}{P'M^3} \right)$$

et

$$d\vec{B}(M') = \frac{\mu_o}{4\pi} \left( \frac{\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM'}}{PM'^3} + \frac{\vec{J'} \wedge \overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3} \right)$$

Remarquons alors que  $\overrightarrow{P'M}$  est symétrique de  $\overrightarrow{PM'}$  par rapport au plan, et que  $\overrightarrow{P'M'}$  l'est de  $\overrightarrow{PM}$ . Comme les courants volumiques sont symétriques,

$$\vec{J'} \wedge \overrightarrow{P'M} = -sym(\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM'})$$

et

$$\vec{J'} \wedge \overrightarrow{P'M'} = -sym(\vec{J} \wedge \overrightarrow{PM})$$

et on peut en déduire que les champs magnétiques, produits en deux points symétriques, sont antisymétriques

$$\vec{B}(M') = -sym \, \vec{B}(M)$$

et ainsi, alors que les champs  $\vec{J}$  et  $\vec{A}(M)$  sont symétriques, le champ  $\vec{B}(M)$  est antisymétrique. Cette propriété de  $\vec{B}$  est liée à son caractère axial.

En un point du plan de symétrie de la distribution de courant, le potentiel-vecteur est contenu dans ce plan, et le champ magnétique est normal à ce plan.

## 1.6.3 Antisymétrie plane

#### Le champ électrique

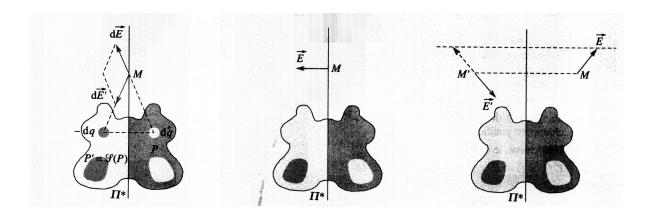
Sur un plan antimiroir  $\pi^*$  d'une distribution  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique créé est perpendiculaire au plan  $\pi^*$ .

Au point M' symétrique du point M par rapport au plan antimiroir  $\pi^*$  d'une distribution de charges  $\mathcal{D}$ , le champ électrostatique  $\vec{E}'$  est l'opposé du symétrique du champ  $\vec{E}$  créé par la distribution en M.

 $D\'{e}monstration$ 

Une distribution de charge  $\Sigma$  possède un plan d'antisymétrie  $\mathcal{Q}$  si deux éléments de volume symétriques par rapport à  $\mathcal{Q}$  contiennent des charges opposées

$$\rho(P') = -\rho(P)$$



En deux points symétriques M et M' par rapport à Q, deux éléments de charge placés respectivement en P et P' produisent les contributions au potentiel

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{P'M}\right)$$

et

$$dV(M') = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{PM'} - \frac{1}{P'M'} \right)$$

Comme PM = P'M' et PM' = P'M, les potentiels sont opposés. Par intégration,

$$V(M') = -V(M)$$

Par un raisonnement analogue, en ce qui concerne le champ,

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} - \frac{\overrightarrow{P'M}}{P'M^3} \right)$$

et

$$d\vec{E}(M') = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o} \left( \frac{\overrightarrow{PM'}}{PM'^3} - \frac{\overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3} \right)$$

Comme PM = P'M' et PM' = P'M, les champs élémentaires sont antisymétriques. Ainsi,

$$\vec{E}(M') = -sym\,\vec{E}(M)$$

#### Le champ magnétique

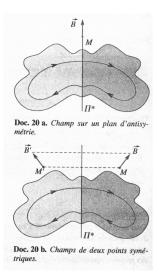
Dans les raisonnements précédents, il suffit de changer le sens du champ élémentaire  $d\vec{B_{P'}}$ . Le champ magnétique est contenu dans le plan antimiroir  $\pi^*$  en chacun de ses points.

Au point M' symétrique du point M par rapport au plan d'antisymétrie  $\pi^*$ , le champ magnétique  $\vec{B'}$  est le symétrique vectoriel du champ  $\vec{B}$  en M.

*Démonstration* 

Une distribution de courant  $\Sigma$  possède un plan d'antisymétrie  $\mathcal Q$  si en deux points symétriques P et P' par rapport à ce plan on a

$$\vec{J}' = -sym \, \vec{J}$$



En utilisant le raisonnement fait concernant le plan de symétrie, en deux points symétriques M et M', on aura

$$\vec{A}(M') = -sym \, \vec{A}(M)$$

et

$$\vec{B}(M') = sym \, \vec{B}(M)$$

#### 1.6.4 En résumé...

	symétrie selon $\pi$	antisymétrie selon $\pi^*$
vrais vecteurs : $\vec{E}$ , $\vec{A}$	contenu dans $\pi$	orthogonal à $\pi^*$
pseudo-vecteurs : $\vec{B}$	orthogonal à $\pi$	contenu dans $\pi^*$

# 1.6.5 Symétries multiples

Il peut exister pour une distribution donnée plusieurs symétries élémentaires (rotation, translation ...).

Il existe en particulier deux cas de symétrie élevée que l'on trouve fréquemment dans l'étude des phénomènes électromagnétiques,

 le champ d'une distribution à symétrie cylindrique d'axe (Oz) : la répartition de charges par exemple n'est fonction que de la distance à l'axe (Oz) et en coordonnées cylindriques on aura

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E(r)\vec{e_r}$$

 le champ d'une distribution à symétrie sphérique de centre O, ne dépendant que de la distance r à O, dont le champ est de la forme, en coordonnées sphériques,

$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = E(r)\vec{e_r}$$

# Chapitre 2

# Symétrie des champs électriques

Nous avons vu que toutes les grandeurs électriques (charge, champ, potentiel, moments dipolaires ou quadrupolaires, etc.) sont des grandeurs **polaires** si l'on adopte la convention que la charge (comme la masse) est polaire. On en déduit ainsi que si un point M est sur un axe de symétrie, le champ est parallèle à l'axe; s'il est dans un miroir, le champ est parallèle au miroir, et si c'est un centre d'inversion, le champ est nul.

Remarquons au passage que, dans une région de l'espace non chargée, la divergence du champ électrique est nulle : on peut donc définir dans cette région un potentiel-vecteur électrique  $\vec{A}$  tel que  $\vec{E} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$ . Ce potentiel-vecteur, rarement utilisé, est un vecteur axial. D'autre part, toutes les grandeurs électrostatiques sont paires dans le renversement du temps et impaires dans le renversement des charges électriques.

# 2.1 Utilisation du principe de Curie

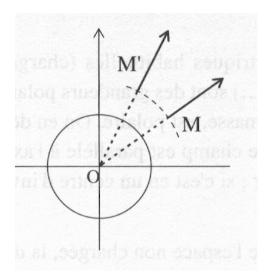
Le principe de symétrie permet d'obtenir des informations sur les densités de charge, les champs électriques et les moments quadrupolaires électriques des systèmes électrostatiques symétriques.

Soit une sphère uniformément chargée, de centre O. Cherchons le champ électrique en un point M de l'espace.

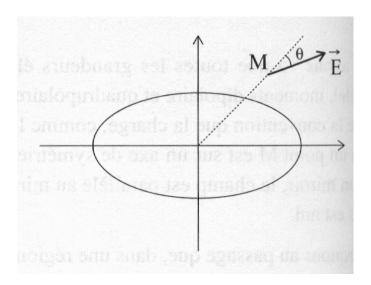
Ce champ est nul en O, centre d'inversion. Le système est invariant dans une rotation d'ordre infini autour de la droite (OM): le champ en M, qui doit être invariant dans cette rotation, est donc **radial**; son sens n'est pas déterminé par le géométrie du système, mais par le signe de la charge. Ce résultat géométrique subsiste si la densité de charge est sphérique sans être homogène, c'est-à-dire si elle dépend de la distance r à l'origine.

Soit M' un point se déduisant de M par rotation autour d'un axe passant par O: le champ en M' se déduit du champ en M. Par suite, le module du champ ne dépend que de r, mais son expression analytique en fonction de r ne peut être obtenue par de simples considérations géométriques.

Dans l'exemple précédent, la direction du champ électrique en un point quelconque de l'espace est entièrement déterminée par la symétrie. Très souvent, cependant, la symétrie ne détermine que partiellement la direction d'un champ en un point quelconque de l'espace : c'est le cas en particulier si le seul élément de symétrie passant par le point M est un miroir.



Considérons par exemple le champ électrique créé par un ellipsoïde (ou un autre volume) de révolution uniformément chargé. Le seul élément de symétrie passant par un point M quelconque est le miroir méridien contenant ce point : d'après le principe de Curie, le champ en ce point est parallèle à ce plan. Mais son orientation dans ce plan n'est pas fixée par la symétrie, l'angle  $\theta$  entre le champ et la direction radiale dépend du degré d'aplatissement de l'ellipsoïde.



En un point M quelconque, le champ d'une répartition de charge de révolution n'est pas radial sauf circonstance accidentelle.

# 2.2 Calcul des champs électriques

Les calculs classiques menés en 1er cycle universitaire font apparaître une évidente utilité du théorème de Gauss; il est néanmoins nécessaire de remarquer que ce théorème ne joue un rôle important que si la symétrie de la distribution considérée est très élevée.

#### 2.2.1 La surface de Gauss conventionnelle

Le théorème de Gauss n'est pas spécifique à l'électrostatique, mais est relatif à tous les champs newtoniens, ie. radiaux et inversement proportionnels au carré de la distance, tels que le champ électrostatique  $\vec{E}$  d'une charge ponctuelle,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{u}}{r^2}$$

le champ de gravitation  $\vec{q}$  d'une masse ponctuelle

$$\vec{g} = -Gm \, \frac{\vec{u}}{r^2}$$

ou encore le champ des vitesses  $\vec{v}$  d'une source ponctuelle isotrope de débit massique  $\mu$ 

$$\vec{v} = \frac{\mu}{4\pi\rho} \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Le théorème traduit simplement le fait que le flux du champ  $\vec{u}/r^2$  à travers une surface fermée S (quelconque mais homéomorphe à une sphère) est égal, par définition, à langle solide  $\Omega$  sous lequel on voit la surface S depuis l'origine utilisée O. Si le point O est intérieur à la surface S, cet angle vaut  $4\pi$ , et s'il est extérieur à S, cet angle est nul.

Pour déterminer le champ électrique en un point M par une distribution de charge, on utilise tout d'abord le principe de Curie qui renseigne sur sa direction. Le théorème de Gauss fournit dans certains cas des informations complémentaires sur son module. La surface de Gauss S passant par M est à priori arbitraire, elle n'a aucune existence matérielle ou signification physique. Son choix répond uniquement à des considérations pratiques : le calcul du flux doit être aussi simple que possible en permettant d'éviter le calcul analytique, souvent impossible, d'une intégrale de surface.

Le choix conventionnel est le suivant : on cherche une surface S' telle que le champ lui soit normal en tout point et que son module soit uniforme sur S' : cette surface est nécessairement l'équipotentielle de M. Si S' est fermée, elle convient en tant que surface de Gauss et si son aire est connue, E se factorise dans le calcul du flux. Si S' n'est pas fermée, on essaie de la refermer à l'aide d'éléments de surface S" tels que le champ soit tangent en tout point de S" : le flux correspondant,  $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ", est alors nul.

## 2.2.2 Principales symétries rencontrées

#### Distribution sphérique de charges

Dans ce cas, le champ est radial et ne dépend que de r quelle que soit la fonction  $\rho(r)$ . Le calcul analytique est alors assez simple à l'aide du théorème de Gauss, pour lequel la surface choisie est une sphère de centre O et de rayon r, le champ étant uniforme et normal en tout point de cette surface. On en déduit immédiatement

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}$$

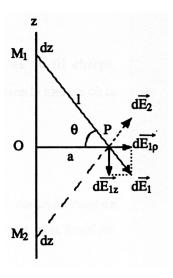
où Q(r) désigne la charge intérieure à la surface de Gauss. En un point extérieur à la distribution de charges, tout se passe comme si la charge totale Q était concentrée en O. Si la distribution devient sphéroïdale, le théorème de Gauss garde sa validité, mais perd sa commodité d'usage, puisqu'on ne peut plus, pour l'extérieur par exemple, "ponctualiser" la charge.

#### Distribution cylindrique de charges

La densité de charge ne dépend ici que de la distance à l'axe D du cylindre. Considérons par exemple un fil rectiligne infini parallèle à la direction donnée par D et chargé uniformément. Les seuls éléments de symétrie conservant tout point M sont le miroir méridien  $m_1$  contenant le fil, et le miroir  $m_2$  perpendiculaire au fil et contenant M. Ces miroirs devant laisser invariant le champ en M, le champ en M est parallèle à leur intersection. On vérifie la rapidité d'utilisation de Curie; si ce principe n'était pas connu, il faudrait considérer deux éléments de fil symétriques par rapport à  $m_2$ , et le résultante des champs élémentaires qu'ils créent...

#### Calcul direct

Il faut partir de la représentation suivante.



Si la densité linéique de charge du fil est  $+\lambda$ , on peut écrire que

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \lambda dz \, \frac{\overrightarrow{M_1P}}{\|\overrightarrow{M_1P}\|^3}$$

puis projeter selon les coordonnées cylindriques

$$dE_{1,\rho} = dE_1 \cos \theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda dz}{r^2 + z^2} \cos \theta$$

$$dE_{1,z} = dE_1 \sin \theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda dz}{r^2 + z^2} \sin \theta$$

Le deuxième élément de fil, situé à la distance  $OM_2$ , fait apparaître un champ élémentaire  $d\vec{E}_2$  de même norme que  $d\vec{E}_1$ , mais dont les composantes vérifient  $dE_{2,\rho} = dE_{1,\rho}$  et  $dE_{2,z} = -dE_{1,z}$ .

En conclusion, on pourra écrire que

$$\vec{E} = 2 \int d\vec{E_{\rho}}$$

Pour intégrer sur  $\theta$ , il faut remarquer que  $\cos\theta=\frac{r^2}{r^2+z^2}$ , et que  $\tan\theta=z/r$  d'où l'on tire l'élément différentiel  $dz=\frac{r}{\cos^2\theta}d\theta$ . L'intégration donne donc

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \int \frac{dz}{r^2 + z^2} \cos\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{r} d\theta$$

d'où l'on tire

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} \vec{e_\rho}$$

Calcul par le théorème de Gauss

Le champ étant en tout point perpendiculaire à D et radial, et sa valeur ne dépendant (par invariance de rotation autour du fil) que de la distance r au fil, la surface de Gauss à utiliser est une portion de cylindre d'axe D : le flux aux bases est nul, seul reste le flux latéral  $2\pi r dz$ , d'où

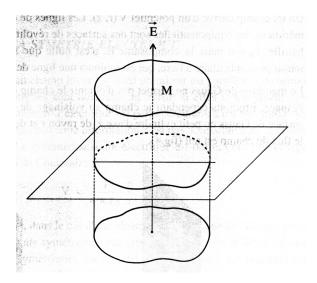
$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \frac{\lambda}{r}$$

#### Distribution plane infinie

Supposons que la distribution est invariante par translation suivant deux directions indépendantes x et y: on obtient un plan infini uniformément chargé. Le champ est invariant par translation; en tout point M, il est perpendiculaire au plan chargé et ne dépend à priori que de la distance au plan. On choisit alors comme surface de Gauss uen portion de cylindre, de section quelconque, ayant pour axe la normale au plan passant par M, et symétrique par rapport au plan. On obtient alors

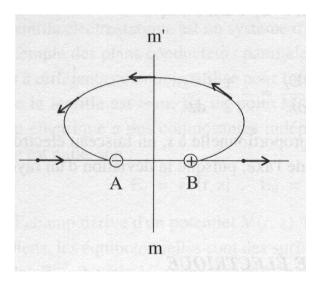
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

où  $\sigma$  est la densité surfacique de charge. Le fait que E ne dépende pas de la distance du point M au plan chargé est une propriétés physique du système et non une conséquence de sa symétrie.



### 2.2.3 Les doublets électriques

Considérons un doublet électrique formé de deux charges opposées (cf. figure suivante).



En tout point de la droite D support de AB, le champ est parallèle à D. En un point quelconque M de l'espace, le champ est parallèle au plan méridien passant par M, mais sa direction exacte n'est pas fixée par la symétrie. Cependant, le plan médiateur du segment [AB] est un antimiroir électrique équipotentiel : en tout point de ce plan, le champ lui est perpendiculaire, comme on le voit sur la figure précédente. L'étude du problème peut en faire se faire sur le premier quadrant, comme le montre la figure suivante.

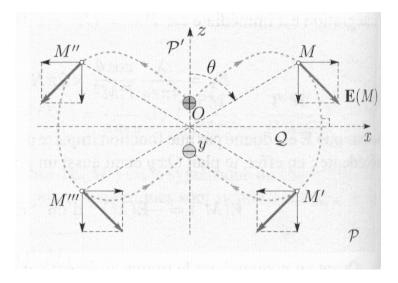
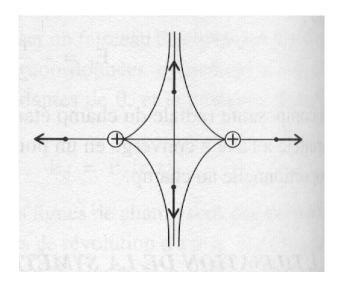
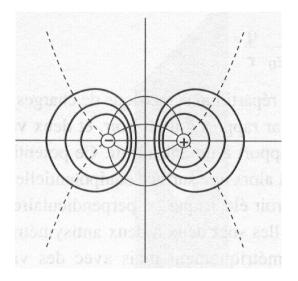


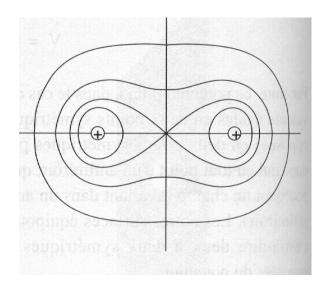
FIG. 2.1 — Ozx est un plan de symétrie :  $\vec{E}$  est contenu dans ce plan. Le plan Oxy est un plan d'antisymétrie :  $\vec{E}$  est orthogonal au plan en chacun de ses points. Enfin Oyz est également plan de symétrie.

Si les deux charges sont identiques, ce plan médiateur est au contraire un miroir et le champ lui est parallèle, comme le montre la figure suivante.



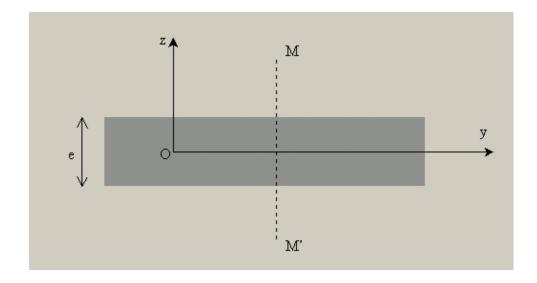
Finalement, l'étude de la symétrie permet de trouver l'allure générale des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans les deux cas précédents.





# 2.3 Exemple : la feuille plane d'épaisseur e chargée uniformément

Soit la configuration suivante.



Pour calculer le champ et le potentiel au voisinage de cette distribution, c'est-à-dire lorsque |z| est très inférieur aux dimensions latérales de la distribution  $\Sigma$ , on suppose ces dernières infinies, ce qui revient à négliger les effets de bord.

#### 2.3.1 Symétrie du problème

Dans cette approximation,  $\Sigma$  est invariante par toute translation parallèle au plan (Oxy). D'autre part, tout plan passant par M et orthogonal à (Oxy) est également plan de symétrie. Le champ est donc parallèle à  $\vec{e_z}$ . Par conséquent

$$V(M) = V(z)$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad} V(z) = \vec{E}(z) = E_z \vec{e_z}$$

Comme le plan (Oxy) est plan de symétrie pour  $\Sigma$ , le champ électrique en tout point appartenant à ce plan doit être contenu dans celui-ci : il est donc nul. Les valeurs de V et de  $\vec{E}$  en deux points M et M' symétriques par rapport à (Oxy) vérifient

$$V(M) = V(M')$$

$$\vec{E_n}(M) = -\vec{E_n}(M')$$

soit

$$V(z) = V(-z)$$

et

$$E_z(z) = -E_z(z)$$

Le gradient est une fonction paire de z alors que le champ en est une fonction impaire. On en déduit ainsi la topographie des lignes de champ et des équipotentielles : ce sont respectivement des droites parallèles à l'axe (Oz) et des plans perpendiculaires à cet axe.

#### 2.3.2 Calcul des champs et potentiels

L'expression locale du théorème de Gauss

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

conduit ici à

$$\frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho_o}{\varepsilon_o}$$

Pour tout point M intérieur à  $\Sigma$ , ie. vérifiant |z| < e/2,

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_o z}{\varepsilon_o} \vec{e_z} + cte$$

où la constante s'annule (le champ est nul en z = 0).

Pour tout point M extérieur à la distribution (|z| > e/2), le champ est constant et déterminé par continuité au passage z = e/2:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_o e}{2\varepsilon_o} \vec{e_z}$$

Par symétrie, on peut en déduire

$$\vec{E}(M') = -\frac{\rho_o e}{2\varepsilon_o} \vec{e_z}$$

pour z < -e/2.

On obtient le potentiel par l'équation locale  $\vec{E} = E_z \vec{e_z} = -\overrightarrow{grad} V = -\frac{dV(z)}{dz} \vec{e_z}$ ,

$$V(z) = -\frac{\rho_o e}{2\varepsilon_o} z + c_1$$

si z > e/2 et

$$V(z) = -\frac{\rho_o e}{2\varepsilon_o} z^2 + c_2$$

si |z| < e/2. Dans une telle modélisation, le potentiel ne peut pas être pris nul à l'infini, rappelons qu'elle n'a de sens que si M reste au voisinage de la distribution. On lèvera l'indétermination liée à la constante en choisissant arbitrairement l'origine des potentiels, par exemple au plan équipotentiel (Oxy), en fixant  $c_2 = 0$ . Par continuité du potentiel, on en déduira  $c_1 = \rho e^2/8\varepsilon_o$ .

Dans le cas où la distance |z| est grande devant e, la distribution est assimilable à une distribution surfacique de densité  $\sigma = \rho_o e$  puisque  $dQ = \rho_o d\tau = \rho_o e dS \equiv \sigma dS$ . Le champ vaut dans ce cas

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} sgn(z) e_z$$

et présente une discontinuité telle que

$$\vec{e_z} \cdot [\vec{E}(z > 0) - \vec{E}(z < 0)] = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

soit

$$n_{1\to 2}\cdot (\vec{E_2}-\vec{E_1})=rac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

Cette discontinuité du champ est caractéristique d'une densité surfacique de charges. En revanche, le potentiel est continu à la traversée de la surface; son expression vaut dans ce cas

$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}|z|$$

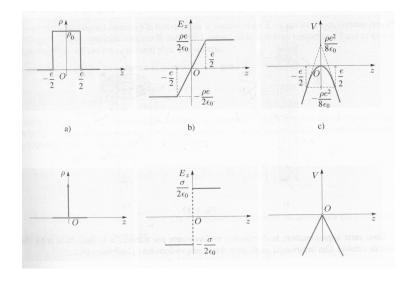
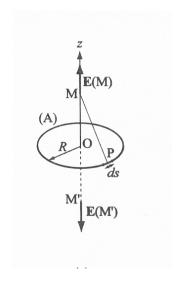


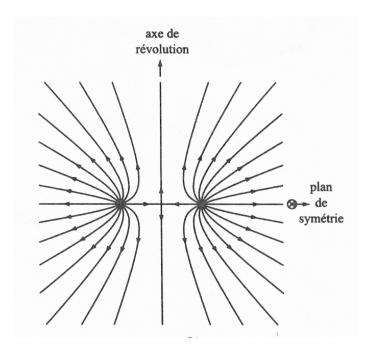
Fig. 2.2 – Représentation de la charge, du champ et du potentiel en fonction de z. En bas, cas où  $|z|\gg e.$ 

# 2.4 Exemple classique : la spire chargée

Calculons le champ électrique en un point de l'axe d'un anneau (C) de rayon R, de centre O, portant une charge q uniformément répartie (distribution linéique  $\lambda$  uniforme).



Le problème présente la symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) et le plan contenant la spire est un plan de symétrie. Par conséquent, les lignes de champ sont contenues dans les plans méridiens.



Le champ prend donc à priori la forme

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e_r} + E_z(r,z)\vec{e_z}$$

et, si l'on considère M sur l'axe de révolution (Oz),

$$\vec{E}(M_{axe}) = E(z)\vec{e_z}$$

En ajoutant les contributions au champ des éléments de longueur dl qui constituent l'anneau, il vient

$$E(z) = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{e_z}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} =$$

c'est-à-dire

$$E(z) = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi \varepsilon_o} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_o (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

On vérifie ainsi que

- E(z) est une fonction impaire, ce qui est attendu puisque le plan de l'anneau est plan de symétrie
- le champ est nul au centre de l'anneau : le champ en ce point appartient en effet à la fois à l'axe de révolution et au plan de l'anneau qui est plan de symétrie
- à grande distance, l'anneau est équivalent à une charge ponctuelle  $2\pi R\lambda$  placée en O puisque lorsque z tend vers l'infini,

$$E(z) \rightarrow \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{z^2}$$

En étudiant la fonction E(z), on constate qu'elle passe par un maximum pour  $z = R/\sqrt{2}$ ; il coïncide avec l'étranglement des lignes de champ au voisinage de l'axe.

## 2.5 Méthode des images électriques

#### 2.5.1 Théorème d'unicité

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert connexe dans lequel l'équation de Poisson  $\Delta V = 0$  est vérifiée. Si l'on peut imposer aux surfaces délimitant  $\mathcal{O}$  (y compris la surface à l'infini) des conditions aux limites qui sont

- V est uniforme et connu sur la surface  $S_i$
- V est uniforme et

$$\oint \oint_{S_i} \frac{\partial V}{\partial n} dS_p = \oint \oint_{S_i} \overrightarrow{grad} V \cdot d\vec{S_p} = -\frac{Q_i}{\varepsilon_o}$$

est connue

alors il existe une seule et unique solution  $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$  dans  $\mathcal{O}$ .

Pratiquement, un ouvert connexe est un ouvert constitué d'un seul morceau. Les conditions de Dirichlet (1) et de Neumann (2) sont équivalentes; le fait que  $\mathcal{O}$  soit un ouvert permet d'exclure de notre étude le calcul de  $\Delta V$  sur les surfaces  $S_i$  où il n'existe pas forcément, car  $\vec{E}$  peut y présenter des discontinuités.

#### 2.5.2 Théorème des images électriques

Soit un ouvert  $\mathcal{O}$  délimité par les surfaces  $S_i$  dans lequel  $\Delta V = 0$ . Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux distributions de charges électriques possédant une symétrie assez particulière pour que les champs électriques  $\vec{E}$  et  $\vec{E}'$  qu'elles engendrent imposent les mêmes conditions aux limites (de Dirichlet ou de Neumann) sur les surfaces  $S_i$ . Alors, en tout point M de  $\mathcal{O}$ ,

$$\vec{E}(M) = \vec{E'}(M)$$

On dit alors que  $\mathcal{D}'$  est l'image électrique de  $\mathcal{D}$ , et inversement.

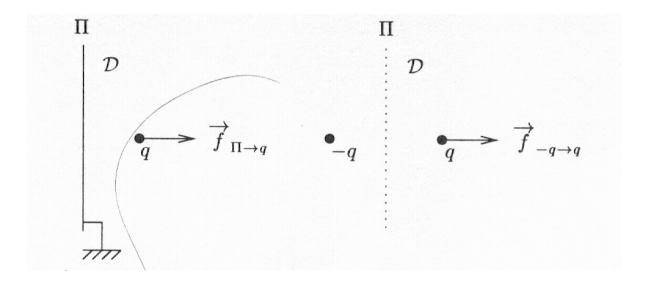
Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux distributions de charge d'extension finie, composées respectivement de  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}'_1$ ,  $\mathcal{D}'_2$ . Si  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}'_1$  d'une part, et  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}'_2$  d'autre part sont images électriques les unes des autres, les forces et moments par rapport à n'importe quel point O de l'espace de  $\mathcal{D}_1$  sur  $\mathcal{D}_2$  et de  $\mathcal{D}'_1$  sur  $\mathcal{D}'_2$  sont égaux.

Dans l'exemple précédent,  $\{-q,q\}$  est l'image électrique de  $\{\pi,q\}$  dans  $\mathcal{D}$ : les actions de  $\pi$  sur q sont les mêmes que celles de -q sur q.

## 2.5.3 Conseils pratiques

#### Détermination de l'image électrique d'une distribution de charge

Quand on doit déterminer l'image électrique d'une distribution contenant une surface sur laquelle le potentiel est imposé (une surface reliée à la terre par exemple), il s'avère souvent utile de rapprocher la forme de la surface avec la solution d'un problème géométrique connu. Par exemple, un plan infini est l'ensemble des points de l'espace équidistants de deux points A et B symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan. De même, on peut caractériser un



cercle ou une sphère par l'ensemble des points du plan ou de l'espace tels que le rapport de leurs distances à deux points A et B soit constant.

#### Densité surfacique de charge d'un conducteur

Pour étudier la répartition surfacique de charge à la surface d'un conducteur  $\mathcal{C}$  soumis à un potentiel uniforme (relié à la masse par exemple), on utilisera avec profit le fait que  $\vec{E} = \vec{0}$  dans la matière d'un conducteur.

Au voisinage d'un point M de la surface d'un conducteur, à l'extérieur de celui-ci, le champ électrique  $\vec{E_+}(M)$  et la densité surfacique de charge sont liés par le théorème de Coulomb

$$\vec{E_+}(M) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_o} \vec{n_{1 \to 2}}$$

où  $\vec{n_{1\to 2}}$  est la normale sortante du conducteur en M. De la connaissance de  $\vec{E_+}(M)$ , obtenue grâce à l'image électrique, on accèdera ainsi facilement à  $\sigma(M)$ .

#### Cas fréquents d'application de la méthode

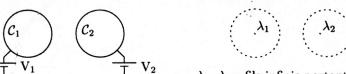
On cherchera à mettre en oeuvre la méthode des images électriques quand le problème à résoudre fera intervenir des conducteurs parfaits dont la charge ou le potentiel sont imposés. Les images électriques les plus classiques sont les suivantes.

- □ Les images électriques les plus classiques sont les suivantes :
- plan infini relié à la Terre et distribution de charge quelconque



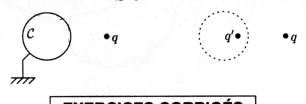
 $\mathcal D$  : distribution de charge quelconque  $-\mathcal D$  : distribution opposée à la symétrique de  $\mathcal D$  par rapport à  $\Pi$ 

• conducteurs cylindriques parallèles



 $\lambda_1, \lambda_2$ : fils infinis portant des densités linéïques de charge  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ 

• sphère relîée à la Terre et charge ponctuelle



# Chapitre 3

# Symétrie des champs magnétiques

# 3.1 Grandeurs magnétiques

Nous avons vu que les grandeurs électriques habituelles sont des grandeurs polaires si l'on adopte la convention suivant laquelle la charge électrique est une grandeur polaire. D'autre part, toutes ces grandeurs sont paires dans le renversement du temps puisqu'elles décrivent des propriétés statiques.

Toutes les grandeurs magnétiques sont impaires dans le renversement du temps; si  $\vec{B}$  est une grandeur axiale, il en est de même du moment magnétique, de la masse magnétique, du potentiel scalaire magnétique.

Le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  existe puisque  $div\vec{B}=0$  et il est défini tel que  $\vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ : cette expression montre que  $\vec{A}$  peut être considéré comme une grandeur axiale impaire dans le renversement du temps. Rappelons que  $\vec{A}$  n'est défini qu'au gradient d'une fonction scalaire  $\phi$ , qui doit donc être un scalaire polaire impair dans le renversement du temps. Par ailleurs, afin de limiter le caractère arbitraire de  $\phi$ , on utilise généralement la jauge de Coulomb définie par  $div\vec{A}=0$ , ce qui implique que  $\phi$  soit une fonction harmonique.  $\vec{A}$  satisfait alors l'équation de Poisson

$$\Delta \vec{A} + \mu_o \vec{j} = \vec{0}$$

et on a pour un courant I

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint \frac{I}{r} \, d\vec{l}$$

et pour un aimant de moment dipolaire  $\vec{\mu}$ 

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \, \vec{\mu} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

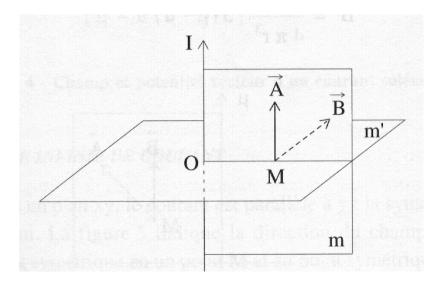
La fonction  $\phi$  n'étant pas définie physiquement, les propriétés de symétrie dépendent à priori du choix de la jauge. Nous chercherons tout d'abord un potentiel-vecteur totalement symétrique, c'est-à-dire invariant dans toutes les opérations de symétrie du système des charges ou courants considéré : c'est le cas du potentiel défini sans ambiguité par les formules précédentes. Si seul un potentiel identiquement nul est obtenu par application du potentiel de Curie, on cherchera alors un potentiel invariant seulement dans certaines opérations de symétrie du système de charges ou courants, et on dira que le potentiel brise la symétrie.

## 3.2 Utilisation du principe de Curie

#### 3.2.1 Courant rectiligne infini

Supposons que le courant soit vertical et dirigé vers le haut. Le plan méridien contenant un point M est un miroir m du système : le champ magnétique  $\vec{B}$  en M est donc perpendiculaire à m, son sens dépendant du sens du courant. D'après ce résultat, les deux faces du plan méridien semblent dissymétrisées, mais il ne faut pas oublier que le champ, vecteur axial, peut se représenter par un cercle orienté, qui est bien situé dans m. En raison de l'invariance par translation parallèlement au courant et par rotation autour du courant, B ne dépend que de la distace r de M au fil.

Un potentiel-vecteur  $\vec{A}$  totalement symétrique est contenu dans m, mais on ne peut pas préciser davantage sa direction. Cependant, le plan horizontal contenant M est un antimiroir m' :  $\vec{A}$  est donc vertical, en accord avec l'expression analytique de  $\vec{A}$  donnée un plus haut. Comme B, A ne dépend que de r.



La direction de  $\vec{B}$  est celle que prend une aiguille aimantée dans l'expérience d'Oersted. Cette direction était inattendue par le savant danois, qui ignorait la différence entre vecteurs polaires et axiaux (c'est le paradoxe de Mach).

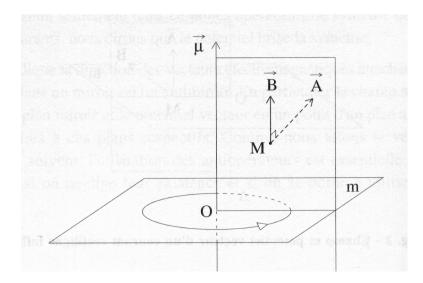
#### 3.2.2 Courant circulaire

Soit la figure suivante.

Dans le plan du courant, le champ magnétique est vertical; le potentiel-vecteur est horizontal. Sur l'axe, le champ est vertical.

## 3.3 Le théorème d'Ampère

S'il joue le même rôle en magnétostatique que le théorème de Gauss en électrostatique, ce théorème est utilisable dans les situations géométriques plus larges.



Rappelons que le champ créé par un élément de courant I de longueur  $d\vec{l}$  est

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Si l'on considère le champ créé par un ensemble d'éléments formant une courbe (un courant électrique), sa circulation le long d'un contour fermé vaut  $4\pi n$  si le contour entoure n fois la courbe :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = n \,\mu_o I$$

Le choix d'un contour d'Ampère passant par M est à priori arbitraire, et n'a encore une fois aucune signification matérielle ou physique. Son choix répond uniquement à des considérations pratiques, de façon à simplifier au mieux le calcul de la circulation en évitant une éventuelle intégration curviligne.

Conventionnellement, on recherche un contour  $\Gamma$  tel que le champ soit tangent à  $\Gamma$  en tout point et que son module soit uniforme le long de  $\Gamma$ :  $\Gamma$  est nécessairement une ligne de champ passant par M. Si  $\Gamma$  est fermée, dans le théorème d'Ampère, B se factorise dans le calcul de la circulation...

En pratique, le théorème d'Ampère n'est utilisable que si la distribution de courant est suffisamment symétrique (linéaire, circulaire, solénoïdale...), par rotation ou translation, car c'est le seul moyen pour que les points de  $\Gamma$  où B est uniforme soient équivalents géométriquement.

#### 3.3.1 Distribution de révolution

Soit une distribution de révolution d'axe D.

Si les lignes de courant sont dans les plans méridiens, les lignes de champ sont des cercle d'axe D et de rayon r, le long desquels B est constant. Si le courant est rectiligne d'intensité I, on obtient immédiatement

$$2\pi r B = \mu_o I$$

Si le conducteur n'est pas filiforme, le théorème d'Ampère montre que le champ à l'extérieur est le même que si I était concentrée le long de D. Si les lignes de courant sont fermées, on a une nappe toroïdale de courant, et le théorème montre que le champ est nul à l'extérieur de cette nappe.

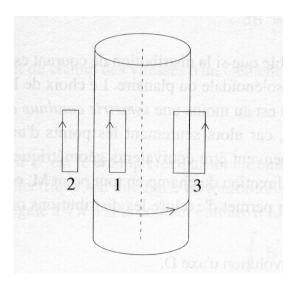
Si les lignes de courant sont des cercles d'axe D, les lignes de champ sont les plans méridiens mais l'orientation n'est pas fixée par la symétrie et le théorème d'Ampère est inexploitable.

#### 3.3.2 Distribution invariante par translation

Si la distribution de courants est invariante par translation le long d'un axe D, on a des nappes cylindriques de courant de sections quelconques.

Si les lignes de courant sont parallèles à D, les plans perpendiculaires à D sont des antimiroirs; l'orientation du champ n'est pas fixée et le théorème d'Ampère n'est pas exploitable.

Si les lignes de courant sont perpendiculaires à D, les nappes de courant sont solénoïdales, les plans perpendiculaires à D sont des miroirs.



L'utilisation des contours (1) et (2) montre que le champ est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde. Admettons qu'il soit nul à l'extérieur. L'utilisation du contour (3) permet de calculer B à l'intérieur, et on trouve immédiatement  $B = \mu_o nI$  si n est le nombre de spires par unité de longueur et I l'intensité du courant dans le solénoïde.

Dans le cas d'une nappe plane infinie de courant, l'utilisation du contour d'Ampère fournit l'expression de B, qui ne dépend pas de la distance du point M à la nappe.

### 3.4 Le théorème de Stokes

Ce théorème d'analyse vectoriel peut être employé en magnétostatique pour le calcul des potentiels vecteurs magnétiques à partir des champs magnétiques dans des conditions géométriques analogues à celles permettant d'exploiter le théorème d'Ampère.

### 3.4.1 Courant rectiligne infini

Dans ce cas,  $\vec{A}$  est parallèle au courant. Le contour d'intégration à choisir est contenu dans le plan méridien m de M, formé de deux segments de lignes de champ de  $\vec{A}$  et de deux segments de droites orthogonaux à  $\vec{A}$ . Si r est la distance du point courant au fil conducteur, A ne dépend que de r en raison des symétries de translation et de révolution :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = A(r) \, l - A(r + dr) \, l = l \, dr \, B$$

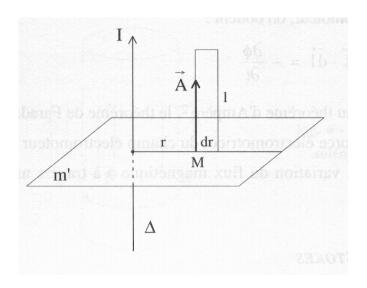
d'où

$$\frac{dA}{dr} = -B = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{l}{r}$$

et enfin

$$A = -\frac{\mu_o I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_o}$$

On remarquera qu'un variation temporelle de l'intensité I induit un champ électromoteur en M,  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ , parallèle au courant. Le champ  $\vec{E}$  est un vecteur pair, qui doit donc être situé à la fois dans m et dans m', donc perpendiculaire au courant... Mais si I dépend du temps, m' n'est plus un élément de symétrie du courant, et il n'y a pas de contradiction avec le principe de symétrie.

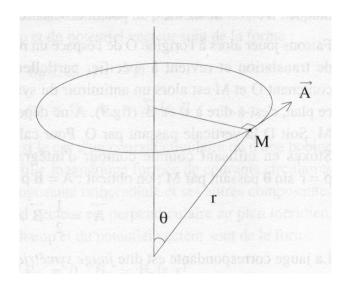


#### 3.4.2 Courant circulaire

Le théorème de Stokes permet de trouver le potentiel vecteur d'un champ circulaire, le contour d'intégration étant le cercle passant par M et ayant le même axe que la spire.

Si  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{r}$  et la direction verticale, on obtient

$$B_r = \frac{\mu_o}{4\pi} \, \frac{2\mu \, \cos \theta}{r^3}$$



si  $\mu$  est le moment de la spire. La circulation de  $\vec{A}$  vaut  $2\pi r \sin \theta$  et est égale au flux de  $\vec{B}$  à travers la calotte sphérique limitée par le cercle, soit

$$\int_0^\theta \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\mu \cos \theta}{r^3} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\mu_o}{2} \frac{\mu \sin \theta}{r}$$

d'où

$$A = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mu \sin \theta}{r^2}$$

Le potentiel vecteur d'un courant solénoïdal en M est perpendiculaire à l'antimiroir méridien passant par M. Par application du théorème de Stokes le long d'un cercle centré sur l'axe du solénoïde et passant par M, si M est à l'extérieur du solénoïde, on obtient

$$2\pi r A = \pi R^2 \,\mu_o n I$$

d'où l'expression de A; on remarque que  $\vec{A}$  est non nul bien que  $\vec{B}$  soit identiquement nul.

Le potentiel vecteur d'une nappe infinie de courant se calcule en appliquant le théorème de Stokes à un contour rectangulaire situé dans le miroir perpendiculaire à la nappe et contenant M. On obtient

$$dA = -B \, dz$$

d'où

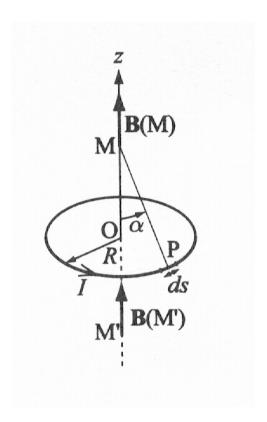
$$A = Bz + cte$$

### 3.5 La spire de courant

## 3.5.1 Champ magnétique

Soit une spire circulaire de rayon R, de centre O et d'axe (Oz); elle est parcourue par un courant d'intensité I.

Ce ciruit possède



- la symétrie de révolution autour de son axe (Oz)
- un plan de symétrie, qui est son plan
- une infinité de plans d'antisymétrie, qui sont les plans méridiens

Les lignes de champ magnétique sont donc contenues dans les plans méridiens et sont perpendiculaires au plan de la spire lorsqu'elles le coupent. On observe que les orientations relatives des lignes de champ et de la spire sont données par la règle du tire-bouchon

- en le tournant dans le sens du courant, on le fait avancer dans le sens des lignes de champ
- en le tournant dans le sens des lignes de champ, on le fait avancer, dans le sens du courant Ces propriétés sont traduites par le produit vectoriel de la loi de Biot et Savart.

$$\vec{B}(M) = B(z)\vec{e_z}$$

La contribution à B(z) d'un élément de courant de longueur dl situé en P est, en introduisant l'angle  $\alpha = (Oz, \overrightarrow{PM})$  et en orientant Oz par rapport à la spire selon la règle du tir-bouchon

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{I \, dl \, \sin \alpha}{\|PM\|^2}$$

L'angle  $\alpha$  et la longueur PM sont les mêmes pour tous les éléments de circuit de la spire :  $PM = R/\sin\alpha$  et  $\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$  On vérifie bien qu B(z) est uen fonction paire de z, le plan de la spire étant plan de symétrie, et  $\vec{B}$  un pseuo-vecteur. On constate que cette fonction est maximale en z=0 et décroît lorsqu'on s'éloigne de la spire. Lorsque z tend vers l'infini,

$$B(z) \to \frac{\mu_o I R^2}{2z^3}$$

Cette décroissance en  $1/z^3$  est plus rapide que celle en  $1/PM^2$  de la loi de Biot et Savart : cela provient de la compensation partielle des contributions des éléments de courant opposés de la spire.

### 3.5.2 Application : l'expérience de Rowland

Un disque isolant, d'épaisseur négligeable, de rayon R, chargé uniformément avec une charge surfacique  $\sigma$ , tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante.

Le courant surfacique peut s'écrire  $\vec{J}_s = \sigma \vec{v} = \sigma \omega \rho \vec{e_{\varphi}}$ . Tout plan contenant l'axe de rotation est plan d'antisymétrie : en un point de cet axe,

$$\vec{B} = B_z(z)\vec{e_z}$$

et

$$\vec{A} = \vec{0}$$

On peut donc utiliser l'expression du champ créé par une spire élémentaire de rayon  $\rho$  et parcourue par un courant  $dI = J_s d\rho$ , d'où

$$dB_z(z) = \frac{\mu_o dI}{2\rho} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_o \sigma \omega z}{2} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

En posant  $u = \cos \alpha$ , il vient

$$B_z = \frac{\mu_o \sigma \omega z}{2} \int_0^{u_o} (1 - \frac{1}{u^2}) du = \frac{[z - \sqrt{a^2 + z^2}]^2}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

On n'observe aucune discontinuité du champ magnétique en O puisque  $\vec{J_s}$  est alors nul.

### 3.5.3 Application : le solénoïde

Un solénoïde est obtenu par l'enroulement sur un cylindre d'axe (Oz) d'un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité I. Il est quivalent à la juxtaposition de spires jointives si l'on néglige le pas de l'hélice que forme le fil conducteur.

Soit n le nombre de spires par unité de longueur et R le rayon du cylindre. On oriente l'axe (Oz) relativement aux spires selon la règle du tire-bouchon.

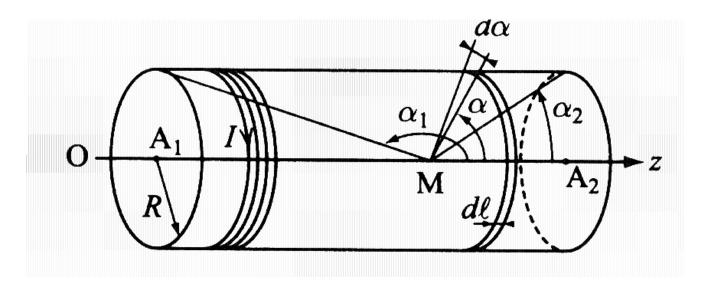
Cette distribution de courant possède la symétrie de révolution et les plans méridiens sont des plans d'antisymétrie. Comme dans le cas d'une spire, les lignes de champ sont donc contenues dans les plans méridiens.

Le champ en un point M de l'axe est de la forme  $\vec{B}(M) = B(z)\vec{e_z}$ . On cherche à déterminer B(z). En fait, on n'utilise pas la variable z pour situer un point M de l'axe, mais les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  qui caractérisent les cônes s'appuyant sur les extrémités du solénoïde. L'angle caractéristique  $\alpha$  est donc astreint à se déplacer entre ces deux valeurs extrêmes. Pour une épaisseur dz de solénoïde,

$$dB_z = \frac{\mu_o(nI\,dz}{2R}\sin^3\alpha$$

Remarquons que  $|dz| = d(R \cot \alpha = \frac{Rd\alpha}{\sin^2 \alpha})$ , il vient alors

$$\vec{B}(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_o nI \sin \alpha d\alpha}{2} \vec{e_z} = \frac{\mu_o nI}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$



Le cas du solénoï de infini  $(R \ll l)$  s'obtient facilement en prenant  $\alpha_2 = 0$  et  $\alpha_1 = \pi$ :

$$\vec{B}_{\infty}(m) = \mu_o n I \, \vec{e_z}$$

Notons que le théorème d'Ampère permettrait de prédire que ce résultat est vrai non seulement sur l'axe du solénoïde, mais en tout point de l'intérieur de celui-ci.

### 3.5.4 Application: les bobines d'Helmholtz

Dans la configuration suivante,

le champ magnétique en M situé sur l'axe peut s'écrire très simplement

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_o I}{2B} (\sin^3 \alpha_1 + \sin^3 \alpha_2) \vec{e_z}$$

avec, géométriquement, les égalités

$$\sin \alpha_1 = \frac{R}{\sqrt{rR^2 + (z + R/2)^2}}$$

et

$$\sin \alpha_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (z - R/2)^2}}$$

Finalement, il vient

$$\vec{B}(M) = \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{5}\frac{z}{R} + \frac{4}{5}\frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{5}\frac{z}{R} + \frac{4}{5}\frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2}} \right] \vec{e_z}$$

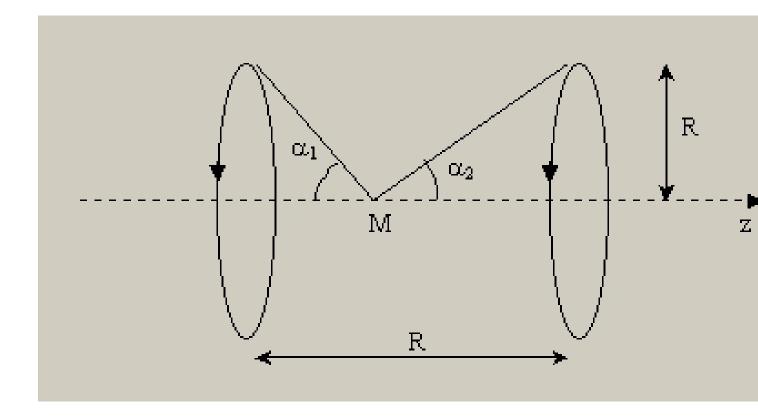
En utilisant les développements limités, dans l'hypothèse où  $z \ll R$ ,

$$(1 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}x^2)^{3/2} \approx 1 + \frac{6}{5}x + \lambda(x^2)$$

on peut se convaincre que la fonction contenue entre les crochets est paire en x = z/R et que les puissances impaires en x sont nulles. Par conséquent,

$$\vec{B}(z) = \vec{B}(0)[1 + \iota(x^3)]$$

est quasiment uniforme!



# 3.6 Exemple : la feuille conductrice plane d'épaisseur e

Considérons dans cet exemple l'analogue magnétique de l'exemple étudié en électrostatique, ie. une feuille conductrice d'épaisseur e parcourue par un courant de densité volumique  $\vec{J}$  uniforme.

### 3.6.1 Analyse de la symétrie

A faible distance devant les dimensions latérales de cette distribution, sous les mêmes hypothèse qu'en électrostatique, nous pouvons dire que la distribution  $\Sigma$  est invariante par translations selon (Ox) et (Oy) :

$$\vec{J} = \begin{cases} J_o \vec{e_z} & \text{si } -\text{z}-\text{ j } \text{ e}/2\\ \vec{0} & \text{si } -\text{z}-\text{ j } \text{ e}/2 \end{cases}$$

Par conséquent, le champ magnétique et le potentiel vecteur de dépendent que de z

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(z)$$

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(z)$$

Le plan  $\mathcal{P}$  passant par M et parallèle à (Oyz) est plan de symétrie : le champ magnétique lui est donc perpendiculaire alors que le potentiel vecteur est contenu dans ce plan :

$$\vec{B}(M) = B_x(z)\vec{e_x}$$

$$A_x(z) = 0$$

En revanche, le plan  $\mathcal{Q}$  passant par M et parallèle à (Oxz) est plan d'antisymétrie pour les sources  $\Sigma : \vec{B}$  est bien contenu dans ce plan alors que  $\vec{A}$  lui est orthogonal

$$\vec{A}(M) = A_y(z)\vec{e_y}$$

Le plan (Oxy) est aussi plan de symétrie pour  $\Sigma$ , ce qui signifie qu'en tout point de ce plan, le champ magnétique, de la forme  $B_x(z)\vec{e_x}$ , doit lui être orthogonal : il est donc nul. Pour deux points  $M_1(x,y,z)$  et  $M_2(x,y,z)$  symétriques par rapport au plan (Oxy), on a les relations

$$\vec{B}_t(M_2) = -\vec{B}_t(M_1)$$
 soit  $B_x(-z) = -B_x(z)$ 

et

$$\vec{A}_t(M_2) = \vec{A}_t(M_1)$$
 soit  $A_y(-z) = A_y(z)$ 

Il suffira donc d'effectuer les calculs dans le demi-espace z>0, les résultats dans l'autre demi-espace s'en déduisant par la caractère impair de  $\vec{B}$  et le caractère pair de  $\vec{A}$ .

# 3.6.2 Expressions des champs $\vec{B}$ et $\vec{A}$

En coordonnées cartésiennes, la forme locale du théorème d'Ampère (relation de Maxwell-Ampère)  $\overrightarrow{rot}(\vec{B}/\mu_o) = \vec{J}$  donne

$$\frac{B_x}{dz} = \mu_o J_z$$

Dans l'espace  $0 \le z \le e/2$ , on a  $B_x = \mu_o J_o z + cte$  où la constante doit s'annuler puisqu'en z = 0 (dans le plan (Oxy)) le champ est nul.

Dans l'espace  $z \ge e/2$ ,  $B_x = cte$ : la constante est déterminé par la continuité de  $\vec{B}$  à la traversée du plan z = e/2. On obtient donc que  $B_x = \mu_o J_o e/2$ .

On obtient ensuite le potentiel-vecteur en utilisant sa relation de définition  $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$  qui, en coordonnées cartésiennes, donne

$$B_x = -\frac{dA_y}{dz}$$

Pour  $0 \leqslant z \leqslant e/2$ , il vient  $A_y = -\mu_o J_o z^2/2 + cte$ .

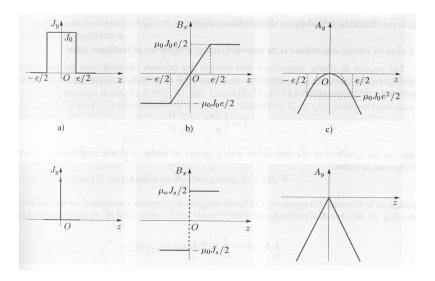
Pour  $z \geqslant e/2$ ,  $A_y = -\mu_o J_o e.z/2 + cte$ .

Dans une telle modélisation de  $\Sigma$ , pour laquelle il y a donc des charges à l'infini, le potentiel-vecteur ne doit pas s'annuler à l'infini : on devra pour fixer les constantes prendre la valeur de référence du potentiel dans le plan z=0. La première constante est nulle, la seconde vaut  $\mu_o J_o a.e/8$ .

On a donc les représentations suivantes.

La deuxième partie de la figure précédente correspond au cas où l'épaisseur de la nappe e de courant est très faible devant la distance |z|. Il est alors commode de définir une densité surfacique  $\vec{J_s} = J_s \vec{e_y}$  telle que le courant qui traverse la surface dS = e.dx selon la normale  $\vec{e_y}$  s'écrive

$$dI = \vec{J} \cdot \vec{e_v} dS = Je\vec{e_v} \cdot (\vec{e_z} \wedge \vec{e_x} dx) = \vec{J_s} \cdot (\vec{e_z} \wedge d\vec{l})$$



avec  $\vec{J_s} = Je\vec{e_y}$  et  $d\vec{l} = dx\vec{e_x}$ .

Cette modélisation de  $\Sigma$  conduit à une discontinuité de  $\vec{B}$  à la traversée d'une surface parcourue par des courants

$$\Delta B = B(z > e/2) - B(z < e/2) = \mu_o Je = \mu_o J_s$$

La discontinuité du champ magnétique s'écrit, sous forme vectorielle,

$$\vec{n_{1\rightarrow 2}} \wedge (\vec{B_2} - \vec{B_1}) = \mu_o \vec{J_s}$$

Les valeurs de  $B_x$  et de  $A_y$  sont alors obtenues en faisant tendre e vers 0 de telle sorte que  $J_oe = J_s = cte$ . Ainsi,

$$B_x = \frac{\mu_o J_s}{2} \, sgn(z)$$

et

$$A_y = -\frac{\mu_o J_s}{2} z \, sgn(z)$$

# 3.7 Quelques phénomènes propres au magnétisme

### 3.7.1 Champ créé par les aimants

Comme cela a été remarqué depuis longtemps, les équation de Maxwell (données en 1864) sont dissymétriques par rapport à l'électricité et au magnétisme

$$\begin{array}{ccc} div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \text{ (M-Gauss)} & \overrightarrow{rot} \, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (M-Faraday} \\ div\vec{B} = 0 & \overrightarrow{rot} \, \vec{B} = \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_o \, \vec{j} \text{ (M-Ampère)} \\ \text{Il existe en effet des charges électriques et le champ électrique satisfait le théorème de Gauss.} \end{array}$$

Il existe en effet des charges électriques et le champ électrique satisfait le théorème de Gauss. Mais il n'existe ni masses magnétiques isolées <sup>1</sup>(si bien que la divergence du champ magnétique est identiquement nulle) ni courants magnétiques. Le magnétisme classique n'est qu'un sousproduit de l'électricité, une simple conséquence du mouvement des charges électriques selon la description des aimants par des courants particulaires développée par Ampère.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>C'est ce que suggère l'expérience de l'aimant brisé : on a toujours deux pôles magnétiques!

En 1931, Dirac a cependant suggéré qu'une particule élémentaire puisse porter une masse magnétique  $g^2$  créant un champ magnétique si elle est au repos et un champ électrique si elle est en mouvement. Si une telle particule n'a pas encore été mise en évidence, son existence est compatible avec les lois connues de la Physique. Son champ magnétique est donné par la loi de Coulomb dans son étude des aimants très allongés, il est radial (en accord avec la symétrie sphérique) et sa forme analytique est analogue à celle du champ électrique d'une charge électrique ponctuelle

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} g \, \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Par suite, les champs d'un dipôle électrique et d'un dipôle magnétique ont les mêmes propriétés géométriques et des expressions analytiques analogues.

Tout plan contenant le monopôle (placé à l'origine) et M étant un antimiroir, il ne peut exister de potentiel vecteur totalement symétrique : on cherchera donc un potentiel-vecteur de symétrie axiale spécialisant une direction  $\vec{k}$  de l'espace. En M,  $\vec{A}$  est perpendiculaire à l'antimiroir contenant  $\vec{r}$  et  $\vec{k}$ ; en appliquant le théorème de Stokes au contour circulaire d'axe  $\vec{k}$  passant par M on obtient

$$2\pi r^2 (1 - \cos \theta) \frac{g}{r^2} = 2\pi r \sin \theta A$$

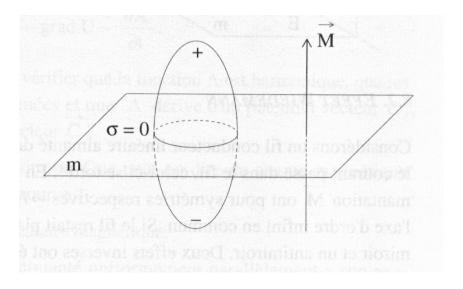
d'où l'expression de A utilisée par Dirac

$$A = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{g}{r} \tan \frac{\theta}{2}$$

A est singulier sur la demi-droite z < 0 (appelée corde de Dirac) : c'est le potentiel d'un aimant infiniment long et de section infinitésimale, dont un pôle est en O et l'autre rejeté à l'infini dans la direction  $-\vec{k}$ .

### 3.7.2 Aimant ellipsoïdal

Considérons un ellipsoïde de révolution aimanté uniformément parallèlement à son axe.



 $<sup>^{2}</sup>g$  est un pseudo-scalaire.

Soit  $\vec{M}$  le vecteur densité d'aimantation. Les densités de masses magnétiques  $\sigma^*$  en surface et  $\rho^*$  en volume sont respectivement données par

$$\sigma^* = \vec{M} \cdot \vec{n}$$

et

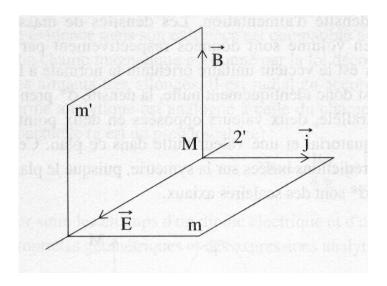
$$\rho^* = -div \, \vec{M}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire orientant la normale à la surface de l'aimant. La densité volumique est donc identiquement nulle;  $\sigma^*$  prend une même valeur sur un cercle parallèle, deux valeurs opposées en deux points symétriques par rapport au plan équatorial et une valeur nulle dans ce plan.

Ces résultats sont tout à fait compatibles avec les prédiction basées sur la symétrie, puisque le plan équatorial est un miroir, et que  $\sigma^*$  et  $\rho^*$  sont des pseudo-scalaires.

#### 3.7.3 Effet Hall

Considérons un conducteur homogène et isotrope. Un champ magnétique  $\vec{B}$  vertical est appliqué perpendiculairement à la densité de courant uniforme  $\vec{j}$  horizontale : en un point M du conducteur existe un champ électrique  $\vec{E}$  créé par l'application de  $\vec{B}$ .



Le plan horizontal passant par M est un miroir  $m:\vec{E}$  est donc horizontal mais sa direction reste à déterminer. Le plan vertical contenant  $\vec{j}$  et passant par M est, en l'absence de dissipation, un antimiroir m',  $\vec{E}$  doit lui être parallèle. En définitive,  $\vec{E}$  est parallèle à l'intersection des plans m et m', c'est-à-dire perpendiculaire à  $\vec{B}$  et  $\vec{j}$ .

#### 3.7.4 Effet Wiedemann

Considérons un fil linéaire aimanté dans le sens de sa longueur. Lorsque le courant passe dans le fil, le fil se tord. La densité de courant  $\vec{j}$  et l'aimantation  $\vec{M}$  ont seulement en commun l'axe d'ordre infini. Si le fil restait plan, son plan devrait être à la fois un miroir et un antimiroir.

Deux effets inverses ont été observés : un courant parcourt le fil - supposé en circuit fermé - s'il est aimanté dans le sens de sa longueur puis tordu; le fil s'aimante dans le sens de sa longueur s'il est parcouru par un courant puis tordu...

#### 3.7.5 Effets gyromagnétiques

Considérons un cylindre d'un matériau diamagnétique suspendu par un fil sans torsion. On l'aimante dans le sens de sa longueur : il tourne sur lui-même, c'est l'effet Einstein - de Haas <sup>3</sup>. Réciproquement, si le cylindre est mis en rotation, l'ensemble des électrons reçoit un moment cinétique et le cylindre s'aimante : c'est l'effet Barnett.

Ces deux effets sont compatibles avec le principe de symétrie, puisqu'un champ magnétique  $\vec{B}$  et un vecteur vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  ont même symétrie. Ils confirment le caractère axial des grandeurs magnétiques : si une aimantation est créée par le mouvement orbital d'une particule chargée (courant particulaire décrit par Ampère), elle est proportionnelle au moment cinétique de cette particule; la charge électrique étant polaire par convention, l'aimantation est bien axiale.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>En pratique, on inverse brutalement le champ dans lequel le cylindre est placé.

# Conclusion

La nature présente de nombreuses formes complexes que la géométrie traditionnelle, euclidienne ou métrique, peut difficilement décrire : côtes marines très dentelées, réseaux hydrographiques, arbres, frontières naturelles, fautes sismiques, reliefs montagneux, nuages et fumées, amas de galaxies, volumes poreux, roches pétrolifères, éponges, poumons, vaisseaux sanguins, réseaux de neurones, parois intestinales, agrégats de colloïdes... Ces formes irrégulières ou fragmentées le restent quelle que soient l'échelle à laquelle on les observe.

La géométrie fractale, développée en 1975 par Bertrand Mandelbrot, est l'outil qui permet de rendre compte de leur propriété fondamentale : l'invariance statistique par dilatation d'échelle ou homothétie interne (une partie agrandie de l'objet est identique à l'objet de départ, aux variation statistiques près), et de définir leur dimension, qui est fractionnaire (supérieure à la dimension topologique) et permet de quantifier leur complexité.

## Synthèse asymétrique des molécules

Comme Pasteur l'a montré par triage des cristaux "à la main" sous microscope, certains systèmes chimiques peuvent être images l'un de l'autre. Ainsi, certaines molécules (tartrates, stérols) sont *chirales* et peuvent exister sous une forme droite comme sous une forme gauche. Contrairement aux molécules diastéréoisomères, deux molécules énantiomères ont des propriétés physiques rigoureusement identiques (solubilité, point de fusion, niveaux d'énergie, propriétés spectroscopiques) si elle sont placées dans un environnement symétrique. Mais elles n'ont pas la même action sur la lumière polarisée plane (environnement chiral), dont elles font tourner le plan de polarisation dans des sens opposés : elles sont optiquement actives, l'une est dextrogyre, l'autre lévogyre. On parle alors d'isomères, d'inverses ou d'antipodes optiques. Un mélange en proportions égales de deux types de molécules énantiomères est une mélange racémique, optiquement inactif.

Deux molécules énantiomères ont également des propriétés chimiques identiques si on ne considère que l'action de réactifs non chiraux. Le cas du 2,3-butane-diol est assez intéressant : les formes droite et gauche aussi bien que leur mélange racémique ont, en solution aqueuse, les mêmes propriétés de cryopréservation des globules rouges que ne possède pas la forme méso, achirale, du même composé. En présence de réactifs chiraux dans les organismes vivants, deux énantiomères se différencient, par exemple par leur odeur et leur activité biologique ou pharmacologique. Contrairement aux composés minéraux, la grande majorité des constituants de la matière vivante sont des composés chiraux, car un seul énantiomère existe dans la nature : acides aminés, sucres naturels, hormones, vitamines... Les configurations en hélice qui s'y rencontrent sont généralement droites. Précurseur de la stéréochimie, Pasteur avait déjà compris que les systèmes

vivants ne fonctionnent pas avec des mélanges racémiques : en 1857, il constata que des moisis-

sures, se développant dans une solution racémique, rendaient cette solution optiquement active en agissant préférentiellement sur les deux types de molécules.

On conçoit aisément que la réactivité chimique de deux molécules dépende de leur chiralité : une poignée de mains n'est possible qu'entre deux mains droites (ou deux mains gauches), ayant des formes complémentaire. En pharmacologie, on utilise des composés achiraux comme l'aspirine, mais certaines molécules chirales ne sont actives que sous l'une des deux formes, l'autre pouvant même avoir des effets antagonistes : seule une forme des antibiotiques est active. Par exemple, une forme de la thalidomide est hypnotique (tranquillisante), l'autre est tératogène. Les deux énantiomères du menthol n'ont pas la même odeur.

Une application industrielle serait de savoir comme synthétiser et favoriser la croissance d'une forme moléculaire aux dépens de la forme énantiomorphe. La difficulté du problème est une bonne illustration du principe de Curie. Les méthodes de synthèse habituelle ne font intervenir que des agents physiques ou chimiques symétriques et fournissent de mélanges racémiques. Rappelons en effet que les forces électromagnétiques ne distinguent pas leur droite de leur gauche (je dois moi-même être une force électromagnétique, alors) : il faut donc une perturbation physique extérieure qui opère cette distinction (tri manuel après cristallisation, chromatographie ou action d'un champ extérieu), ou un agent chimique (solvant, catalyseur) ou biologique (enzyme, bactérie) chiral.

#### Synthèse sous champ magnétique

Pasteur testa, mais sans succès, l'application d'un champ magnétique. Mais, comme le démontra Curie, un tel champ possède un plan de symétrie (qui lui est perpendiculaire) et ne permet donc pas de séparer les formes droite et gauche d'une molécule. Curie suggéra à son tour l'application d'un champ électrique et d'un champ magnétique colinéaires; cependant, il négligeait le renversement du temps : l'ensemble de ces deux champs possède une infinité d'antimiroirs les contenant et, comme dans le cas précédent, la synthèse fournit un mélange racémique. En effet, un scalaire axial pair comme la chiralité se transforme de la même manière dans un miroir et dans un antimiroir.

Le résultat précédent concerne un état d'équilibre thermodynamique, après achèvement de la réaction. La présence des deux champs peut cependant agir sur les cinétiques des réactions menant aux molécules droite et gauche respectivement.

### Synthèse dans un fluide tournant

Finalement, Pasteur suggéra de placer un mélange racémique de molécules droites et gauches dans un fluide en rotation autour d'un axe horizontal, l'application d'un champ électrique empêchant les cristaux de tourner avec le fluide. L'expérience, reprise récemment, a été simulée avec succès par Martinet en 1977. De petites hélices métalliques lestées par une quille sont en suspension dans un fluide en rotation autour d'un axe horizontal. Le couple de pesanteur agissant sur chaque hélice l'empêche de tourner avec le fluide. Une hélice droite subit une force de frottement qui possède une composante horizontale vecf dirigée, par exemple, vers la droite : l'hélice gauche qui en est la symétrique par rapport à un miroir vertical perpendiculaire à l'axe de rotation subit alors une force de frottement dont la composante horizontale est dirigée vers la gauche. Par suite les hélices droites et gauches se séparent.

Une réaction prochirale a été obtenue récemment dans un tourbillon : le mélange réactionnel

est placé dans un tube à essais tournant autour d'un axe perpendiculaire à ce tube; si l'axe de rotation est vertical, donc parallèle au champ gravitationnel terrestre, on obtient un mélange racémique mais si l'axe est horizontal, une des deux formes énantiomorphes l'emporte.

#### Synthèse sous lumière polarisée

Van't Hoff, après Pasteur et Le Bel, suggéra en 1894 la possibilité d'une synthèse asymétrique sous lumière polarisée circulairement, donc chirale, mais l'effet resta longtemps inobservé. Dans l'effet Cotton (ou dichroïsme circulaire, découvert en 1895), des molécules droites et gauches n'absorbent pas de la même manière une lumière polarisée circulairement; en 1929, Kuhn réussit à détruire préférentiellement un énantiomère par une telle absorption d'énergie ultraviolette et à faire apparaître une activité optique dans un racémique. Des hélicènes optiquement actifs ont été synthétisés sous l'action de lumière polarisée. Des composés chiraux ont été obtenus dans le champ gravitationnel chiral d'un vortex confiné.

### Méthode du catalyseur chiral

Il est possible d'opérer la sélection entre deux énantiomères produits par une réaction chimique stéréosélective (Brown, 1964), en utilisant une molécule biologique chirale qui va en quelque sorte transférer son asymétrie au produit de synthèse (on suppose bien entendu que les produits chimiques de départ sont minéraux, donc non chiraux). Les organismes vivants eux-mêmes effectuent des synthèses asymétriques à partir de produits minéraux, les auxiliaires chiraux qu'ils utilisent sont des enzymes.

### Piézoélectricité

Pressenti par Coulomb, Haüy et Becquerel, le phénomène a été prévu et découvert par les frères Curie en 1880. Un cristal est dit piézoélectrique si l'application d'une contrainte fait apparaître un moment électrique. Considérons un cristal centrosymétrique, donc non polaire. S'il est soumis à un champ de contraintes, représenté par un ellipsoïde centrosymétrique, il conserve son centre de symétrie : aucun moment électrique ne peut apparaître. Un cristal centrosymétrique n'est donc pas piézoélectrique. Un cristal non centrosymétrique n'est piézoélectrique que s'il est polaire ou si, sous l'effet d'un champ de contraintes, il le devient.

Les cristaux ferroélectriques sont piézoélectriques : en effet, une pression hydrostatique appliquée à ces cristaux modifie la polarisation spontanée.

### Le théorème de Noether

Les grandes lois de conservation de la mécanique - quantité de mouvement, moment cinétique, énergie - ont été découverts par Newton et ses successeurs immédiats (Bernoulli, Euler...) mais, curieusement, leur interprétation en termes de symétries géométrique et temporelle n'a été donnée que très tardivement, par Jacobi (1842), Schütz (1897) et Hamel (1904à) en mécanique classique, et par Hergoltz (1911) en mécanique relativiste.

La relation entre lois de conservation et symétrie continue a été généralisée par la mathématicienne allemande Emmy NOETHER en 1918. Selon le théorème qui porte son nom, si un système est invariant dans un groupe continu de transformations à n paramètres, on peut trouver n constantes du mouvement (c'est-à-dire n intégrales premières des équations d'évolution). Réciproquement, toute loi de conservation est la conséquence d'une invariance dans un groupe continu de transformations (ayant ou non un caractère géométrique : il existe des symétries dynamiques (vecteur de Runge-Lenz-Laplace en mécanque) non triviales géométriquement).

Ce résultat est général : il s'applique aux systèmes classiques ou quantiques, relativistes ou non. En mécanique,

- si le groupe de symétrie est le groupe des translations, continu à 3 paramètres, on peut trouver 3 constantes du mouvement, ce sont les 3 composantes de la quantité de mouvement
- si le groupe de symétrie est celui des rotations continues à 3 paramètres, on peut trouver 3 constantes du mouvement : ce sont les 3 composantes du moment cinétique
- si le groupe de symétrie est celui des translations dans le temps, continu à un paramètre,
   on peut trouver une constante du mouvement : c'est l'énergie
- si le groupe est le groupe de Galilée d'invariance de la mécanique newtonienne à 7 paramètres (regroupant les invariances précédentes) on peut trouver 7 constantes du mouvement

En mécanique classique (resp. relativiste), on doit envisager l'invariance dans le groupe de Galilée (resp. groupe de Lorentz inhomogène ou groupe de Poincaré) à 10 paramètres, et on peut trouver 10 constantes du mouvement : l'énergie, les composantes de la quantité de mouvement et du moment cinétique, et les composantes du boost (vitesse du centre de masse du système). En électromagnétisme, on doit envisager l'invariance dans le groupe des transformations de jauge à 1 paramètre, l'invariant correspondant est la charge électrique.

A une propriété de symétrie discrète, on ne peut associer aucune constante du mouvement en mécanique classique. C'est le cas de l'invariance par parité et de l'invariance par renversement du temps. En mécanique quantique, au contraire, la symétrie précédente a des conséquences sur la dégénérescence des fonctions d'onde (théorème de Kramers). De même, en cas d'invariance dans une opération géométrique binaire, par exemple par parité, les fonctions d'onde d'un système ou d'une particule sont soit paire, soit impaires : la parité de la fonction d'onde se conserve au cours du temps, aucune propriété analogue n'existe en mécanique classique. Plus généralement, une symétrie discrète implique en mécanique quantique la conservation d'une propriété de transformation de la fonction d'onde dans une représentation irréductible du groupe de symétrie.

Considérons également un milieu cristallin triplement périodique : la quantité de mouvement d'une particule ne s'y conserve pas. Par contre, le moment cristallin

est conservé à un vecteur du réseau réciproque  $\vec{K}$  près. Si, dans un processus de collision, ce vecteur  $\vec{K}$  n'est pas nul, on parle de processus umklapp: c'est le cas de la diffraction de Bragg, ainsi interprétée en termes classiques par Duane et Landé.

## Symétries discrètes C,P,T

On a longtemps cru que les lois physiques étaient invariantes également dans les trois opérations suivantes : la parité P, ou symétrie par rapport à un point ou un miroir ; la conjugaison de charge C, ou remplacement des particules par les antiparticules correspondantes ; le renversement du temps T. Ces conceptions ont dû être abandonnées, et en particulier certaibs phénomènes nucléaires et atomiques sont achiraux.

#### La parité

Etant donné un système isolé existant dans la nature, objet ou phénomène, l'existence du système symétrique est compatible avec les lois de la Nature : elle peut ne pas avoir lieu, mais rien ne s'y oppose à priori.

Cependant, le système symétrique est défini sans ambiguité en ce qui concerne sa géométrie, mais non en ce qui concerne ses caractéristiques physiques. Le principe de parité est satisfait si on admet que la masse et la charge électrique sont invariantes dans toute isomérie.

Une convention doit être introduite pour distinguer la droite et la gauche, qui jouent des rôles équivalents à l'échelle macroscopique : la droite et la gauche se montrent, mais elles ne peuvent se définir physiquement, par référence à un phénomène physique. L'image de toute expérience réelle macroscopique est physiquement réalisable. Des deux expériences, objet et image, on tire les mêmes lois de la nature, si bien qu'on ne peut savoir de quel côté du miroir on se trouve.

Analysant la désintégration des kaons et confrontés à une véritable énigme (le " $\tau$  -  $\theta$  puzzle"), Lee et Yang furent amenés à émettre l'hypothèse révolutionnaire selon laquelle la conservation de la parité n'est pas respectée pour tous les phénomènes physiques.

Selon l'expérience de Mme WU, réalisée en 1957, des noyaux de cobalt 60 radioactifs sont placés dans un champ magnétique vertical. A basse température, le moment magnétique de chaque atome s'oriente parallèlement à ce champ : le plan équatorial, perpendiculaire au champ, est un plan de symétrie puisque le moment magnétique est un vecteur axial. Lors de leur désintégration

$$Co^{60} \to Ni^{60} + e^- + \nu + \overline{\nu}$$

les noyaux de cobalt émettent des électrons, et on s'attend à ce que la distribution angulaire de cette émission soit symétrique par rapport au plan horizontal. Or, on constate que l'émission est plus forte dans la direction opposée au champ. Si  $\theta$  est l'angle entre la direction d'observation et celle du champ, on a la loi de probabilité

$$p(\theta) = 1 - \frac{1}{3}\cos\theta$$

On constate également que les électrons d'hélicité gauche sont beaucoup plus nombreux que les électrons d'hélicité droite. Le principe de Curie semble donc contredit par l'expérience...

L'interaction nucléaire faible est responsable des désintégration radioactives  $\beta$  observées : contrairement aux trois autres interactions fondamentales, elle n'est pas invariante dans une opération miroir : on dit qu'elle ne conserve pas la parité. Cette interprétation sauve le principe de Curie, dont on admet aujourd'hui la validité sans restriction.

L'expérience de Wu est caractérisée par un vecteur polaire  $\delta$  qui indique la direction d'émission privilégiée des électrons (ou leur quantité de mouvement moyenne), et par un vecteur axial, le moment magnétique  $\vec{\mu}$  du noyau radioactif. Le produit scalaire de ces deux vecteurs est un scalaire axial s\* qui est toujours négatif. Considérons l'image de cette expérience dans un miroir : elle est caractérisée par le scalaire axial -s\* positif. L'expérience image n'est donc pas réalisable physiquement, car dans cette expérience, l'émission se ferait préférentiellement dans le sens du champ magnétique.

L'hélicité d'une particule élémentaire est le produit scalaire de sa quantité de mouvement par son moment cinétique de spin. La non-conservation de la parité par les interactions faibles est à rapprocher de la découverte faite par Goldhaber en 1958 : tous les neutrinos présents dans la nature ont une hélivité négative, tous les antineutrinos ont une hélicité positive.

#### La conjugaison de charge

Les lois de la physique classique sont symétriques par rapport au signe des charges électriques, comme le montre la loi de Coulomb par exemple. Si un système existe dans la nature, le système obtenu en chageant le signe de toutes les charges peut exister lui aussi.

En 1928, Dirac combine les théories relativiste et quantique pour obtenir une équation relativiste de l'électron généralisant celle de Schrödinger. Afin d'interpréter l'existence de solutions d'énergie négative, il introduit la notion d'antimatière et de conjugaison de charge C. Cette opération non géométrique conserve masse et spin, mais inverse la charge.

Dirac pensait que toutes les lois de la nature étaient invariantes dans l'opération C, c'est-à-dire que toutes les interactions entre particules élémentaires étaient indifférentes à la distinction entre matière et antimatière. Mais, d'après sa définition même, l'opération C doit conserver les propriétés cinématiques : on constate cependant expérimentalement que le neutrino a une hélicité négative alors que l'antineutrino a une hélicité positive : on doit donc admettre que la symétrie C est, comme la symétrie P, violée par les interactions faibles.

En réalité, seule la symétrie composée CP est respectée par les interactions faibles, comme le suggérèrent Okun et Landau en 1957. En pratique, admettant cette conservation, on peut obtenir les propriétés de l'antimatière connaissant celles de la matière. Mais on se heurte cependant à une difficulté, soulevée par Sakharov en 1967 : l'Univers contient beaucoup plus de matière que d'antimatière. Or, on est amenés à supposer qu'il était symétrique dans son état initial. Si c'était vrai, il devrait l'être encore aujourd'hui, puisqu'à tout processus serait associées particule et antiparticule.

En fait, la symétrie CP n'est pas respectée par la désintégration des kaons

$$K \to \Pi^- + e^+ + \nu_e$$

mais le kaon est également sa propre antiparticule

$$K \to \Pi^+ + e^- + \overline{\nu_e}$$

désintégration à priori tout aussi probable, mais moins fréquente que la précédente : selon Christenson, Cronin, Fitch et Turlay en 1964, la symétrie CP est partiellement violée par cette

désintégration. Bien que cette observation soit unique, on pense que la violation de la symétrie CP a un caractère universel et qu'elle pourrait expliquer une éventuelle instabilité du proton et l'asymétrie actuelle de l'Univers. La violation de CP est néanmoins beaucoup moins nette que celle de P ou de C (qui est maximale si on regarde les neutrinos) car les deux désintégrations du kaon neutre ont *presque* la même probabilité.

### Le renversement du temps

A l'échelle macroscopique, l'invariance par renversement du temps est toujours violée : tous les phénomènes sont fondamentalement irréversibles et définissent donc une direction du temps