

**Sébastien Bourdreux**  
Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

# Optique géométrique

Octobre 2002

# Table des matières

# Chapitre 1

## Principe de Fermat

### 1.1 Chemin optique stationnaire

Entre deux points distants de  $ds$ , sur une courbe quelconque  $C$ , le chemin optique élémentaire est défini par

$$dL = n ds \quad (1.1)$$

où  $n$  est l'indice du milieu au point considéré.

Soient A et B deux points atteints par la lumière et, entre eux, une trajectoire  $C$  qui n'est pas à priori suivie par la lumière. La trajectoire  $C'$  est obtenue après un déplacement  $\delta\vec{M}$  en chaque point M de  $C$ , tel que

$$\delta\vec{A} = \delta\vec{B} = \vec{0}$$

On dit que le chemin optique  $L$  calculé le long de  $C$  est *stationnaire* si la quantité élémentaire

$$\delta L = L' - L \quad (1.2)$$

est infiniment petite devant la valeur supérieure de  $\|\delta\vec{M}\|$ .

### 1.2 Enoncé

*Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet suivi par la lumière est stationnaire.*

L'énoncé historique n'employait pas le terme "stationnaire" mais "minimal" : en fait, l'énoncé actuel prend en compte l'existence de singularités telles que, par réflexion sur un miroir,

- si A et B sont les foyers d'un ellipsoïde, le chemin optique le long du trajet de la lumière est correspond à une zone stationnaire ( $L = cte$  sur l'ellipsoïde)
- si le miroir a une concavité plus prononcée, le chemin est maximal
- si la concavité est moins prononcée, le chemin est minimal

On dit que cet énoncé est la forme variationnelle du principe. Une telle forme est utilisée dans le formalisme lagrangien de la mécanique, et traduit en fait le PFD.

Le fondement du principe de Fermat est, dans un milieu isotrope, l'orthogonalité des rayons lumineux aux surfaces d'onde : en effet, si A et B sont deux points de deux surfaces d'onde, le chemin optique est minimal si le rayon est orthogonal aux surfaces d'onde.

## 1.3 Conséquences

### 1.3.1 Propagation rectiligne dans un milieu homogène

Un milieu homogène se caractérise par un indice uniforme. Le chemin optique s'écrit donc

$$L = n \widehat{AB} \quad (1.3)$$

et il en résulte que  $L$  est minimal si la courbe  $\widehat{AB}$  s'identifie à la droite AB.

### 1.3.2 Retour inverse de la lumière

Dans un milieu non homogène, on considère un rayon lumineux curviligne passant par A et B. Ainsi,

$$L(AB) = \int_{AB} n ds = \int_{BA} n (-ds) = \int_{BA} n ds' \quad (1.4)$$

Par conséquent,

$$L(AB) = L(BA) \quad (1.5)$$

Comme  $L(AB)$  est stationnaire,  $L(BA)$  l'est également, et le trajet suivi par la lumière ne dépend pas du sens de parcours.

## 1.4 Lois de Snell-Descartes

Ces lois, datant du XVIIème siècle, concernent le changement de direction d'un rayon lumineux rectiligne à la traversée d'une surface ou *dioptre* séparant deux milieux homogènes.

### 1.4.1 Expression vectorielle

Si  $\vec{u}$  est le vecteur directeur du rayon orienté AB,

$$L(AB) = n \vec{u} \cdot \vec{AB} \quad (1.6)$$

La variation élémentaire du trajet optique s'écrit

$$\begin{aligned} dL(AB) &= n d(\vec{u} \cdot \vec{AB}) \\ &= n \vec{AB} \cdot d\vec{u} + n \vec{u} \cdot d\vec{AB} = 0 + n \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Considérons la figure suivante :

Entre les points  $A_1$  et  $A_2$ , on écrit

$$L(A_1A_2) = n_1 A_1I + n_2 IA_2 \quad (1.9)$$

Déformons la trajectoire suivant  $A_1I'A_2$ . La variation de chemin optique vaut

$$\delta L = n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{II'} - n_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{II'} \quad (1.10)$$

et le principe de Fermat, imposant  $\delta L = 0$  au premier ordre sur  $\|\vec{II'}\|$ , permet d'écrire

$$n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = \alpha \vec{N} \quad (1.11)$$

si  $\vec{N}$  est le vecteur unitaire normal au dioptre.

Dans un milieu inhomogène, on peut considérer une ligne équi-indice comme un dioptre ; dans ce cas, entre deux points de part et d'autre de ce dioptre,

$$d(n \vec{u}) = \alpha \vec{N} = \alpha' \overrightarrow{\text{grad}}(n) \quad (1.12)$$

c'est-à-dire en projetant sur  $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ ,

$$dn = \alpha' \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \alpha' \frac{dn}{ds} \quad (1.13)$$

d'où l'on extrait l'expression de  $\alpha' = ds$ . Ainsi,

$$\frac{d(n \vec{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \quad (1.14)$$

Cette équation peut-être considérée comme la loi fondamentale de l'optique géométrique.

### 1.4.2 Les lois de la réfraction

La loi de Snell-Descartes permet d'extraire le vecteur  $\vec{u}_2$ . Ce dernier est une combinaison linéaire de  $\vec{u}_1$  et  $\vec{N}$  et est ainsi contenu dans le plan incident.

Multiplions vectoriellement la relation par le vecteur normal  $\vec{N}$ . On obtient la célèbre relation

$$n_2(\vec{N} \times \vec{u}_2) = n_1(\vec{N} \times \vec{u}_1) \quad (1.15)$$

c'est-à-dire

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (1.16)$$

### 1.4.3 les lois de la réflexion

Ici, le milieu (2) est identique au milieu (1), ce qui signifie que de même le rayon réfléchi est contenu dans le plan incident, et qu'en outre,

$$-\sin i_2 = \sin i_1 \quad (1.17)$$

ce qui signifie, puisque les angles sont inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ , que

$$i_2 = -i_1 \quad (1.18)$$

### 1.4.4 Angle de réfraction limite

Comme  $-1 \leq \sin i_1 \leq +1$ , la loi de réfraction donne

$$-1 \leq \frac{n_2 \sin i_1}{n_1} \leq +1 \quad (1.19)$$

soit encore

$$-\frac{n_1}{n_2} \leq \sin i_2 \leq \frac{n_1}{n_2} \quad (1.20)$$

On en déduit l'existence d'un angle limite de réfraction,  $\theta_l$ , tel que

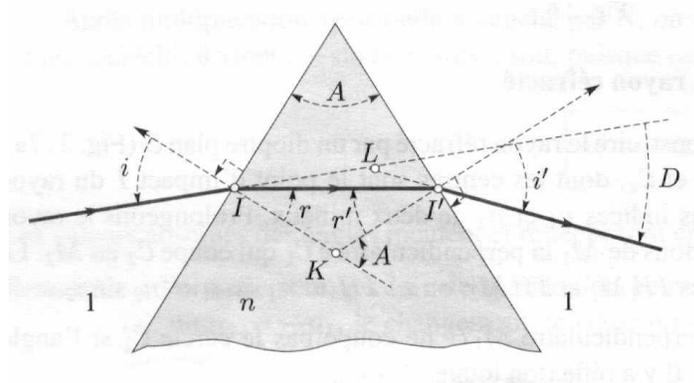
$$\sin \theta_l = \frac{n_1}{n_2} \quad (1.21)$$

et on distingue deux cas :

- le rayon se dirige vers un milieu plus réfringent :  $n_2 > n_1$ . Le rayon est toujours réfracté, jusqu'à l'angle de réfraction limite pour une incidence rasante.
- le rayon se dirige vers un milieu moins réfringent :  $n_1 > n_2$ . Le rayon n'est réfracté que si l'incidence est inférieure à l'angle limite, réfléchi au-delà.

### 1.4.5 Application : le prisme

Il s'agit d'un milieu réfringent, transparent, homogène et isotrope, limité par deux dioptries plans formant un dièdre d'arête  $A$ .



Lorsque les rayons incidents sont contenus dans la section principale (perpendiculaire à l'arête), et que le prisme d'indice  $n$  est placé dans l'air, on obtient les formules suivantes :

$$A = r + r' \quad (1.22)$$

$$D = (i - r) + (i' - r') = i + i' - A \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

et bien sûr les relations de Snell-Descartes

$$\sin i = n \sin r \quad (1.25)$$

$$n \sin r' = \sin i' \quad (1.26)$$

## 1.5 Théorème de Malus

## Chapitre 2

# Formation d'images en optique géométrique

Les instruments d'optique fournissent des représentations appelées *images* d'ensembles de points lumineux appelés *objets*.

Lorsque les rayons issus d'un point objet  $A_o$  émergent de l'instrument en convergent vers un point  $A_i$ , on dit que  $A_i$  est l'*image conjuguée* de  $A_o$ , ou que l'instrument est *stigmatique* pour le couple de points  $A_o, A_i$ .

### 2.1 Stigmatisme rigoureux

#### 2.1.1 Définition

Soit un système optique  $S$  qui fait converger au point  $A_i$  les rayons lumineux issus d'un point source  $A_o$ . De tels points objets ou images sont dits *réels* car ils sont définis par l'intersection de rayons lumineux. Comme le chemin optique entre les points  $A_o$  et  $A_i$  est stationnaire d'après le principe de Fermat, indépendamment du rayon considéré, on peut écrire

$$L(A_o A_i) = Cte \quad (2.1)$$

soit

$$n_o A_o I + L(IJ) + n_i J A_i = Cte \quad (2.2)$$

Si les rayons émergents ne convergent pas vers  $A_i$  mais divergent, un observateur en sortie de  $S$  ne sera sensible qu'à la direction des rayons qu'il reçoit ; les rayons émergents semblent provenir d'un point  $A_i$  à l'*intérieur* du système dans le prolongement de la direction incidente. Cette image est alors dite *virtuelle*, et ne peut pas être reçue sur un écran, contrairement

aux images réelles.

$$L(A_oQ) = n_o A_oI + L(IJ) + n_i JQ = Cte \quad (2.3)$$

Considérons la surface d'onde émergente  $\Sigma_i$  : le chemin optique a même valeur quel que soit le rayon entre  $A_o$  et cette surface émergente. Par conséquent,

$$L(A_oA_i) = n_i A_iQ + n_o A_oQ + L(IJ) - n_i JA_i = Cte \quad (2.4)$$

En orientant positivement les trajectoires dans le sens de propagation de la lumière, l'algébrisation permet d'englober tous les cas :

$$L(\overline{A_oA_i}) = n_o \overline{A_oI} + L(\overline{IJ}) + n_i \overline{JA_i} \quad (2.5)$$

En effet, si l'image est virtuelle,  $\overline{JA_i} = -JA_i$ .

## 2.1.2 Exemples

### Instruments à surface réfléchissante

Dans un milieu homogène, l'équation du stigmatisme devient

$$L(\overline{A_oA_i}) = n(\overline{A_oI} + \overline{IA_i}) = Cte \quad (2.6)$$

et le stigmatisme est défini par l'équation  $\overline{A_o} + \overline{A_i} = Cte$ . Ces surfaces stigmatiques sont des coniques :

- si  $A_o$  et  $A_i$  sont de même nature, c'est une ellipsoïde de révolution de foyers  $A_o$  et  $A_i$ . On utilise ce principe dans les lampes de forte puissance lumineuse.
- si  $A_o$  et  $A_i$  sont de nature différente, l'ensemble des points I est un hyperboloïde de révolution de foyers  $A_o$  et  $A_i$ . Si la constante est nulle, on se retrouve avec un miroir plan, qui est un objet stigmatique pour tous les points de l'espace.
- si l'un des points est situé à l'infini ( $A_o$  par exemple), le chemin optique est infini et pour déterminer la surface stigmatique, on prend un point Q situé sur une surface d'onde plane incidente quelconque. Alors

$$L(QA_i) = n(\overline{QI} + \overline{IA_i}) = Cte \quad (2.7)$$

c'est-à-dire

$$(\overline{QI} - Cte) + \overline{IA_i} = \overline{Q_oI} + \overline{IA_i} \quad (2.8)$$

$$= -Q_oI + IA_i \quad (2.9)$$

Les points de la surface cherchée sont donc à égale distance d'un point  $A_i$  et du plan  $\Sigma_o$ , c'est un paraboloïde de révolution de foyer  $A_i$ . Un tel instrument est souvent utilisé en astronomie comme miroir principal de l'objectif des télescopes, en énergétique pour concentrer les rayons solaires dans les centrales solaires, et pour augmenter la portée des projecteurs de lumière.

## Instruments à surface réfractante

Le chemin optique s'écrit

$$L(\overline{A_oA_i}) = n_o A_oI + n_i A_i = Cte \quad (2.10)$$

Ces surfaces réfractantes sont appelées ovoïdes de Descartes, mais seule la surface pour laquelle la constante est nulle présente un intérêt (c'est une sphère).  $A_o$  et  $A_i$  sont alors de nature différente,

## 2.2 Stigmatisme approché

### 2.2.1 Conservation du stigmatisme approché

La construction de surfaces permettant le stigmatisme rigoureux est souvent difficile. Mis à part pour le miroir plan, qui plus est, ce stigmatisme concerne un seul couple de points, ce qui limite leur intérêt dans la formation des images d'objets étendus, et on ne peut éviter la diffraction qui élargit irrémédiablement l'image d'un point. On se limitera ici aux systèmes optiques centrés, ceux qui présentent un axe de symétrie de révolution. Prenons les points  $M_o$  et  $M_i$  respectivement voisins de  $A_o$  et  $A_i$ , qui forment aussi un couple de points conjugués. On a

$$L(\overline{M_oM_i}) - L(\overline{A_oA_i}) = Cte \quad (2.11)$$

Développons :

$$L(\overline{M_oM_i}) - L(\overline{A_oA_i}) = n_o \vec{u}_o \cdot (\overrightarrow{\Delta I} - \overrightarrow{\Delta A_o}) + n_i \vec{u}_i \cdot (\overrightarrow{\Delta A_i} - \overrightarrow{\Delta J}) \quad (2.12)$$

$$= -n_o \vec{u}_o \cdot \overrightarrow{A_oM_o} + (n_o \vec{u}_o - n_i \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{\Delta I} + \dots + n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_iM_i} \quad (2.13)$$

si l'on désigne par  $n_1$  l'indice du premier milieu rencontré dans l'instrument, et par  $II_1$  la première portion du rayon lumineux dans l'instrument. La loi de Snell-Descartes vectorielle appliquée à chaque surface rencontrée donne par exemple

$$(n_o \vec{u}_o - n_1 \vec{u}_1) \cdot \vec{\Delta I} = 0$$

. Par conséquent,

$$n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_i M_i} - n_o \vec{u}_o \cdot \overrightarrow{A_o M_o} = Cte \quad (2.14)$$

## 2.2.2 Conditions de conservation du stigmatisme

### Condition d'aplanétisme d'Abbe

Il s'agit de la conservation du stigmatisme dans le plan de front perpendiculaire à l'axe optique. Soit l'objet  $A_o B_o$  compris dans un tel plan de front.

$$n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_i B_i} - n_o \vec{u}_o \cdot \overrightarrow{A_o B_o} = n_i \overline{A_i B_i} \sin(\theta_i) - n_o \overline{A_o B_o} \sin(\theta_o) = Cte \quad (2.15)$$

La constante est déterminée à l'aide de la condition d'annulation de l'angle image lorsque l'angle objet est nul :

$$n_o \overline{A_o B_o} \sin(\theta_o) = n_i \overline{A_i B_i} \sin(\theta_i) \quad (2.16)$$

ce qui s'écrit couramment en faisant intervenir le grandissement transversal  $G_t$  :

$$\frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_i} = \frac{n_i}{n_o} G_t \quad (2.17)$$

### Condition d'Herschel

On s'intéresse ici à la conservation du stigmatisme le long de l'axe optique du système centré. On appelle  $C_o$  et  $C_i$  les points conjugués situés sur l'axe, voisins de  $A_o$  et  $A_i$  respectivement.

$$n_i \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_i C_i} - n_o \vec{u}_o \cdot \overrightarrow{A_o C_o} = n_i \overline{A_i C_i} \cos(\theta_i) - n_o \overline{A_o C_o} \cos(\theta_o) = Cte \quad (2.18)$$

De la même façon, on détermine la constante à partir des conditions initiales d'annulation des angles :

$$Cte = n_i \overline{A_i C_i} - n_o \overline{A_o C_o}$$

, d'où

$$n_o \overline{A_o C_o} \sin^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right) = n_i \overline{A_i C_i} \sin^2\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \quad (2.19)$$

ce qui s'écrit aussi, en introduisant le grandissement longitudinal

$$\frac{\sin^2 \frac{\theta_o}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_i}{2}} = \frac{n_i}{n_o} G_t^2 \frac{1}{G_l} \quad (2.20)$$

## Chapitre 3

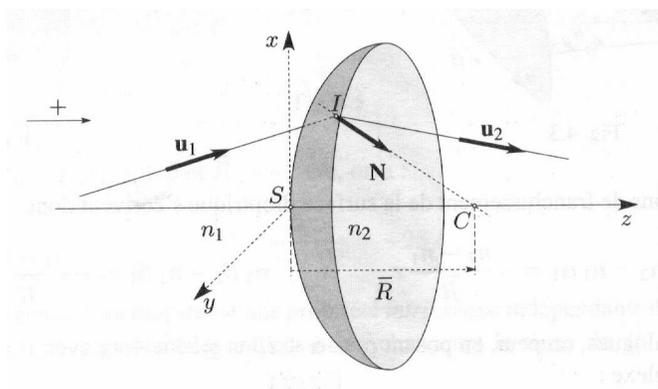
# Le dioptre sphérique

La détermination de l'image d'un objet étendu à travers un système optique ne se fait pas, le plus souvent, rayon par rayon en appliquant les lois de Snell. Il est préférable d'étudier le comportement du système dans l'approximation de Gauss et de regarder ensuite les écarts à cette approximation, appelés aberrations géométriques.

### 3.1 Le dioptre sphérique dans l'approximation de Gauss

#### 3.1.1 Configuration

Soit la figure suivante :



Si les angles d'incidence et de réfraction  $i_1$  et  $i_2$  sont faibles (ie. les rayons

sont peu inclinés sur l'axe, et proches de l'axe optique, on parle de rayons paraxiaux), il vient

$$n_1 i_1 \approx n_2 i_2$$

et

$$Cte = a \approx n_2 - n_1$$

On peut donc écrire la relation vectorielle approchée

$$n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = a \vec{N} = (n_2 - n_1) \frac{\vec{IC}}{\overline{R}} \quad (3.1)$$

qui, projetée sur les trois axes définis, donne

$$n_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{vmatrix} + n_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{vmatrix} = (n_2 - n_1) \begin{vmatrix} -\frac{x}{\overline{R}} \\ -\frac{y}{\overline{R}} \\ \gamma_N \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

On extrait donc des relations du type

$$n_2 \alpha_2 - n_1 \alpha_1 = -\frac{n_2 - n_1}{\overline{R}} x \quad (3.3)$$

et

$$n_2 \beta_2 - n_1 \beta_1 = -\frac{n_2 - n_1}{\overline{R}} y \quad (3.4)$$

en observant que les paramètres  $\gamma$  sont très proches de l'unité (pas de relation entre eux donc). Remarquons enfin que les paramètres apparemment complexes  $\alpha$  et  $\beta$  correspondent en fait approximativement aux angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$ .

### 3.1.2 Vergence

On définit la **vergence**  $V$  d'un dioptre sphérique comme la grandeur

$$V = \frac{n_2 - n_1}{\overline{R}} \quad (3.5)$$

où

$$\overline{R} = \overline{SC}$$

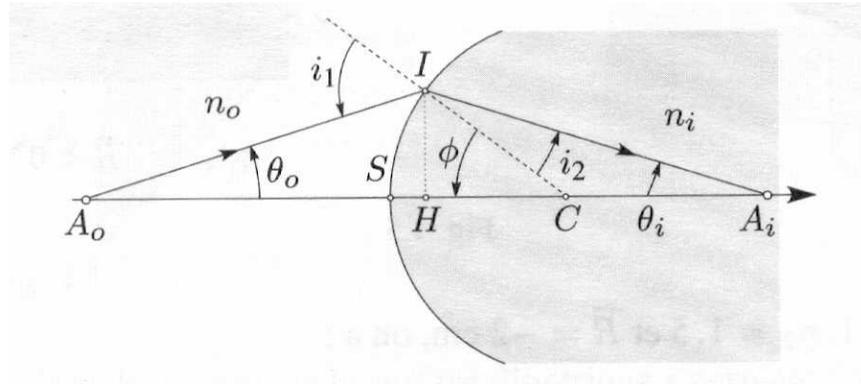
est le rayon de courbure algébrique du dioptre, dont le signe est lié au sens de la lumière incidente. La vergence est une propriété *intrinsèque* du dioptre puisqu'indépendante du sens de propagation de la lumière (si  $\bar{R}$  change de signe, la différence d'indice également). Elle s'exprime en *dioptries* ( $\delta$ ).

On dit qu'un dioptre est

- *convergent* si son centre C est situé dans le milieu le plus réfringent (vergence positive)
- *divergent* si C est dans le milieu moins réfringent (vergence négative)

### 3.1.3 Relation de conjugaison

Adoptons les notations suivantes :



On a les relations angulaires

$$|i_1| = |\theta_o| + |\phi|$$

et

$$|i_2| = |\theta_i| - |\phi|$$

La relation de Snell-Descartes donne alors dans la limite des petits angles

$$n_o |i_1| = n_i |i_2| \quad (3.6)$$

c'est-à-dire

$$n_o |\theta_o| + n_i |\theta_i| = (n_i - n_o) |\phi| \quad (3.7)$$

Explicitons maintenant ces angles par leur tangente, en faisant l'approximation que la hauteur H est infiniment voisine du sommet S,

$$|\theta_o| \simeq \frac{HI}{A_o H} \simeq \frac{HI}{A_o S}$$

$$|\theta_i| \simeq \frac{HI}{A_i H} \simeq \frac{HI}{A_i S}$$

$$|\phi| \simeq \frac{HI}{R}$$

En divisant par la quantité commune HI, il vient finalement

$$\frac{n_o}{SA_o} + \frac{n_i}{SA_i} = \frac{n_i - n_o}{R} = V \quad (3.8)$$

soit, en introduisant l'algébrisation des grandeurs,

$$\frac{n_i}{SA_i} - \frac{n_o}{SA_o} = \frac{n_i - n_o}{R} = V \quad (3.9)$$

Si le point objet est rejeté à l'infini,  $A_i$  tend vers un point  $F_i$  appelé *foyer image* et on définit une distance focale image

$$f_i = \overline{SF_i} = \frac{n_i}{V} \quad (3.10)$$

De même, lorsque  $A_i$  est envoyé à l'infini, le conjugué objet correspondant est appelé *foyer objet* et correspond à une distance focale objet

$$f_o = \overline{SF_o} = -\frac{n_o}{V} \quad (3.11)$$

## 3.2 Calcul matriciel

La linéarité des équations de franchissement du dioptré sphérique suggère l'emploi du calcul matriciel. Partons d'une matrice position

$$\begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

où  $x$  représente l'intersection du rayon lumineux avec le dioptré, et  $n\alpha$  l'angle optique pordu de l'indice par l'angle d'inclinaison sur l'axe.

Le franchissement du dioptré s'écrit

$$\begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_1 \quad (3.13)$$

La matrice utilisée, de déterminant unitaire, est dite *matrice de réfraction*  $R$ .

De la même façon, entre deux points  $A_1$  et  $A_2$  d'un même milieu homogène, pour un rayon paraxial,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \alpha_1 \overline{A_1 A_2} & y_2 &= y_1 + \beta_1 \overline{A_1 A_2} \\ \alpha_1 &= \alpha_2 & \beta_1 &= \beta_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si l'on veut introduire la matrice position précédente, nous écrivons

$$\begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \overline{A_1 A_2} \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_1 \quad (3.15)$$

où la matrice de passage, de déterminant unitaire, est appelée *matrice de translation*  $\tau$ .

### 3.3 Eléments cardinaux d'un système optique

#### 3.3.1 Matrice de transfert

Pour un système optique complexe, on définit une matrice position en entrée et une matrice en sortie. Il est alors possible d'écrire, entre les  $p$  différents dioptries qui s'y succèdent, séparés par des milieux homogènes,

$$[X]_s = T(\overline{ES}) [X]_e \quad (3.16)$$

avec

$$T(\overline{ES}) = \tau(\overline{S_p S}) \times R(S_p) \times \tau(\overline{S_{p-1} S_p}) \times R(S_{p-1}) \dots \tau(\overline{S_1 S_2}) \times R(S_1) \times \tau(\overline{ES_1}) \quad (3.17)$$

Cette matrice de transfert est de déterminant unitaire.

Son terme  $T_{21}$  est indépendant du couple de points considéré  $A_1$  et  $A_2$  : c'est l'opposé  $-V$  de la *vergence* du système centré.

#### 3.3.2 Matrice de conjugaison

Considérons deux plans conjugués au sens où la différence de chemin optique entre deux points  $B_o$  et  $B_i$  de ces plans soit la même quelle que soit l'inclinaison sur l'axe des rayons partant de  $B_o$ . La matrice de transfert s'écrit

$$\begin{bmatrix} T_{11}(A) & T_{12}(A) \\ T_{21}(A) & T_{22}(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \overline{SA_i} \\ 0 & n_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \overline{-EA_o} \\ 0 & n_o \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

d'où l'on extrait les composants

$$\begin{aligned} T_{11}(A) &= a - V \frac{\overline{SA_i}}{n_i} & T_{12}(A) &= b - a \frac{\overline{EA_o}}{n_o} + \frac{\overline{SA_i}}{n_i} \left( V \frac{\overline{EA_o}}{n_o} + d \right) \\ T_{21}(A) &= -V & T_{22}(A) &= d + V \frac{\overline{EA_o}}{n_o} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nous pouvons donc maintenant écrire les relations de passage par produit matriciel

$$x_i = T_{11} x_o + T_{12} n_o \alpha_o \quad (3.20)$$

$$n_i \alpha_i = T_{21} x_o + T_{22} n_o \alpha_o \quad (3.21)$$

La position  $x_i$  de l'image étant indépendante de l'inclinaison des rayons sur l'axe,  $\alpha_o$ , il vient

$$T_{12}(A) = 0 \quad (3.22)$$

Donc, le terme  $T_{11}$  trouve l'expression suivante,

$$T_{11}(A) = \frac{x_i}{x_o} = G_t \quad (3.23)$$

et de même, lorsque  $x_o = 0$ , il vient

$$T_{22}(A) = \frac{n_i \alpha_i}{n_o \alpha_o} = \frac{n_i}{n_o} G_\alpha \quad (3.24)$$

En conclusion, l'expression de la matrice de conjugaison est la suivante :

$$\begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o} G_\alpha \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Le calcul du déterminant, unitaire, conduit à la formule de Lagrange et Helmholtz

$$\frac{n_i}{n_o} G_t G_\alpha = 1 \quad (3.26)$$

ou bien encore, de manière équivalente,

$$n_i \alpha_i x_i = n_o \alpha_o x_o \quad (3.27)$$

### 3.3.3 Plans principaux (unitaires)

Il s'agit de plans de front conjugués, notés  $H_o$  et  $H_i$ , tels que *le grandissement transversal  $G_t$  soit égal à l'unité.*

Entre ces plans, la matrice de transfert a pour expression

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Le calcul des termes  $T_{11}$  et  $T_{22}$  (cf. équation 3.19) permet d'obtenir les positions de ces plans :

$$T_{11}(H) = a - V \frac{\overline{SH_i}}{n_i} \text{ et } T_{22}(H) = d + V \frac{\overline{EH_o}}{n_o}$$

d'où les égalités

$$\overline{SH_i} = \frac{n_i}{V} (a - T_{11}(H)) = f_i (a - 1) \quad (3.29)$$

$$\overline{EH_o} = \frac{n_o}{V} (T_{22}(H) - d) = f_o (d - 1) \quad (3.30)$$

### 3.3.4 Points nodaux

Il s'agit de deux points conjugués sur l'axe, notés  $N_o$  et  $N_i$ , tels que tout rayon incident passant par  $N_o$  émerge de  $N_i$  parallèlement à sa direction incidente. En conséquence,

$$G_\alpha = \frac{\alpha_i}{\alpha_o} = 1 \quad (3.31)$$

La matrice de transfert s'écrit pour ces points conjugués

$$T(\overline{N_o N_i}) = \begin{bmatrix} \frac{n_o}{n_i} & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

d'où l'on tire, après observation de l'équation (3.19) :

$$T_{11}(N) = a - V \frac{\overline{SN_i}}{n_i} = \frac{n_o}{n_i} \text{ et } T_{22}(N) = d + V \frac{\overline{EN_o}}{n_o} = \frac{n_i}{n_o}$$

d'où l'on tire

$$\overline{SN_i} = f_i \left( a - \frac{n_o}{n_i} \right) \quad (3.33)$$

$$\overline{EN_o} = f_o \left( d - \frac{n_i}{n_o} \right) \quad (3.34)$$

Cependant, il est souvent plus commode de définir les points nodaux à partir des plans principaux. En effet,

$$\overline{H_i N_i} = \overline{SN_i} - \overline{SH_i} = f_i \left( a - \frac{n_o}{n_i} \right) - f_i (a - 1) = f_i + f_o \quad (3.35)$$

et il en est de même pour le point nodal objet :

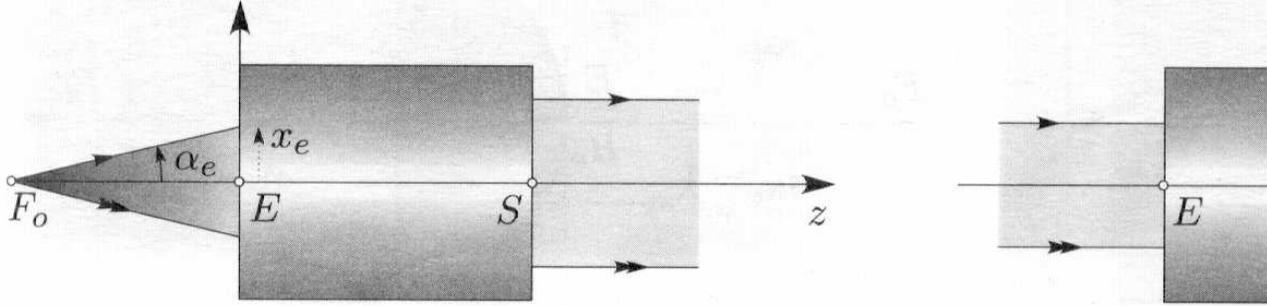
$$\overline{H_i N_i} = \overline{H_o N_o} = f_o + f_i \quad (3.36)$$

Remarque : les distances  $H_o H_i$  et  $N_o N_i$  sont égales

### 3.3.5 Plans focaux

Ces plans de front sont définis ainsi :

- tout rayon incident issu de  $F_o$  émerge parallèlement à l'axe optique
- tout rayon incident, parallèle à l'axe optique, émerge en convergeant vers  $F_i$



Matriciellement, nous avons

$$x_s = a x_e + b n_o \alpha_e \quad (3.37)$$

$$n_i \alpha_s = -V x_e + d n_o \alpha_e \quad (3.38)$$

Sur l'axe, on a toujours  $\alpha_s = 0$ . Ainsi,

$$\frac{x_e}{\alpha_e} = \frac{n_o}{V} d$$

On en déduit, en regard de la figure, que les rayons incidents proviennent d'un point  $F_o$  tel que, algébriquement,

$$-\overline{EF_o} = \frac{n_o}{V} d \quad (3.39)$$

Par conséquent,

$$\overline{EF_o} = f_o d \quad (3.40)$$

$$\overline{H_o F_o} = \overline{H_o E} + \overline{EF_o} = f_o \quad (3.41)$$

De la même façon, nous obtiendrons pour le plan focal image

$$\overline{SF_i} = f_i a \quad (3.42)$$

$$\overline{H_i F_i} = \overline{H_i S} + \overline{SF_i} = f_i \quad (3.43)$$

### 3.3.6 Le dioptré sphérique

Un tel système voit sa matrice de transfert se résumer à la matrice de réfraction

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

avec la vergence  $V = \frac{n_i - n_o}{\bar{R}}$ . Il vient immédiatement les résultats suivants :

- les plans d'entrée et de sortie et les plans principaux sont confondus au sommet S
- les points nodaux sont confondus au centre de courbure du dioptré

$$\overline{SN_o} = \overline{SN_i} = f_o + f_i = \frac{n_i - n_o}{V} = \bar{R} \quad (3.45)$$

- les foyers sont situés en des points tels que

$$f_o = -\frac{n_o}{V} = -\frac{n_o \bar{R}}{n_i - n_o} \quad (3.46)$$

$$f_i = \frac{n_i}{V} = \frac{n_i \bar{R}}{n_i - n_o} \quad (3.47)$$

$$(3.48)$$

## Chapitre 4

# Formules de conjugaison

### 4.1 Relation de conjugaison homographique

Elle s'obtient en utilisant le fait que le facteur  $T_{12}(A)$  est nul.

$$T_{12}(A) = b - a \frac{\overline{EA_o}}{n_o} + \frac{\overline{SA_i}}{n_i} \left( V \frac{\overline{EA_o}}{n_o} + d \right) \quad (4.1)$$

$$= b - a \frac{z_o}{n_o} + \frac{z_i}{n_i} \left( V \frac{z_o}{n_o} + d \right) \quad (4.2)$$

$$= 0 \quad (4.3)$$

On extrait alors l'expression de la grandeur  $\frac{z_i}{n_i}$  en fonction de  $\frac{z_o}{n_o}$  :

$$\frac{z_i}{n_i} = \frac{a \frac{z_o}{n_o} - b}{V \frac{z_o}{n_o} + d} \quad (4.4)$$

Cette formule suit les coefficients de la matrice de transfert, si l'on inverse les signes des éléments antidiagonaux.

### 4.2 Formules de Descartes

Elles sont relatives aux points principaux.

Si l'on choisit ici des plans conjugués en entrée et en sortie, la matrice de transfert se simplifie :

$$\begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o} G_\alpha = \frac{1}{G_t} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Par conséquent, la formule de conjugaison homographique devient

$$\frac{z_i}{n_i} = \frac{G_t \frac{z_o}{n_o}}{V \frac{z_o}{n_o} + \frac{1}{G_t}} \quad (4.6)$$

Isolons la vergence :

$$V = G_t \frac{n_i}{z_i} - \frac{n_o}{G_t z_o} \quad (4.7)$$

Pour les plans principaux, pris comme entrée E et sorite S, le grandissement transversal vaut 1 et si l'on note  $p_o = H_o A_o$  et  $p_i = H_i A_i$ ,

$$\frac{n_i}{p_i} - \frac{n_o}{p_o} = V = \frac{n_i}{f_i} \quad (4.8)$$

Le grandissement transversal vaut, d'après la matrice  $T(\overline{A_o A_i})$ ,

$$G_t = T_{11}(A) = a - \frac{V \overline{S A_i}}{n_i} = 1 - \frac{V p_i}{n_i} \quad (4.9)$$

d'où

$$G_t = \frac{p_o}{n_i} \quad (4.10)$$

Le grandissement angulaire est donné par la relation de Lagrange-Helmholtz

$$G_\alpha = \frac{p_o}{p_i} \quad (4.11)$$

Le grandissement longitudinal s'obtient en différentiant la formule de Descartes :

$$\frac{n_o}{p_o^2} dp_o - \frac{n_i}{p_i^2} dp_i = 0 \quad (4.12)$$

d'où

$$G_l = \frac{dp_i}{dp_o} = \frac{n_o}{n_i} \left( \frac{p_i}{p_o} \right)^2 \quad (4.13)$$

toujours positif.

### 4.3 Formules de Newton

Elles prennent pour origine les foyers du système. Nous poserons  $\sigma_o = \overline{F_o A_o}$  et  $\sigma_i = \overline{F_i A_i}$ .

Pour obtenir ces formules, partons de la matrice de transfert  $T(\overline{H_o H_i})$  :

$$T(\overline{F_o F_i}) = \tau(\overline{H_i F_i}) T(\overline{H_o H_i}) \tau(\overline{F_o H_o}) \quad (4.14)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{f_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{f_o}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - V \frac{f_i}{n_i} & -\frac{f_o}{n_o} + \frac{f_i}{n_i} (1 + V \frac{f_o}{n_o}) \\ -V & 1 + V \frac{f_o}{n_o} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

c'est-à-dire plus simplement

$$T(\overline{F_o F_i}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{V} \\ -V & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_i \\ \frac{1}{f_i} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Reprenons ici la relation homographique initiale, en l'adaptant au cas où les plans d'entrée et de sortie sont pris aux foyers  $F_o$  et  $F_i$  :

$$\frac{\sigma_i}{n_i} = \frac{a \frac{\sigma_o}{n_o} - b}{V \frac{\sigma_o}{n_o} + d} = \frac{0 - \frac{1}{V}}{V \frac{\sigma_o}{n_o} + 0} \quad (4.18)$$

C'est-à-dire

$$\sigma_o \sigma_i = -\frac{n_i n_o}{V^2} = f_o f_i \quad (4.19)$$

Utilisons la matrice de transfert  $T(\overline{F_o F_i})$  pour exprimer le passage de  $A_o$  à  $A_i$  :

$$\begin{aligned} T(\overline{A_o A_i}) &= T(\overline{F_i A_i}) T(\overline{A_o A_i}) T(\overline{A_o F_o}) \quad (4.20) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \sigma_i n_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{V} \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sigma_o}{n_o} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \frac{\sigma_i}{n_i} & \frac{1}{V} + V \frac{\sigma_o \sigma_i}{n_o n_i} \\ -V & V \frac{\sigma_o}{n_o} \end{bmatrix} \quad (4.21) \end{aligned}$$

La relation de Lagrange-Helmholtz et le fait que  $T_{12}(A) = 0$  permettent de dire immédiatement que

$$\begin{aligned} G_t = T_{12}(A) &= -V \frac{\sigma_i}{n_i} = -\frac{\sigma_i}{f_i} = -\frac{f_o}{\sigma_o} \text{ et} \\ G_\alpha = \frac{n_o}{n_i} T_{22}(A) &= -\frac{n_o}{V \sigma_i} = \frac{f_o}{\sigma_i} = \frac{\sigma_o}{f_i} \end{aligned}$$

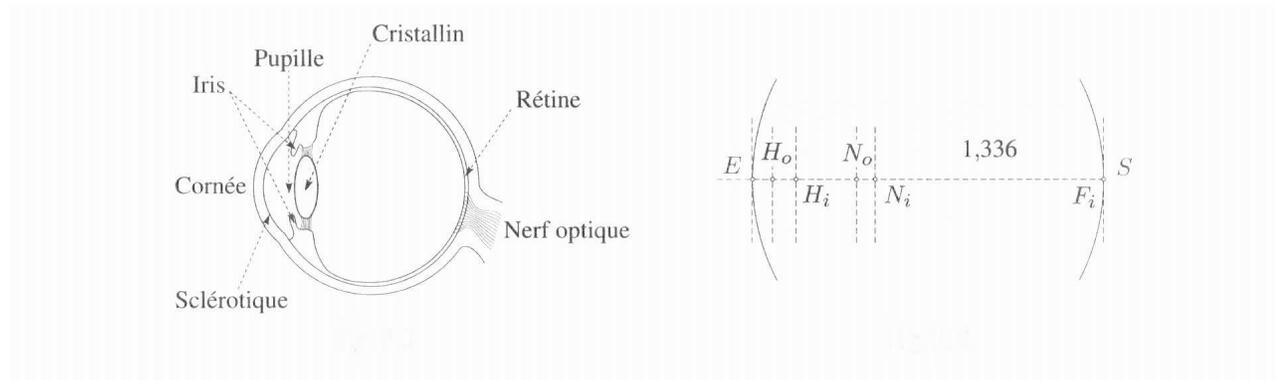
## Chapitre 5

# Etude de systèmes optiques simples

### 5.1 L'oeil

#### 5.1.1 Description du système optique

L'oeil se présente comme un globe de 25 mm e diamètre environ, limité par une membrane résistante, la *sclérotique*. On distingue



- la cornée, partie antérieure de la sclérotique, transparente
- l'humeur aqueuse, liquide transparent d'indice 1,336
- le cristallin, lentille biconvexe élastique d'indice 1,4
- l'humeur vitreuse, liquide gélatineux d'indice 1,336
- la rétine, membrane discontinue formée de cellules côniques (les cônes,

excités le jour en vision photopique) au centre et cylindriques (les bâtonnets, stimulés la nuit en vision scotopique) sur le pourtour

La sensibilité de la rétine est maximale sur un petit cercle voisin de l'axe, de rayon 1 mm, appelé *tache jaune*. Elle dépend de la nature spectrale du rayonnement (maximale entre 380 et 720 nm chez l'homme).

En avant du cristallin, la pupille joue le rôle d'un diaphragme qui limite la quantité de lumière incidente à celle nécessaire à la détection. Grâce à une membrane, l'iris, diversement colorée, le diamètre de la pupille peut varier entre 2 et 8 mm.

### 5.1.2 Caractéristiques de la vision

En moyenne, on peut représenter la matrice de transfert cornée-rétine de la manière suivante :

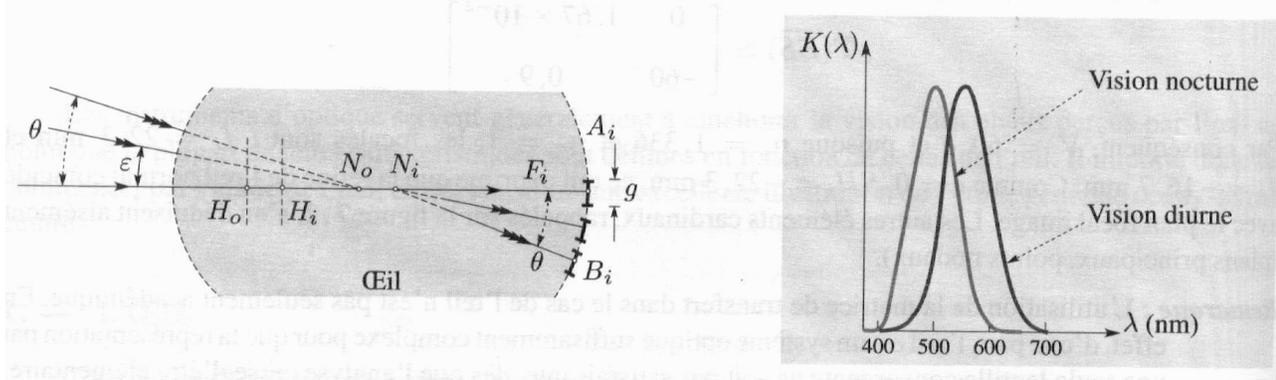
$$T(\overline{ES}) \simeq \begin{bmatrix} 0 & 1,67 \cdot 10^{-2} \\ -60 & 0,9 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

La vergence étant de 60  $\delta$ , on en déduit les focales  $f_i = 22,3 \text{ mm}$  et  $f_o = -16,7 \text{ mm}$ . Comme  $a=0$ , il vient  $\overline{SH}_i = -22,3 \text{ mm}$  : la rétine de l'oeil normal coïncide avec le plan focal image.

Cet oeil normal donne donc d'un objet situé à l'infini une image nette sur la rétine ; lorsque l'objet se rapproche, le cristallin se déforme afin que l'image de l'objet, qui n'est plus au foyer image, se forme encore sur la rétine. La matrice se modifie donc, et on dit que l'oeil *accomode*. Cette déformation est maximale lorsque l'objet se situe à une distance  $d_m$  appelée distance minimale de vision distincte, qui varie selon les individus et l'âge. Elle est habituellement voisine de 25 cm.

Un oeil normal voit donc nettement un objet placé entre un point P ou *punctum proximum* à la distance  $d_m$  et un point R ou *punctum remotum* à l'infini.

Le champ de l'oeil est défini par un cône de sommet l'oeil lui-même et d'angle total compris entre 40 et 50. Sa structure granulaire limite la capacité de l'oeil à distinguer des détails : si la distance entre deux images ponctuelles sur la rétine est trop faible, une seule cellule est impressionnée et le cerveau ne fait aucune différence entre les deux points. Pour que deux points puissent être séparés, on admet généralement que leurs images sur deux cellules rétinienne doivent être séparées par une troisième cellule. Sachant que le diamètre cellulaire est de l'ordre de  $g = 4$  microns, il vient la figure suivante :



d'où l'on tire que  $A_i B_i \simeq N_i F_i \theta \approx 2g$ , soit

$$\theta > \frac{2g}{N_i F_i} = \frac{2g}{f_o} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \quad (5.2)$$

Par ailleurs, la réponse de l'oeil n'est pas la même pour toutes les longueurs d'onde. On définit une efficacité lumineuse spectrale  $K(\lambda)$  : en vision photopique par exemple, cette courbe passe par un maximum vers  $\lambda_m = 550 \text{ nm}$ , tandis qu'en vision scotopique, ce maximum n'est plus que de 505 nm. Ce déplacement vers le bleu en vision nocturne porte le nom d'*effet Purkinje* et s'explique par l'influence prépondérantes des bâtonnets à faible flux lumineux.

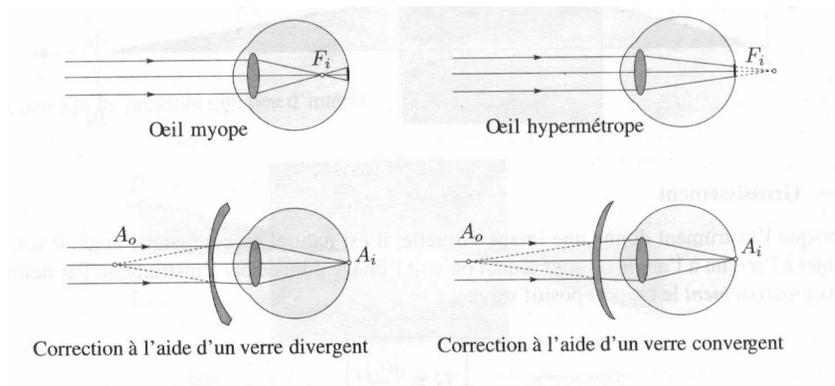
Notons enfin que c'est la vision *binoculaire* qui permet de percevoir le relief et donc les trois dimensions. Les images d'un objet sur la rétine forment un couple stéréoscopique, fonction de la distance entre les yeux, et des angles aux yeux. Les stéréogrammes sont des images informatiques qui utilisent ce procédé pour créer des impressions de relief.

### 5.1.3 Défauts de l'oeil

Ces défauts sont appelés *amétropies*, l'oeil normal étant dit *emmetrope*.

- pour un oeil myope, trop convergent, le punctum proximum est plus proche de l'oeil et le punctum remotum à distance finie. Ce défaut est attribué à un allongement horizontal de l'oeil, qui éloigne la rétine du foyer image. On corrige ce défaut à l'aide de verres divergents.
- pour un oeil hypermétrope, pas assez convergent, le PP est trop éloigné de l'oeil. On corrige ce défaut à l'aide de verres convergents.

- la presbytie est un défaut d'accommodation, qui se traduit par un rapprochement du PP du PR, ce dernier restant à l'infini. Elle touche toutes les vues. Ce défaut se corrige à l'aide de verres progressifs, afocaux en vision éloignée et convergents en champ proche.
- l'astigmatisme est la différence de focalisation dans un même plan de front des images de deux directions perpendiculaires du plan objet. On l'attribue au défaut de symétrie de révolution de la cornée, et on le corrige par des verres eux-mêmes astigmatiques.



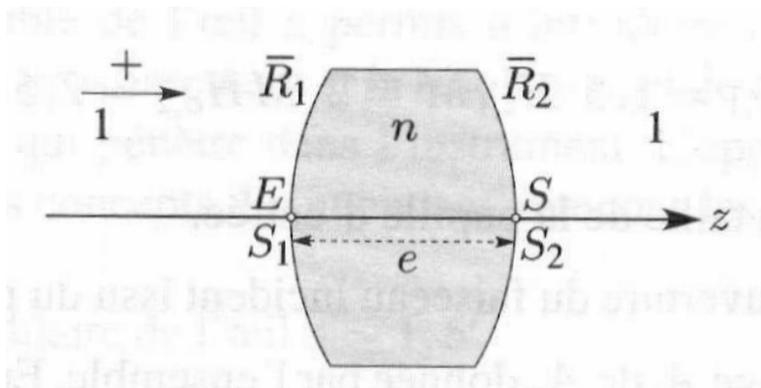
# Chapitre 6

## Lentilles

Ce sont les composants optiques les plus répandus. Elles sont constituées de deux dioptries sphériques qui délimitent un milieu d'indice  $n$ , l'ensemble étant plongé dans l'air.

### 6.1 Lentilles épaisses

Compte-tenu de la figure suivante



nous obtenons la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e \frac{V_1}{n} & \frac{e}{n} \\ -V & 1 - e \frac{V_2}{n} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

avec les vergences

$$V_1 = \frac{n-1}{R_1} \quad V_2 = \frac{1-n}{R_2} \quad \text{et} \quad V = V_1 + V_2 - e \frac{V_1 V_2}{n}$$

La vergence de la lentille épaisse a pour expression

$$V = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n - 1}{n} \frac{e}{R_1 R_2} \right) \quad (6.2)$$

et une focale image qui s'en déduit par la formule

$$f_i = -f_o = \frac{1}{V} \quad (6.3)$$

Les plans principaux et nodaux se déduisent de la matrice de transfert. En effet,

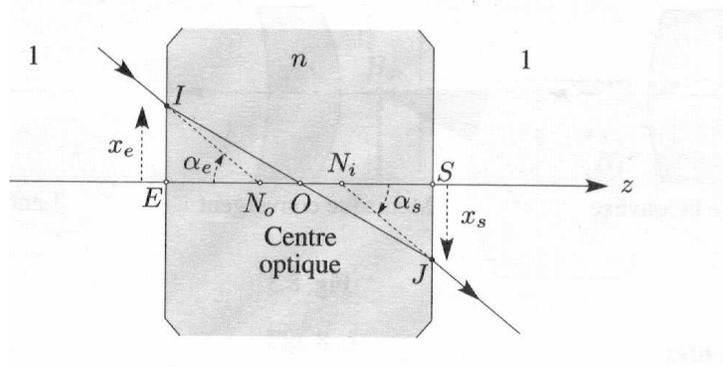
$$\overline{SH_i} = f_i (a - 1) = -\frac{eV_1}{nV} \quad (6.4)$$

et

$$\overline{EH_o} = f_o (d - 1) = \frac{eV_2}{nV} \quad (6.5)$$

Comme les milieux extrêmes sont identiques, les points nodaux sont quasiment confondus avec  $H_o$  et  $H_i$ ; les foyers image et objet sont déterminés à partir des longueurs algébriques  $\overline{H_oF_o} = f_o$  et  $\overline{H_iF_i} = f_i$ .

Le centre optique est lié aux points nodaux  $N_o$  et  $N_i$  puisqu'un rayon qui y passe voit ses parties incidente et émergente parallèles.



A partir de la figure, on note que

$$\frac{x_e}{OE} = \frac{x_s}{OS} \quad (6.6)$$

Les expressions de  $x_e$  et  $x_s$  sont données par la matrice de transfert de la lentille épaisse :

$$x_e = \left( 1 - e \frac{V_1}{n} \right) x_s + \frac{e}{n} \alpha_e \quad (6.7)$$

et d'après la figure

$$\frac{x_e}{\alpha_e} = -\overline{EN_o} = -e \frac{V_2}{nV} \quad (6.8)$$

Il devient possible d'évaluer le rapport

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OE}} = 1 - \frac{eV_1}{n} + \frac{e}{n} \left( \frac{nV}{-eV_2} \right) = -\frac{V_1}{V_2} = \frac{\overline{R_2}}{\overline{R_1}} \quad (6.9)$$

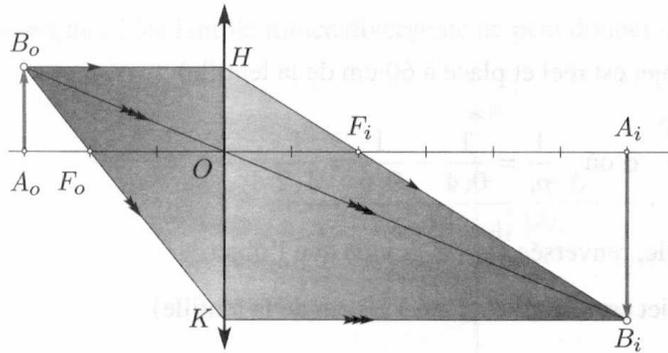
## 6.2 Lentilles minces

Ce sont des lentilles dont l'épaisseur est négligeable, de telle sorte que leur vergence soit la somme des vergences des deux diotres.

$$V = V_1 + V_2 = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (6.10)$$

Comme les plans d'entrée et de sortie sont identiques, les plans principaux coïncident avec le plan de la lentille. D'autre part, les milieux extrêmes étant les mêmes, les points principaux sont aussi les points nodaux : tous ces points sont confondus avec le centre O de la lentille. Les foyers sont symétriques par rapport à ce point, à la distance focale.

Pour retrouver les formules de conjugaison, observons la figure suivante :



Nous pouvons écrire les relations de Thalès suivantes :

$$\frac{A_i B_i}{OH} = \frac{F_i A_i}{OF_i} \quad (6.11)$$

$$\frac{A_i B_i}{A_o B_o} = \frac{OA_i}{OA_o} \quad (6.12)$$

$$\frac{OK}{A_oB_o} = \frac{OF_o}{A_oF_o} \quad (6.13)$$

ce qui permet d'écrire le grandissement transversal

$$G_t = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} = -\frac{\overline{F_iA_i}}{f_i} = \frac{f_i}{\overline{F_oA_o}} = \frac{\overline{OA_i}}{\overline{OA_o}} = \frac{p_i}{p_o} < 0 \quad (6.14)$$

soit plus simplement, en introduisant les notations  $p_o = \overline{OA_o}$ ,  $p_i = \overline{OA_i}$ ,  $\sigma_o = \overline{F_oA_o}$  et  $\sigma_i = \overline{F_iA_i}$

$$G_t = -\frac{\sigma_i}{f_i} = \frac{\sigma_o}{f_i} = \frac{p_i}{p_o} \quad (6.15)$$

Nous obtenons alors la relation de Descartes en notant que  $\sigma_i = \overline{F_iA_i} = \overline{F_iO} + \overline{OA_i} = p_i - f_i$  :

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = \frac{1}{f_i} \quad (6.16)$$

puis celle de Newton

$$\sigma_o\sigma_i = -f_i^2 \quad (6.17)$$

## 6.3 Doublets et achromatisme

Si la lumière utilisée pour former une image est complexe, chacune des composantes monochromatiques donne sa propre contribution, ce qui altère l'image globale. On dit que l'instrument présente de l'*aberration chromatique*.

### 6.3.1 L'aberration chromatique

Prenons une lentille simple. Sa focale est donnée par le relation

$$\frac{1}{f_i} = V = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (6.18)$$

qui montre qu'elle dépend, à travers l'indice  $n$ , de la longueur d'onde de la radiation utilisée.

La quantité

$$f_r - f_b$$

correspondant aux focales dans le rouge et le bleu est appelée *aberration chromatique longitudinale principale*. De même, si on intercepte le faisceau émergent par un écran normal à l'axe, on observe des taches circulaires

colorées, bleue irisée de rouge au point foyer bleu  $F_B$  et rouge irisée de bleu au point foyer rouge  $F_R$ . Le rayon de la tache minimale est appelé *aberration chromatique transversale principale*.

Comme

$$V = \frac{1}{f_i} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

on peut écrire

$$\frac{\delta V}{V} = -\frac{\delta f_i}{f_i} = \frac{\delta n}{n - 1} \quad (6.19)$$

et on définit logiquement le *pouvoir dispersif*  $K$  d'un verre de la manière suivante :

$$K = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{A} \quad (6.20)$$

où les indices correspondent aux trois longueurs d'onde choisies par les constructeurs  $\lambda_C = 656,3 \text{ nm}$ ,  $\lambda_F = 486,1 \text{ nm}$  et  $\lambda_D = 587,56 \text{ nm}$ , et  $A$  est appelé *nombre d'Abbe* ou *constringence*.

On distingue classiquement deux grands types de verres :

- les verres légers ou **crowns** qui dispersent peu, de facteur d'Abbe supérieur à 50. Ce sont généralement des silicates de potassium et de calcium, très utilisés en industrie
- les verres lourds ou **flints**, très dispersifs, de facteur d'Abbe inférieur à 50. Ce sont des silicates de potassium et de plomb (le cristal par exemple)

### 6.3.2 L'achromatisme

Pour réduire l'aberration chromatique, il est possible d'associer des lentilles simples. Pour deux lentilles,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

d'où l'on peut extraire

$$V = V_1 + V_2 - eV_1V_2 \text{ ou bien } \frac{1}{f_i} = V = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1f_2}$$

Différentions :

$$-\frac{\delta f_i}{f_i^2} = -\frac{\delta f_1}{f_1^2} - \frac{\delta f_2}{f_2^2} + \frac{e}{f_1f_2} \left( \frac{\delta f_1}{f_1} + \frac{\delta f_2}{f_2} \right) \quad (6.22)$$

soit encore

$$-\frac{\delta f_i}{f_i^2} = -\frac{1}{A_1f_1} + \frac{1}{A_2f_2} - \frac{e}{f_1f_2} \left( \frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right) \quad (6.23)$$

Il en résulte qu'un système de deux lentilles minces est *achromatique*, pour les radiations C et F si l'on observe l'annulation, d'où :

$$e = \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2}{A_1 + A_2} \quad (6.24)$$

Si les deux lentilles sont accolées, nous devons annuler la distance  $e$ . On obtient la condition

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 = 0 \quad (6.25)$$

soit encore

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{V_1}{V_2} = -\frac{A_1}{A_2} \quad (6.26)$$

Ainsi,

$$V_1 = \frac{A_1}{A_1 - A_2} V \quad (6.27)$$

Pour obtenir un système total convergent, soit  $V = V_1 + V_2 > 0$ , il faut assurer  $V_1 > 0$  si  $A_1 > A_2$  ou  $V_1 < 0$  si  $A_1 < A_2$ . On voit qu'un système constitué d'un crown convergent et d'un flint divergent réduit l'aberration chromatique.

Pour des systèmes de lentilles taillés dans le même matériau, les contraintes sont les mêmes : la condition d'achromatisme devient

$$e = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (6.28)$$

### 6.3.3 Doublets de lentilles minces

Ces systèmes sont formés par deux lentilles minces, et on les caractérise par trois petits nombres entiers, positifs ou négatifs,  $m$ ,  $n$  et  $p$  tels que

$$\frac{f_1}{m} = \frac{e}{n} = \frac{f_2}{p} = u \quad (6.29)$$

où  $u$  est appelé *longueur* du doublet.

La matrice de transfert a ici pour expression

$$T(\overline{O_1 O_2}) = \begin{bmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{n}{m} & nu \\ \frac{m+p-n}{mpu} & 1 - \frac{n}{p} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

et permet d'obtenir immédiatement la focale image et les plans principaux :

$$f_i = \frac{mp}{m + p - n} u \quad (6.31)$$

$$\overline{O_2H_i} = \frac{-np}{m+p-n} u \quad (6.32)$$

$$\overline{O_1H_o} = \frac{nm}{m+p-n} u \quad (6.33)$$

Ici également, les milieux extrêmes étant les mêmes, les points nodaux sont confondus avec les points principaux.

Exemples de doublets : Ramsden (3,2,3) ou Huyghens (3,2,1)

### 6.3.4 Oculaires

Ce sont des doublets utilisés (préférentiellement aux loupes) pour aider l'oeil dans l'observation des objets. Les deux lentilles sont généralement plan convexes ; la première, définissant la largeur du champ, est dite *verre de champ*, et la seconde, de diamètre plus réduit, est le *verre de l'oeil*.

Comme les loupes, ils travaillent dans les conditions où l'objet est situé dans leur plan focal objet. On a

$$\overline{F_oO_1} = \overline{F_oH_o} + \overline{H_oO_1} = \frac{m}{m+p-n} (p-n) u \quad (6.34)$$

L'oculaire étant convergent, on distingue deux cas :

- $F_o$  en avant de  $O_1$  : oculaire *positif*
- $F_o$  en arrière de  $O_1$  : oculaire *négatif*

Dans la pratique, on utilise des oculaires positifs, constitués de deux groupes de lentilles accolées achromatiques, qui permettent d'observer - en même temps que l'objet situé dans le plan focal objet - un réticule de visée (traits fins perpendiculaires gravés sur une lame de verre) : l'image du réticule, donnée par l'oculaire, est elle aussi corrigée de l'aberration chromatique.

Les oculaires les plus connus sont ceux de Ramsden (positif) et de Huyghens (négatif). Ce dernier, bien que négatif, est assez utilisé dans les observations qualitatives, de par sa condition d'acromatisme simple.

## Chapitre 7

# Quelques notions sur les aberrations géométriques

Il s'agit de regarder les écarts à l'optique de Gauss, lorsque les conditions de l'approximation linéaire ne sont plus réalisées.

### 7.1 Développement général

Dans le cadre de l'approximation linéaire, on pose

$$\underline{x}_i = G_t \underline{x}_o = G_t(x_o + iy_o) \quad (7.1)$$

et de la même, il convient d'introduire l'angle complexe

$$\underline{\alpha}_o = \alpha_o + i\beta_o$$

La coordonnée complexe  $\underline{x}_i$  peut s'écrire sous la forme d'un développement polynômial dont les monômes sont de degré croissant :

$$\underline{x}_i = \sum_{\mu,\nu,t,v} C_{\mu,\nu,t,v} \underline{x}_o^\mu \underline{x}_o^{*\nu} \underline{\alpha}_o^t \underline{\alpha}_o^{*v} \quad (7.2)$$

Dans ce développement, les coefficients  $C$  sont à priori complexes, les exposants positifs ou nuls. Comme le système présente la symétrie de révolution, il est possible de le contraindre à

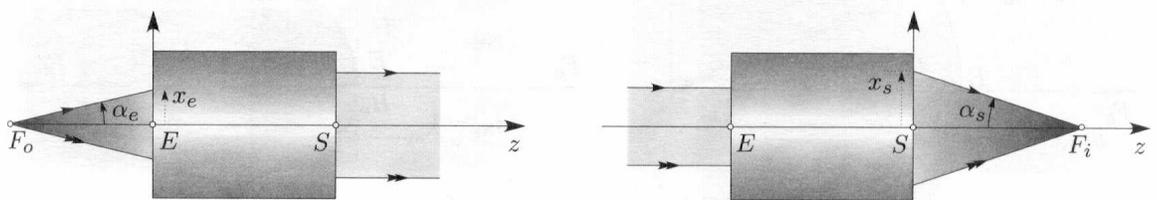
$$\underline{x}_i e^{i\theta} = \sum_{\mu,\nu,t,v} \underline{x}_o^\mu \underline{x}_o^{*\nu} \underline{\alpha}_o^t \underline{\alpha}_o^{*v} e^{i\theta(\mu-\nu+t-v)} \quad (7.3)$$

## Chapitre 8

# Exemples de systèmes composés

### 8.1 Le microscope

Il s'agit de composer deux systèmes centrés :



Nous pouvons écrire ici

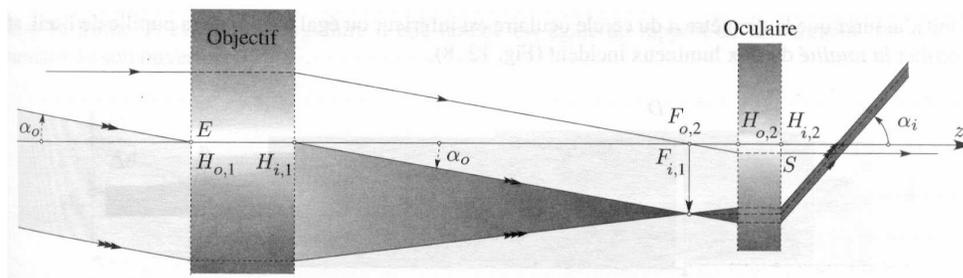
$$T(\overline{H_{o,1}H_{i,2}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e\frac{V_1}{n} & \frac{e}{n} \\ -V & 1 - e\frac{V_2}{n} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

où la vergence  $V$  a pour expression ce qu'on appelle la formule de Gullstrand

$$V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n} V_1 V_2 \quad (8.2)$$

On peut encore écrire, à partir des focales *images*

$$V = \frac{n}{f} + \frac{n_i}{f_2} - \frac{e n_i}{f_1 f_2} = \frac{n f_2 + n_i f_1 - e n_i}{f_1 f_2} \quad (8.3)$$



c'est-à-dire, en introduisant l'intervalle optique

$$\Delta = \overline{F_{i,1}F_{o,2}} = \overline{F_{i,1}H_{i,1}} + \overline{H_{i,1}H_{o,2}} + \overline{H_{o,2}F_{o,2}} \quad (8.4)$$

$$= -f_1 + e + f_{o,2} \quad (8.5)$$

$$= -f_1 + e - \frac{n}{n_i} f_2 \quad (8.6)$$

il vient

$$f_i = \frac{n_i f_1 f_2}{n f_2 + n_i f_1 - e n_i} = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad (8.7)$$

Remarquons que l'association de deux systèmes convergents donne un système divergent lorsque l'intervalle optique est positif.

## 8.2 Télescope réfracteur : la lunette astronomique

Le rôle d'un télescope est double : il doit augmenter l'angle sous lequel on voit un objet étendu qui est éloigné (tel une planète), et collecter le maximum de lumière provenant d'un objet ponctuel.

Il comporte un système optique convergent, de grande focale ( $f_1 \sim 1 \text{ m}$ ), l'*objectif*, qui donne d'un objet éloigné une image dans son plan focal image. C'est la pièce optique importante : il est le plus souvent constitué de deux lentilles accolées formant un *achromat*. Lorsque l'observateur veut atteindre cette image, il utilise un *oculaire*, de focale courte ( $f_2 \sim 1 \text{ cm}$ ) :

Ici, le foyer image de l'objectif coïncide avec le foyer objet de l'oculaire : l'intervalle optique  $\Delta$  est nul, et la distance optique (ou interstice) est égale à la somme des focales des deux composés.

Entre le plan principal objet de l'objectif et le plan principal image de l'ocu-

laire, la matrice de transfert a pour expression

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - e V_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - e V_1 V_2) & 1 - e V_2 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

c'est-à-dire plus simplement, compte-tenu que la vergence est nulle (la lunette est un système centré afocal),

$$\begin{bmatrix} -\frac{f_2}{f_1} & f_1 + f_2 \\ 0 & -\frac{f_1}{f_2} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

On remarque donc que :

- le grandissement transversal  $G_t$  est égal au rapport des focales de l'oculaire et de l'objectif, changé de signe (l'image est renversée si les deux focales sont positives)
- le grandissement angulaire  $G_\alpha$  est l'inverse du grandissement transversal  $G_t$ ; il s'identifie au signe près au grossissement

$$G = \frac{|\alpha_i|}{\theta}$$

rapport des angles sous lesquels l'objet est vu à travers l'appareil et à l'oeil nu :

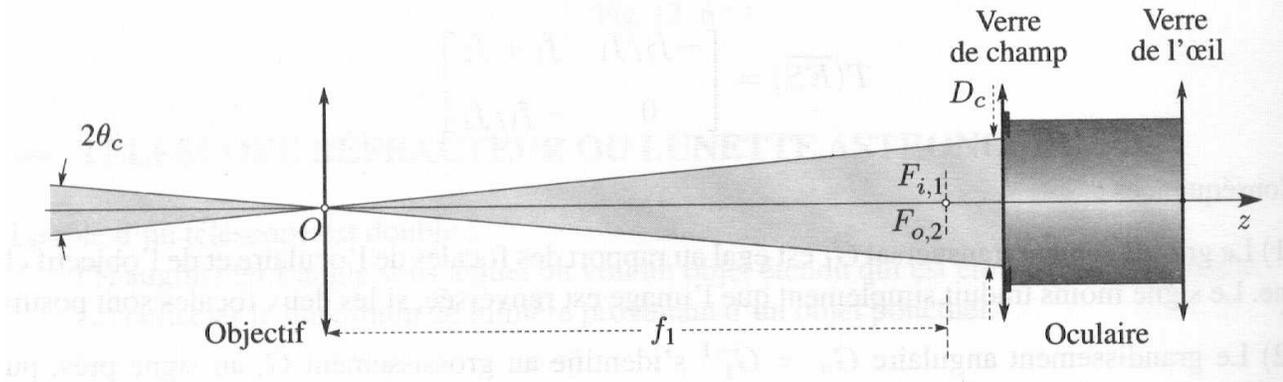
$$G = |G_\alpha| = \left| \frac{1}{G_t} \right| = \left| \frac{f_1}{f_2} \right| \quad (8.11)$$

Le faisceau lumineux qui pénètre dans le télescope est pratiquement défini par la monture de l'objectif; à la sortie, il s'appuie sur le pourtour de la pupille de sortie qui est l'image (appelée *cercle oculaire*) que donne l'instrument de la monture de l'objectif. Si  $D$  est le diamètre de la monture de l'objectif, et  $a$  celui du cercle oculaire, le grossissement correspondant peut s'écrire

$$G = \left| \frac{1}{G_t} \right| = \frac{D}{a} \quad (8.12)$$

Ainsi, pour récolter la totalité du flux lumineux incident, il faut s'assurer que le diamètre de l'oculaire est inférieur ou égal à celui de la pupille de l'oeil.

On appelle *champ* le rapport de la distance de l'objectif à l'oculaire par le diamètre du verre *de champ* (opposé au verre *de l'oeil*) de l'oculaire.



Ce champ est souvent caractérisé par l'angle de champ tel que :

$$\theta_c \simeq \frac{D}{f_{\text{objectif}}} \quad (8.13)$$

On note que si la focale de l'objectif est grande, comme c'est souvent le cas, il est commode de surmonter le réfracteur d'une petite lunette dite *chercheuse* dont l'objectif a une focale plus faible.

Dans le cas du télescope, on appelle *résolution* (angulaire) le plus petit diamètre apparent  $\Delta\theta$  décelable avec l'instrument. En fait, l'objectif diffracte l'onde incidente dans toutes les directions; le diaphragme d'ouverture ne laisse pénétrer que les ondes dont le vecteur fait avec la direction incidente un angle à une valeur limite, ce que l'on traduit par

$$-k \sin(u_o) \leq k_x \leq k \sin(u_o) \quad (8.14)$$

Une telle limitation du vecteur d'onde, d'amplitude  $\Delta k_x = 2k \sin(u_o)$ , implique, du fait de la diffraction, une limite de l'extension spatiale  $\Delta x_o$  du plus petit détail observé sur l'objet, telle que

$$\Delta k_x \Delta x_o \sim 0,5 \quad (8.15)$$

Comme  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , il vient

$$\frac{2\Delta x_o \sin(u_o)}{\lambda} \sim \frac{1}{4\pi} \quad (8.16)$$

c'est-à-dire, en introduisant l'ouverture numérique  $ON = n \sin(u)$  et la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_o = \lambda n_o$ ,

$$\Delta x_o \simeq \frac{\lambda_o}{8\pi ON} \quad (8.17)$$

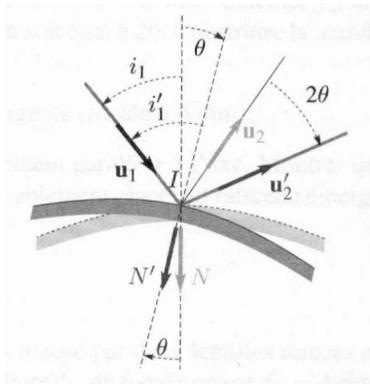
# Chapitre 9

## Miroirs

### 9.1 Propriétés

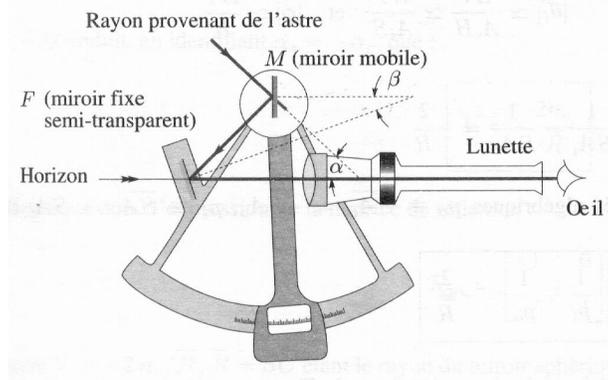
Les miroirs sont des surfaces que l'on rend réfléchissantes, en y déposant généralement un film mince de métal évaporé.

Un tel objet obéit aux lois de Descartes-Snell ; ajoutons aussi la propriété du miroir tournant : par rotation du miroir d'un angle  $\theta$ , le rayon réfléchi subit une rotation de  $2\theta$ .



Cette propriété est utilisée dans le sextant, qui permet de mesurer la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon.

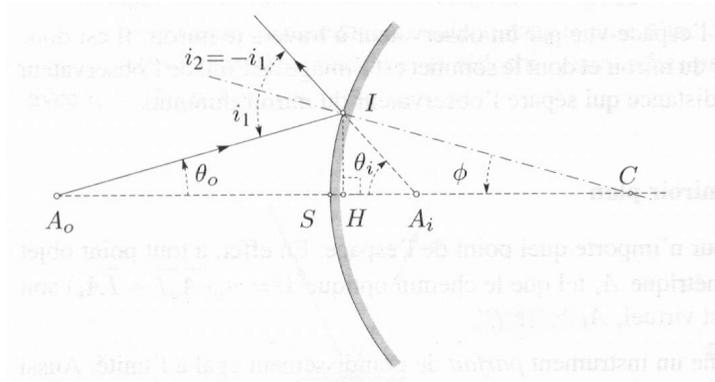
On fait tourner un miroir mobile M, parfaitement réfléchissant, qui reçoit le rayon provenant d'une étoile, de telle sorte que cette dernière paraisse, grâce à un second miroir F semi-réfléchissant, à l'horizon. L'angle  $\alpha$  que fait alors la direction du rayon incident avec l'horizon est le double de l'angle



des deux miroirs  $\beta$ .

## 9.2 Propriétés

Considérons un miroir sphérique de rayon  $\overline{R}$  donnant d'un point objet  $A_o$  une image  $A_i$ . D'après la figure suivante,



on a les relations

$$|\theta_o| + |\phi| = |\theta_i| - |\phi| \quad (9.1)$$

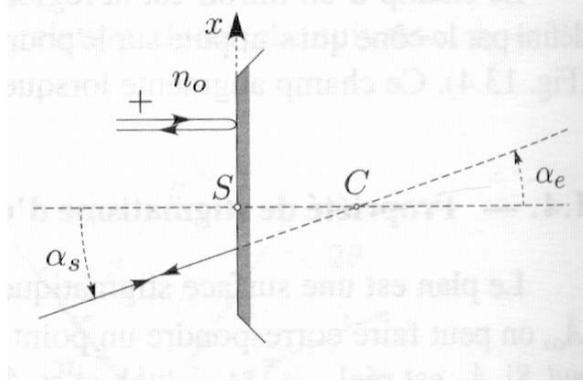
Or, pour des rayons très peu inclinés sur l'axe et proches de celui-ci,

$$|\theta_o| \simeq \frac{HI}{A_oH} \simeq \frac{HI}{A_oS} \quad |\theta_i| \simeq \frac{HI}{A_iH} \simeq \frac{HI}{A_iS} \quad |\phi| \simeq \frac{HI}{R}$$

d'où en simplifiant

$$\frac{1}{SA_i} - \frac{1}{SA_o} = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = -\frac{2}{R} = V \quad (9.2)$$

La matrice de réflexion s'obtient simplement si l'on regarde la figure suivante, où l'on considère un rayon réfléchi sans déviation :



Dans ce cas,

$$\begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} a & b \\ -V & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ n\alpha \end{bmatrix}_e \quad (9.3)$$

Remarquons que les angles en entrée et en sortie sont opposés, du fait du renversement de l'axe optique après la réflexion (les conventions d'orientation des distances et des angles se retournent) ; la matrice s'écrit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n_o}{\bar{R}} & 1 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

où  $\bar{R} = \overline{SC}$  est évalué algébriquement à partir du sens de la lumière incidente (compté positivement). Notons qu'on définit facilement les matrices de translation de la même façon que pour les dioptries, en tenant bien compte de la convention schématisée par exemple sur la figure précédente (inversion du sens positif après réflexion).

### 9.3 Eléments cardinaux

On les obtient à partir des formules dioptriques en remarquant qu'ici les deux indices sont les mêmes.

Les focales s'écrivent

$$f_o = -f_i = -\frac{n}{V} = \frac{\bar{R}}{2} \quad (9.5)$$

Les plans principaux sont confondus avec le plan de front passant par le sommet S, puisque  $a = d = 1$ .

Les foyers sont confondus en un point F milieu du segment  $\overline{SC}$ .  
Les points nodaux sont confondus au centre de courbure C du miroir ; compte tenu de l'orientation des angles, ces points correspondent ici à un grandissement angulaire égal à  $-1$ .

## 9.4 Relation de conjugaison

Nous l'avons déjà écrite :

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_o} = \frac{-2}{R} \quad (9.6)$$

Remarquons que les grandeurs  $p_i = \overline{SA_i}$  et  $p_o = \overline{SA_o}$  sont des quantités algébriques évaluées selon le sens de la lumière, lequel change à la réflexion.