

Description mathématique du corps noir

L'expérience montre que tout corps, suffisamment condensé, porté à une température T , émet un rayonnement électromagnétique qui se propage, dans le vide, à la vitesse de la lumière c et dont le spectre est continu. L'interprétation des lois auxquelles l'étude spectrale de ce rayonnement conduit a été à l'origine d'une découverte majeure du physicien allemand Max Planck en 1898 : les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement se font par quantum d'énergie appelés photons.

On se propose ici d'interpréter les lois du rayonnement à partir de l'hypothèse de Planck, en s'appuyant sur quelques résultats de physique statistique.

1 Lois expérimentales du rayonnement

1.1 Loi du déplacement de Wien

En 1880, le physicien autrichien W. Wien montra expérimentalement que le rayonnement d'un corps noir à la température T dépendait fortement de la longueur d'onde λ ; il étudia, en fonction de la longueur d'onde, la variation de l'énergie émise par unité de temps, par unité de surface émissive et par unité de longueur d'onde. On appelle flux énergétique ϕ l'énergie émise par unité de temps et exittance monochromatique M_λ le flux énergétique par unité de surface et de longueur d'onde ; avec ces notations,

$$\delta\phi = M_\lambda dS d\lambda$$

Il constata que pour les faibles valeurs de λ (domaine UV) l'exittance monochromatique M_λ augmentait, puis passait par un maximum pour une certaine longueur d'onde λ_m . Une étude expérimentale soignée du rayonnement de corps noir montre que la valeur de λ_m est reliée à la seule valeur de la température T par la relation

$$\lambda_m T = 2898 \mu m.K$$

C'est la *loi de déplacement de Wien*. Ainsi, un corps noir à une température ordinaire (300 K) émet un rayonnement centré sur une longueur d'onde voisine de $10 \mu m$, dans l'infrarouge : c'est parce qu'un tel corps n'émet pas de rayonnement visible à température ordinaire qu'on l'a historiquement qualifié de *noir*.

Par exemple, considérons les étoiles comme des corps noirs. Les plus chaudes émettent un rayonnement visible dans le bleu, les moins chaudes émettent dans le rouge : c'est le cas, respectivement, de Rigel et Betelgeuse dans la constellation d'Orion. Notons que la température 2,72 K, associée au rayonnement cosmique fossile découvert en 1965 par Penzias et Wilson, correspond à un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde millimétrique (dans le domaine radio, ce qui a permis de le mettre en évidence... par hasard!).

1.2 Loi de Rayleigh-Jeans

En 1900, des expériences analogues ont été réalisées dans le domaine infrarouge par Lord Rayleigh (John Strutt) et J. Jeans. L'exittance monochromatique M_λ diminue lorsque λ aug-

mente selon une loi en $1/\lambda^4$, ce qu'ils parvinrent à expliquer à l'aide de considérations thermodynamiques. Cependant, cette loi ne convient pas pour les faibles longueurs d'onde, lorsqu'on atteint le domaine UV : M_λ ne cesse d'augmenter et passe par un maximum : c'est ce qu'on appela la *catastrophe ultraviolette*.

1.3 Loi de Stefan-Boltzmann

Cette loi porte le nom du physicien autrichien J. Stefan, celui qui l'a établi expérimentalement en 1879, et dont Boltzmann donna une interprétation en 1884. L'exitance totale M d'un corps noir, que l'on obtient en sommant toutes les contributions spectrales, est proportionnelle à la puissance quatrième de la température

$$M = \sigma T^4$$

où

$$M = \int_{\lambda} M_{\lambda}$$

et $\sigma \simeq 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann relative à l'exitance.

1.4 Rayonnement d'un corps réel

Le rayonnement monochromatique d'un corps réel se déduit de celui d'un corps noir, à la même température, à l'aide d'un facteur multiplicatif $\varepsilon(\lambda, T)$ appelé *émissivité* du corps. Ainsi, le corps noir est caractérisé par une émissivité égale à l'unité, quelle que soit la longueur d'onde et la température. L'exitance d'un corps réel s'écrit par conséquent

$$M'(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T) M(\lambda, T)$$

Lorsque l'émissivité ε ne dépend pas de la longueur d'onde, le corps est dit *gris*.

Les corps très dilués, tels que les gaz, émettent généralement un rayonnement qui se présente sous forme de raies caractéristiques des atomes. Dans ce cas, en effet, les interactions entre les particules sont faibles. Au fur et à mesure que la densité de particules par unité de volume augmente, le nombre de raies associées aux interactions augmente, le spectre de raies se transforme progressivement en spectre continu.

1.5 Vérification expérimentale

On peut vérifier expérimentalement la loi donnant l'exitance en fonction de la température à l'aide d'un four ; pour cela, on noircit ses parois intérieures et on place devant sa grande ouverture un diaphragme, thermiquement et optiquement isolant, percé d'un petit orifice en son centre. On mesure le flux lumineux que reçoit une thermopile de surface A_d - car un tel détecteur a une réponse spectrale plate. Le flux détecté φ a pour expression

$$\varphi = S \sigma (T^4 - T_o^4) A_f \frac{\Omega}{2\pi}$$

A_f étant l'aire de l'orifice source du rayonnement, $\Omega = A_d/d^2$ l'angle solide sous lequel on voit le détecteur situé à la distance d depuis le four, $S = I/\phi$ étant le rapport du courant débité par la thermopile sur le flux énergétique qu'elle reçoit (sensibilité du capteur), 2π l'angle solide associé au demi-espace dans lequel le rayonnement est émis ; quant au terme en T_o^4 , il correspond au flux thermique ambiant, qu'il faut soustraire.

2 Hypothèse de Planck et conséquences

2.1 Energie volumique spectrale

2.1.1 Formule de Planck

Considérons le rayonnement à l'intérieur d'une cavité dont les parois sont maintenues à une température T . A l'équilibre, du fait des multiples réflexions du rayonnement sur les parois, s'établissent des ondes stationnaires dans la cavité. En raison des conditions aux limites, seules certaines ondes stationnaires peuvent s'y maintenir ; Planck a assimilé ce système à un ensemble d'oscillateurs harmoniques de fréquences différentes et d'énergies quantifiées proportionnelles aux fréquences

$$\varepsilon_n = n h \nu$$

n étant un entier, ν la fréquence du rayonnement et $h \simeq 6,626.10^{-34} \text{ J.s}$ une constante appelée depuis *constante de Planck*. Les échanges d'énergie entre le rayonnement et la matière se font par quantum d'énergie $h\nu$ appelé *photon*.

L'énergie moyenne d'un oscillateur, de fréquence ν , est obtenue à partir de la distribution de Boltzmann

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

et

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \varepsilon_n)$$

La somme géométrique conduit au résultat

$$Z = \frac{1}{1 - \exp(-\beta h \nu)}$$

d'où

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h \nu}{\exp(\beta h \nu) - 1}$$

Quant au nombre d'oscillateurs, dans l'intervalle de fréquence $d\nu$, on l'obtient en divisant le volume de l'espace des phases, correspondant à une énergie donnée, par la dimension h^3 d'un état microscopique à trois dimensions :

$$\frac{dq_x dq_y dq_z dp_x dp_y dp_z}{h^3} \equiv \frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3}$$

compte tenu de la symétrie sphérique dans l'espace des quantités de mouvement. Comme la quantité de mouvement d'un photon est $p = \frac{h\nu}{c}$, il vient

$$\frac{V 4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{V 4\pi \nu^2 d\nu}{c^3}$$

En outre, pour chaque fréquence ν , l'état de polarisation est la superposition de deux états indépendants ; il en résulte que le nombre d'oscillateurs, dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$, est

$$2 \times \frac{V 4\pi\nu^2 d\nu}{c^3} = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$$

On en déduit l'énergie interne dU de la bande de fréquence $d\nu$

$$dU = V \frac{8\pi\nu^2 c^3}{\exp(\beta h\nu) - 1} \frac{h\nu}{c^3} d\nu$$

et l'énergie interne volumique spectrale,

$$\varpi_\nu = \frac{1}{V} \frac{dU}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{1}{\exp(\beta h\nu) - 1}$$

On retrouve ici la distribution statistique de Bose-Einstein dans laquelle le potentiel chimique μ est nul.

2.1.2 Approximation de Rayleigh-Jeans

L'approximation de J. Rayleigh et J. Jeans donne l'énergie interne volumique spectrale dans la cas des faibles fréquences. On l'obtient à partir de la formule précédente, en faisant $h\nu \ll k_B T$, soit $\beta h\nu \ll 1$:

$$\varpi_\nu \simeq \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\beta h\nu} = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2$$

Notons que dans cette expression la constante de Planck a disparu.

2.1.3 Approximation de Wien

L'approximation de Wien est au contraire relative aux très hautes fréquences, telles que $h\nu \gg k_B T$ ou $\beta h\nu \gg 1$:

$$\varpi_\nu \simeq \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \exp(-\beta h\nu)$$

Cette décroissance exponentielle a été trouvée expérimentalement par Wien.

2.2 Représentations spectrales du rayonnement de corps noir

2.2.1 En fonction de la fréquence

Si l'on représente graphiquement l'énergie interne volumique spectrale en fonction de la fréquence, on obtient les courbes suivantes. Notons que pour $\nu \simeq 0$, ϖ_ν est presque nulle puisque le dénominateur vaut $\beta h\nu$ alors que le numérateur comporte ν^3 .

Ces courbes passent par un maximum que l'on détermine en annulant la dérivée¹ :

$$\frac{d\varpi_\nu}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^2 \frac{3(\exp(\beta h\nu) - 1) - \beta h\nu}{(\exp(\beta h\nu) - 1)^2} = 0$$

¹En admettant ici que cet extrémum est effectivement un maximum, ce qui se montre sans peine à l'aide d'une seconde dérivation.

d'où

$$3(1 - \exp(-\beta h\nu)) = \beta h\nu$$

ce que l'on résout numériquement en posant $x \doteq \beta h\nu$. On obtient la valeur $x = 2,82144$. Par conséquent, la fréquence pour laquelle ϖ_ν est maximale est donnée par

$$\nu_m = \frac{2,82144}{\beta h} = 5,879.10^{10} \times T$$

Par exemple, pour $T = 5600 \text{ K}$ (température de la surface de notre Soleil), le maximum de $\varpi_p(\nu)$ - relatif à un corps noir - se produit pour un rayonnement de fréquence $\nu_m = 3,29.10^{14} \text{ Hz}$, d'où la longueur d'onde correspondante $\lambda_m = c/\nu_m = 0,91 \text{ }\mu\text{m}$ (domaine de l'infrarouge). On a mesuré que notre étoile émettait effectivement une énergie maximale dans ce domaine de longueur d'onde.

2.2.2 En fonction de la longueur d'onde

Il est souvent plus commode d'exprimer le rayonnement spectral du corps noir en fonction non pas de la fréquence ν , mais de la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$. Les deux représentations sont reliées par l'équation²

$$\varpi_\nu d\nu = -\varpi_\lambda d\lambda$$

ce qui conduit à

$$\varpi_\lambda = \varpi_\nu \frac{c}{\lambda^2}$$

soit

$$\varpi_\lambda = \frac{8\pi c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{\beta h c}{\lambda}\right) - 1}$$

On écrit généralement cette grandeur sous la forme

$$\varpi_\lambda = \frac{4 C_1}{c \lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

en introduisant les deux constantes de rayonnement $C_1 = 2\pi h c^2 = 374,1832.10^{-18} \text{ W.m}^2$ et $C_2 = hc/k_B = 14,38786.10^{-3} \text{ m.K}$.

Pour les grandes longueurs d'onde, on trouve le résultat de Rayleigh-Jeans en $1/\lambda^4$

$$\varpi_\lambda \simeq \frac{4C_1}{c \lambda^5} \frac{1}{\frac{C_2}{\lambda T}} = \frac{4C_1}{c C_2} \frac{T}{\lambda^4}$$

Pour les faibles longueurs d'onde, ϖ_λ se réduit à

$$\varpi_\lambda = \frac{4C_1}{c \lambda^5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right)$$

Notons enfin que la longueur d'onde λ_m du maximum de densité énergétique n'est pas égale à c/ν_m puisque les deux fonctions ϖ_ν et ϖ_λ sont différentes.

²Obtenue par simple changement de variable.

2.3 Interprétation de la loi de déplacement de Wien

Les grandeurs ϖ_ν et ϖ_λ se mettent sous la forme de produits de deux fonctions. Pour la première,

$$\varpi_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} T^3 \frac{\left(\frac{\nu}{T}\right)^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \doteq T^3 f_\nu\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

Pour la seconde,

$$\varpi_\lambda = T^5 \frac{8\pi hc}{(\lambda T)^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \doteq T^5 f_\lambda(\lambda T)$$

Les fonctions ϖ_ν et ϖ_λ sont toutes deux des fonctions non négatives qui passent par un maximum. La détermination du maximum de ϖ_λ se fait classiquement en annulant sa dérivée par rapport à λ et en utilisant une méthode graphique ou numérique. On obtient

$$x_m = \frac{hc}{\lambda_m k_B T} = 4,9651$$

soit

$$\lambda_m T = \frac{hc}{4,9651 k_B} = 2898 \mu m.K$$

Ce résultat est en excellent accord avec la valeur expérimentale.

Pour $T = 5600 K$, le maximum de ϖ_λ correspond à un rayonnement de longueur d'onde $0,52 \mu m$; cette valeur, relative au corps noir, est en accord avec la couleur apparente du Soleil (jaune).

2.4 Interprétation de la loi de Stefan-Boltzmann

Calculons l'énergie interne volumique totale ω en sommant sur toutes les fréquences :

$$\omega = \int_0^\infty \omega_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu$$

soit, en posant $x = h\nu/(k_B T)$,

$$\omega = \frac{8\pi(k_B T)^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp x - 1} dx$$

Comme cette intégrale vaut $\pi^4/15$, il vient

$$\omega = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^3} T^4$$

Ainsi, l'énergie interne volumique totale ω dans la cavité est proportionnelle à la puissance quatrième de la température absolue

$$\omega = \sigma_B T^4$$

avec

$$\sigma_B = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^3} = 0,756464.10^{-15} J.m^{-1}.K^{-4}$$

la constante de Stefan-Boltzmann relative à l'énergie interne volumique.

Par exemple, pour $T = 2,72$ K (température associée au rayonnement cosmologique fossile), on obtient $\omega \simeq 0,25$ eV.cm⁻³.

Cette formule est souvent énoncée autrement, à l'aide de l'existance. L'énergie qui est émise par la surface élémentaire dS, pendant la durée dt, dans l'angle solide $d\Omega$, centré sur la direction faisant l'angle θ avec la normale, est la fraction $d\Omega/4\pi$ de celle qui est contenue dans le cylindre construit à partir de l'élément de surface dS et de hauteur $c \cos \theta dt$.

En intégrant sur l'angle solide, on obtient

$$d\nu dS c dt \int_{\Omega} \varpi_{\nu} \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} = c \varpi_{\nu} d\nu dS dt \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi$$

soit

$$\frac{c \varpi_{\nu}}{4} d\nu dS dt$$

Par ailleurs, par définition de l'existance spectrale M_{ν} , cette même énergie s'écrit $M_{\nu} d\nu dS dt$ et, en identifiant, il vient

$$M_{\nu} = \frac{c \varpi_{\nu}}{4}$$

En intégrant sur toutes les fréquences, on obtient

$$M = \frac{c \omega}{4} = \frac{\sigma_B c}{4} T^4 = \sigma T^4$$

avec

$$\sigma = \frac{\sigma_B c}{4} = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^2} = 5,671.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$$

Ici aussi, la valeur calculée coïncide de façon remarquable avec la valeur expérimentale.