RELATIVITÉ RESTREINTE

1 - Postulat. Evénements.

On postule et ce postulat réflète les observations expérimentales, que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels galiléens. On la note c.

On appelle *événement* la donnée d'un instant t et d'un point M de coordonnées x, y et z.

Si un flash lumineux passe à l'instant t_A au point $M_A(x_A, y_A, z_A)$ et à l'instant t_B au point $M_B(x_B, y_B, z_B)$, on a bien sûr $\|\overrightarrow{M_A M_B}\| = \mathrm{c}\,(t_B - t_A)$ d'où :

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_a)^2 - \mathrm{c}^2\,(t_B - t_A)^2 = 0$$

qu'on peut réécrire :

$$(\imath\,\mathrm{c}\,t_B - \imath\,\mathrm{c}\,t_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = 0$$

Formellement, on reconnaît le carré d'une distance. On parlera de *quadrivecteurs* $\overrightarrow{x_A}$ (resp. $\overrightarrow{x_B}$) de composantes $(x_{0A}, x_{1A}, x_{2A}, x_{3A})$ (resp.$(x_{0B}, x_{1B}, x_{2B}, x_{3B})$) et de pseudo-distance $d(\overrightarrow{x_A}, \overrightarrow{x_B})$ telle que :

$$d(\overrightarrow{x_A}, \overrightarrow{x_B})^2 = (x_{0B} - x_{0A})^2 + (x_{1B} - x_{1A})^2 + (x_{2B} - x_{2A})^2 + (x_{3B} - x_{3A})^2$$

avec la correspondance : $\quad x_0 = \imath\,\mathrm{c}\,t \qquad x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z$

Attention, il ne s'agit pas d'une distance car $d(\overrightarrow{x_A}, \overrightarrow{x_B}) = 0$ ne veut pas dire $\overrightarrow{x_A} = \overrightarrow{x_B}$ mais que quelque chose s'est propagé du point M_A au point M_B entre t_A et t_B à la vitesse de la lumière.

2 - Matrice de Lorentz.

Considérons deux référentiels galiléens, le second se déplaçant à la vitesse constante $\overrightarrow{V}$ par rapport au premier. On choisira les axes Ox du premier référentiel et $O'x'$ du second confondus etparallèles à $\overrightarrow{V}$, Oy et Oy' parallèles entre eux, de même pour Oz et Oz'. On choisit comme origines des temps dans les deux référentiels l'instant où O et O' sont confondus. La distance OO' est donc $V\,t$.

En mécanique classique, le temps est universel ($t = t'$, soit $x_0 = x'_0$)) et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ entraîne par projection :

$$x_0 = x'_0 \qquad x_1 = x'_1 + V\,t' = x'_1 - \imath\,\frac{V}{\mathrm{c}}\,x'_0 \qquad x_2 = x'_2 \qquad x_3 = x'_3$$

Mais on sait bien que la loi classique de composition des vitesses est incompatible avec l'invariance de c. Celle-ci impose que si $d(\overrightarrow{x_A}, \overrightarrow{x_B}) = 0$ dans le premier référentiel, ça reste vrai dans le second, d'où l'idée de chercher une matrice de passage qui conserve la pseudo-distance, l'idée la plus simple étant une matrice rotation portant sur x_0 et x_1 pour coller au plus près aux formules classiques.

On cherche donc :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Exprimons que le point O' ($x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$) quel que soit t' ou x'_0 a pour coordonnées dans le premier référentiel $x_1 = OO' = V\,t = -\imath\,\dfrac{V}{\mathrm{c}}\,x_0$, $x_2 = x_3 = 0$.

La matrice de passage donne :

$$x_0 = \cos\alpha\,x'_0 \quad \text{et} \quad x_1 = -\sin\alpha\,x'_0$$

on reporte dans $x_1 = -\imath\,\dfrac{V}{\mathrm{c}}\,x_0$ d'où, après simplification par $-x'_0$:

$$\sin\alpha = \imath\,\frac{V}{\mathrm{c}}\,\cos\alpha \quad \text{d'où} \quad \tan\alpha = \imath\,\frac{V}{\mathrm{c}}$$

On ne s'étonne pas d'avoir $\tan\alpha$ imaginaire, vu la construction de l'espace de travail ($\imath\,\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$). On calcule $\cos\alpha$ par :

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 - \frac{V^2}{\mathrm{c}^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-(V/\mathrm{c})^2}}$$

et :

$$\sin\alpha = \cos\alpha\cdot\tan\alpha = \frac{\imath\,V/\mathrm{c}}{\sqrt{1-(V/\mathrm{c})^2}}$$

La matrice de passage est donc :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(V/\mathrm{c})^2}} & \frac{\imath\,V/\mathrm{c}}{\sqrt{1-(V/\mathrm{c})^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\imath\,V/\mathrm{c}}{\sqrt{1-(V/\mathrm{c})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(V/\mathrm{c})^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

On allégera l'écriture en remplaçant la vitesse V par le nombre sans dimension $\beta = V/\mathrm{c}$ et on ne fera plus référence à $x_2 = x'_2 = y = y'$ ni à $x_3 = x'_3 = z = z'$. D'où :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\imath\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\frac{\imath\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$$

soit, en revenant aux notations réelles (calculs de routine) :

$$\begin{cases} t = \dfrac{t' + V\,x'/\mathrm{c}^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] x = \dfrac{x' + V\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \text{(système 1)}$$

Pour la matrice inverse, pas besoin de calcul car on sait que l'inverse d'une matrice rotation est sa transposée, d'où :

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\frac{\imath\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\imath\,\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

soit, en revenant aux notations réelles (calculs de routine) :

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - V\,x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x' = \dfrac{x - V\,t}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \text{(système 2)}$$

3 - Contraction des longueurs.

Soit une tige de longueur L_0, mesurée dans un référentiel lié à la tige, et appelée *longueur propre*, se déplaçant parallèlement à elle même à la vitesse V par rapport au référentiel du laboratoire. Quelle est sa longueur dans ce référentiel ?

Avec un bon choix des axes, dans le référentiel mobile où la tige est immobile, ses extrémités A et B ont pour coordonnées, quel que soit t' :

$$x'_A = 0 \qquad y'_A = 0 \qquad z'_A = 0$$

$$x'_B = L_0 \qquad y'_B = 0 \qquad z'_B = 0$$

Mesurer la longueur de la tige dans le référentiel du laboratoire revient à faire la différence $L = x_B - x_A$ des abscisses de B et A, *mesurées au même instant* t_{AB}.

Le système 2 donne :

$$L_0 = \frac{x_B - V\,t_{AB}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$0 = \frac{x_A - V\,t_{AB}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

d'où par différence :

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{soit} \quad L = L_0\,\sqrt{1-\beta^2} < L_0$$

La règle s'est donc raccoucie. Pour un objet en trois dimensions, il n'y a pas de changement selon Oy et Oz (cf transformation de Lorentz) ; la contraction ne porte que sur la dimension selon Ox.

4 - Dilatation du temps.

Soit une horloge, se déplaçant à la vitesse V par rapport au référentiel du laboratoire, et émettant deux signaux espacés d'un intervalle de temps T_0 *dans son référentiel* et appelé *temps propre*. Quel intervalle T sépare ces deux signaux dans le référentiel du laboratoire ?

Avec un bon choix des axes, l'horloge est au point O' de coordonnées $x' = y' = z' = 0$ dans le référentiel mobile et les signaux y sont émis aux temps $t'_1 = 0$ et $t'_2 = T_0$.

Le système 1 donne :

$$t_2 = \frac{t'_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_1 = \frac{t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

d'où, puisque $T = t_2 - t_1$:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > T_0$$