UNE THÉORIE DE LA MUSIQUE

I La gamme pythagoricienne.

1 Octave et quinte juste.

La gamme pythagoricienne se fonde sur les harmoniques 2 et 3. En effet si l'on entend simultanément trois sons dont deux ont une fréquence double et triple du troisième, c'est agréable à l'oreille car ce mélange est spontanément émis par une corde vibrante et on est donc habitué à l'entendre.

On convient de donner le même nom au fondamental et à l'harmonique 2 quitte à préciser en mettant un indice. Si , par exemple, un do_1 a une fréquence de 100 Hertz[1] (100 vibrations par seconde), son harmonique 2, de fréquence 200 Hz (200 Hertz), sera baptisé do_2.

Le son de fréquence 400 Hz peut être considéré comme l'harmonique 4 de do_1, mais aussi comme l'harmonique 2 de do_2, on l'appelera donc do_3. Bien sûr, ceci résulte de la propriété que $2 \times 2 = 4$.

Le son de fréquence 300 Hz, harmonique 3 du do_1, est baptisé *sol*. Comme il se situe entre do_2 et do_3, on le baptise sol_2. Et, puisque $6 = 2 \times 3$, le lecteur comprendra aisément que le son de fréquence 600 Hz sera le sol_3. Mais, à rebrousse-poil, le son de fréquence 150 Hz (dont l'harmonique 2, de fréquence 300 Hz, est le sol_2) sera tout naturellement appelé sol_1.

En musique, on appelle intervalle le rapport de deux fréquences. Le rapport entre harmonique 2 et fondamental (ce rapport vaut 2) est appelé **octave**.

Nous venons aussi de voir un intervalle de rapport 3/2 entre les harmoniques 2 et 3 d'une même note (entre do_2 et sol_2, harmoniques de do_1, mais aussi entre do_1 et sol_1, harmoniques, on l'aura deviné, de do_0[2] de fréquence 50 Hz). Cet intervalle est appelé **quinte juste**.

Historiquement, bien qu'il ne connût pas la notion de fréquence, faute de moyen de la mesurer, ces rapports étaient connus de Pythagore (dont on connaît l'amour pour les nombres) comme rapport de longueurs de corde. En effet à masse linéïque et à tension égales, une corde deux fois plus courte sonne à l'octave et une corde une fois et demie plus courte, à la quinte.

2 Gamme par quintes.

Pythagore a construit une gamme à partir de sept (nombre ésotérique s'il en est) sons distants l'un de l'autre d'une quinte, nommés dans l'ordre fa, *do*, *sol*, *ré*, *la*, *mi* et *si*, puis tous les sons distants de ceux-là d'octaves successives ascendantes ou descendantes. Figurent ci-dessous trois diagrammes où sont placés sur le premier les sept sons, sur le deuxième les mêmes et quelques-unes de leurs octaves,

[1] En fait la fréquence du do_1 est 65,2 Hz, c'est pour une lecture plus aisée que la vérité est ici trahie.

[2] On a, en fait, mal deviné : les musiciens semblent ne pas connaître le zéro, une octave sous le do_1, on trouve, non pas le do_0 mais le do_{-1} !

supérieures ou inférieures, enfin sur le dernier ne figurent que les sons entre deux *do*[3] successifs. On y a indiqué les fréquences en prenant comme unité la fréquence du *do*[4].

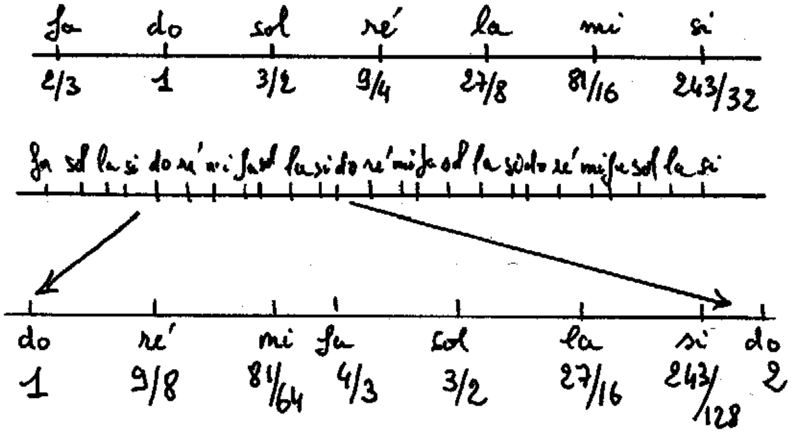


FIG. 1 – Gamme de Pythagore.

3 Remarques.

Historiquement, à la Renaissance, des tentatives[5] ont été faites pour donner un rôle prépondérant à l'harmonique 5 et à l'intervalle 5/4 (entre harmonique 4 et harmonique 5) appelé **tierce majeure**. Dans la pratique $81/64 = 1,27$ et $5/4 = 1,25$ sont suffisamment proches pour que l'on puisse confondre le *mi* de Pythagore et l'harmonique 5.

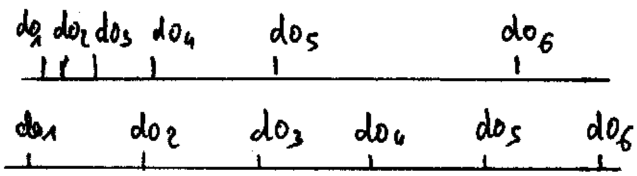


FIG. 2 – Exemples d'échelles.

Les diagrammes ci-dessus ont été tracés en échelle logarithmique où des intervalles (rapports de fréquences) égaux sont représentés par des segments égaux. Suivent deux diagrammes où figurent plusieurs *do* successifs : le premier en échelle proportionnelle aux fréquences et le second en échelle logarithmique ; le lecteur comprendra aisément les motivations du choix de la seconde échelle.

[3] Le choix de *do*, plutôt qu'une autre note relève d'un arbitraire qui sera justifié dans un chapitre ultérieur portant sur la modalité.

[4] Même remarque.

[5] Voir à ce sujet le chapitre sur le tempérament.

II Intervalles

1 Tons et demi-tons

On rappelle qu'en prenant comme unité la fréquence de *do*, les notes successives de la gamme ont pour fréquences : 9/8, 81/64, 4/3, 3/2, 27/16, 243/128 et 2. Lorsque l'on calcule l'intervalle, c'est-à-dire le rapport des fréquences entre notes successives, on ne trouve que deux résultats[6] possibles :

$$\frac{9}{8} = \frac{9/8}{1} = \frac{81/64}{9/8} = \frac{3/2}{4/3} = \frac{27/16}{3/2} = \frac{243/128}{27/16}$$

$$\frac{256}{243} = \frac{4/3}{81/64} = \frac{2}{243/128}$$

L'intervalle 9/8 est appelé ton et l'intervalle 256/243 demi[7]-ton diatonique[8].

Par la suite, on utilisera une terminologie additive en disant, par exemple qu'entre fa et *sol* il y a deux tons, alors qu'en fait, on *multiplie* deux intervalles 9/8.

2 Un bestiaire d'intervalles

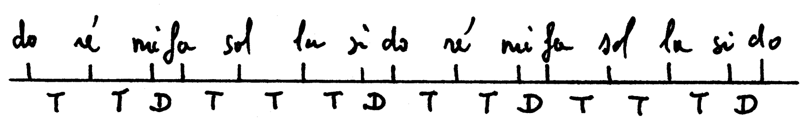


Fig. 3 – Tons et demi-tons.

Dessinons (figure 3, p. 3) le diagramme de deux gammes successives où un ton sera représenté par un segment de longueur double de celui d'un demi-ton.

- On appelle intervalle de seconde, l'intervalle entre deux notes successives. Il y en a de deux types[9] : intervalle d'un ton (on notera T), appelé seconde majeure et intervalle d'un demi-ton diatonique (on note D) appelé seconde mineure.
- On appelle tierce, l'intervalle entre deux notes séparées par une autre comme *do*-*mi*. Là aussi, il y en a de deux types : 2T=tierce majeure et T+D=tierce mineure
- Intervalles de quarte (par exemple *do*-fa). Tous ont 2T+D sauf fa-*si* qui a 3T, longtemps perçu comme particulièrement dissonant au point d'être appelé « diabolus in musica » d'où la terminologie particulière par rapport à la distinction précédente mineure/majeure. La quarte 2T+D est dite juste et la quarte 3T est dite augmentée.

[6] Les calculs sont faciles, car $3, 9, 27, 81, 243$ c'est $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$ et $2, 4, \cdots, 256$ c'est $2, 2^2, \cdots, 2^8$.

[7] Rigoureusement, une note située à un demi-ton entre *do* de fréquence 1 et *ré* de fréquence 9/8 devrait avoir une fréquence X telle que l'intervalle entre 1 et X, soit X, et celui entre X et 9/8, soit 9/8X, soient égaux ; on devrait donc avoir X=$\sqrt{9/8}$=1,061. En fait 256/243=1,053, c'est suffisamment voisin pour justifier la dénomination. Après tout, une demi-baguette de pain n'est jamais rigoureusement la moitié d'une baguette.

[8] On apprendra, dans un chapitre ultérieur, l'existence d'un demi-ton chromatique.

[9] Le diagramme qui précède est là pour que le lecteur puisse vérifier par lui-même cette assertion et celles qui suivent.

– Intervalles de quinte[10] : tous ont 3T+D (juste) sauf *si*-fa 2T+2D (diminuée).
– Intervalles de sixte : 3T+2D=mineure et 4T+D=majeure.
– Intervalles de septième : 4T+2D=mineure et 5T+D=majeure.
– Intervalle d'octave : on ne trouve que 5T+2D (donc pas de qualificatif qui serait parfaitement inutile).

3 Retournement d'intervalles

Soit un intervalle quelconque (disons, pour fixer les idées, do_1-fa_1), remplaçons la note inférieure par son octave ($do_1 \to do_2$), on obtient un nouvel intervalle (fa_1-do_2) appelé retournement du premier. On se convaincra aisément que la somme d'un intervalle et de son retournement vaut une octave.

En menant une étude systématique, on verra que :
– seconde ↔ septième
– tierce ↔ sixte
– quarte ↔ quinte
– majeure ↔ mineure
– juste ↔ juste
– augmentée ↔ diminuée[11]

Dans ce tableau A ↔ B signifie que le retournement de A est B, et *vice versa*.

III Modes et modalité

Avec comme unique capital les sept notes de la gamme de Pythagore, on peut varier l'atmosphère musicale d'une composition en privilégiant certaines notes ; pour cela, il suffit de les utiliser en début ou en fin de phrase musicale, en accord lors des « ponctuations », etc. En pratique, on privilégie trois notes : la plus grave, appelée tonique, la plus aiguë, une quinte plus haut, appelée dominante et, dans une moindre mesure, la médiante, une tierce au dessus de la tonique et une tierce en dessous de la dominante. Ensemble, elles constituent l'accord parfait.

Il y a sept choix possibles pour la tonique, donc sept *modes*. Au Moyen-Âge, on les utilisait tous et ils étaient affublés de qualificatifs d'origine grecque. En musique classique, on n'utilise plus que deux modes : le mode majeur (ou ionien) dont la tonique est *do* et le mode mineur (ou éolien) dont la tonique est *la* ; on dit respectivement qu'on est en gamme de *do* majeur ou de *la* mineur[12]. On dit aussi que *la* mineur est la gamme relative mineure de *do* majeur. La musique de jazz utilise volontiers le mode mixolydien de tonique *sol*.

Le diagramme ci-dessous indique, afin de les comparer, l'enchaînement des notes dans ces trois modes :

Le mode mixolydien ne diffère du mode majeur que par la septième à partir de la tonique, elle est majeure en mode majeur et mineure en mode jazz.

[10] A partir d'ici, le choix de la terminologie majeure/mineure ou juste/diminuée est justifié par la notion de retournement d'intervalle exposée dans le paragraphe suivant.

[11] La quarte augmentée est diabolique, son retournement, la quinte diminuée, l'est aussi.

[12] On suggère au lecteur de jouer sur un instrument *ad libitum* la succession de notes *do*, *ré*,$\cdots$,*si*, *do* et *do*, *si*,$\cdots$, *do* pour entendre le mode majeur, et de procéder de même pour les autres modes, ceux dont je parle et, pourquoi pas, les autres.

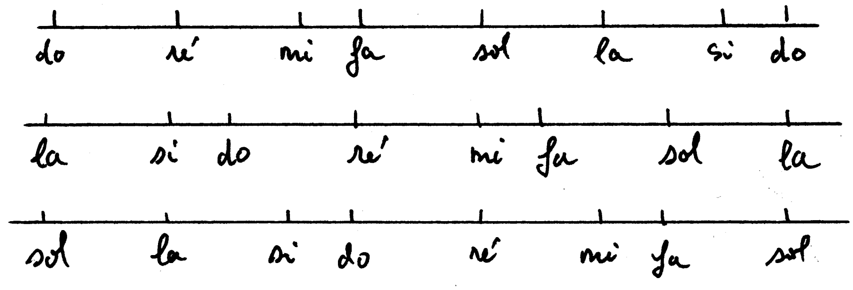


FIG. 4 – Modes majeur, mineur et «jazz».

Le mode mineur diffère du mode majeur par la tierce, la sixte et la septième à partir de la tonique qui y sont mineures au lieu de majeures. Néanmoins, la septième est souvent retransformée en majeure par la transformation du *sol* en *sol*$\sharp$[13], l'impression musicale est souvent meilleure, mais ceci n'est jamais systématique, il y a souvent cohabitation dans une même œuvre de *sol* et *sol*$\sharp$.

Le mode majeur donne plutôt des impressions joyeuses et le mode mineur des accents tristes. Est-ce question de physiologie ou de culture ?

IV Modulation et tonalité

1 Principe

Rappelons le diagramme initial de sept notes étagées de quinte en quinte, où l'on a indiqué respectivement d'un M et d'un m les toniques des seuls modes majeur et mineur conservés en musique classique :

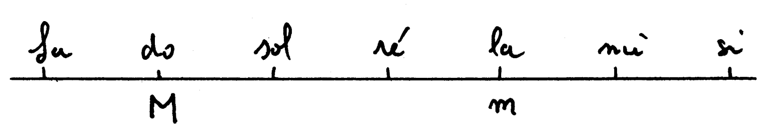


FIG. 5 – Do majeur et la mineur.

Cela dit, le point de départ de cette construction est parfaitement arbitraire et l'on aurait pu débuter au *do* au lieu du fa, obtenant ainsi le nouveau diagramme suivant, où le M et le m, décalés en conséquence, prouvent, à la simple lecture, que l'on a construit une gamme de *sol* majeur ou de *mi* mineur :

Le nouveau son, noté « ?» sur le diagramme, apparu en même temps que disparaissait le fa est appelé $fa\sharp$ (lire fa dièse). Sa fréquence, en penant celle de *do* pour unité, est $(3/2)^6 = 729/64$

Si l'on trace un autre diagramme où les sons précédents, par le jeu d'octaves descendantes[14], sont ramenés entre deux *do* successifs, on s'aperçoit que l'intervalle entre *mi* et *sol*, partagé, dans cet ordre,

[13]Pour les ignorants, le dièse ($\sharp$) sera défini dans le prochain chapitre sur la modulation.
[14]En particulier $fa\sharp$ est descendu de trois octaves et sa fréquence divisée par $2^3 = 8$.

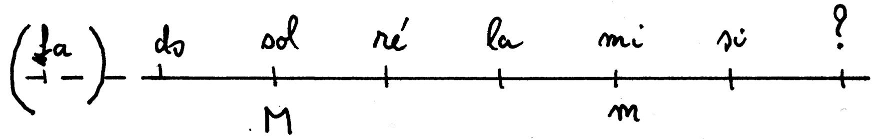
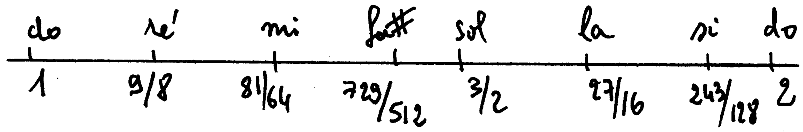


FIG. 6 – Sol majeur et mi mineur.

en demi-ton (*mi*-fa) et ton (fa-*sol*) dans la gamme de *do* majeur (ou *la* mineur), se trouve désormais partagé en ton (*mi*-$fa\sharp$) et demi-ton[15] ($fa\sharp$-*sol*) :



Si, dans un morceau en gamme de *do*, on remplace systématiquement fa par *do*, *do* par *sol*,$\cdots$,*si* par $fa\sharp$, on *transpose* le morceau a la quinte. Cela dit, l'air est le même, mais joué plus aigu, pour l'adapter, par exemple, d'une voix masculine à une voix féminine. En ce sens, la gamme de *do* et celle de *sol* sont parfaitement équivalentes et le choix de l'une plutôt que l'autre dépend surtout du chanteur ou de l'instrument utilisé.

Par contre, si brusquement, en plein milieu d'un morceau, on cesse d'employer la note fa et que l'on commence à employer $fa\sharp$, passant ainsi de *do* majeur à *sol* majeur (ou de *la* mineur à *mi* mineur), l'oreille, dérangée de sa routine y est terriblement sensible et est déstabilisée, on a réalisé une *modulation.* L'oreille finira par s'y habituer et on pourra la perturber à nouveau par la modulation inverse, en revenant à la gamme de *do* : on annule le dièse par un bécarre ($\natural$), le fa redevenant *naturel.* C'est donc l'apparition *accidentelle* d'un $fa\sharp$ ou d'un $fa\natural$ qui signale la modulation dans un sens ou dans l'autre.

2 Généralisation

On peut, à partir de la gamme de *sol*, décaler d'un nouveau cran vers la droite du diagramme (voir ci-dessous) en remplaçant le *do* qui disparaît par le *do*$\sharp$ qui apparaît, créant ainsi la gamme de *ré* majeur ou de *si* mineur.

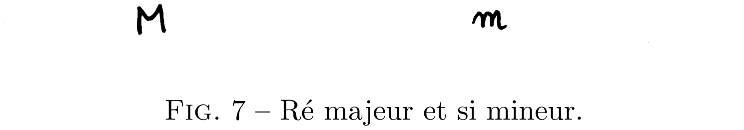


FIG. 7 – Ré majeur et si mineur.

Et ainsi de suite, d'où la superposition ci-dessous de tous les diagrammes obtenus :

[15]Le lecteur courageux est invité à le vérifier par le calcul des intervalles en question à partir des fréquences indiquées sur le diagramme.

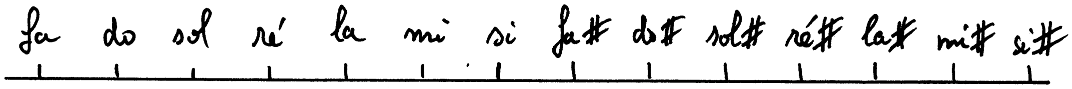


FIG. 8 – Échelle des dièses.

Résumons les gammes[16] obtenues :
– sans dièse : *do* majeur ou *la* mineur,
– avec un dièse : *sol* majeur ou *mi* mineur,
– avec 2 dièses : *ré* majeur ou *si* mineur,
– avec 3 dièses : *la* majeur ou *fa*♯ mineur,
– avec 4 dièses : *mi* majeur ou *do*♯ mineur,
– avec 5 dièses : *si* majeur ou *sol*♯ mineur,
– avec 6 dièses : *fa*♯ majeur ou *ré*♯ mineur,
– avec 7 dièses : *do*♯ majeur ou *la*♯ mineur.
On pourrait continuer encore en introduisant des doubles dièses (ça ressemble[17] à **x**), c'est tout à fait exceptionnel.

Mais on aurait pu tout aussi bien effectuer les décalages successifs vers la gauche et non vers la droite, obtenant ainsi, la première fois, le diagramme suivant :

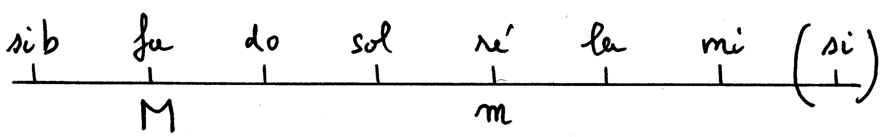


FIG. 9 – Fa majeur et ré mineur.

Les gammes obtenues sont celles de *fa* majeur ou *ré* mineur, le *si* qui disparaît à droite est remplacé à gauche par une nouvelle note appelée *si*♭ (lire *si* bémol), là encore l'intervalle *la-do* que *si* partageait, dans cet ordre, en ton (*la-si*) et demi-ton (*si-do*) est maintenant partagé par *si*♭ en demi-ton et ton. Enfin c'est l'apparition de *si*♭ qui marque la modulation en *fa* majeur ou *ré* mineur et l'apparition de *si*♮ le retour à *do* majeur ou *la* mineur.

Les décalages successifs vers la gauche conduisent au diagramme global et au tableau[18] qui suivent :

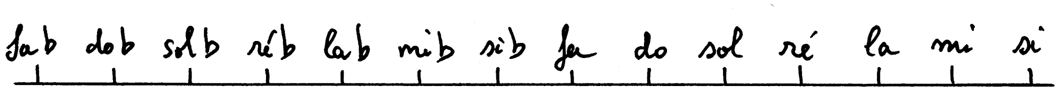


FIG. 10 – Échelle des bémols.

– avec un bémol : *fa* majeur ou *ré* mineur,

[16]Bien sûr, le lecteur est invité à le vérifier, pour voir s'il a bien compris le mécanisme de la chose.
[17]Désolé, c'est trop compliqué de se procurer le bon caractère typographique pour cet unique usage !
[18]Même remarque que pour l'échelle des dièses.

– avec 2 bémols : *si*$\flat$ majeur ou *sol* mineur,
– avec 3 bémols : *mi*$\flat$ majeur ou *do* mineur,
– avec 4 bémols : *la*$\flat$ majeur ou fa mineur,
– avec 5 bémols : *ré*$\flat$ majeur ou *si*$\flat$ mineur,
– avec 6 bémols : *sol*$\flat$ majeur ou *mi*$\flat$ mineur,
– avec 7 bémols : *do*$\flat$ majeur ou *la*$\flat$ mineur.

La suite avec des doubles bémols ($\flat\flat$) est, elle aussi, exceptionnelle.

On affirme souvent que les morceaux écrits dans des tonalités riches en dièses sont plutôt brillants et ceux composés dans les tonalités riches en bémols plutôt sombres. Cela n'a aucune base scientifique, mais les compositeurs l'ont cru et ont écrit avec des dièses ce qu'ils voulaient brillant et avec des bémols ce qu'ils voulaient sombre ; l'erreur scientifique est ainsi devenue vérité culturelle.

3 Demi-ton chromatique

Grâce aux fréquences figurant sur les diagrammes précédents, calculons l'intervalle (rapport de fréquences) entre fa et $fa\sharp$ ou entre *si*$\flat$ et *si*. On trouve :

$$\frac{729/512}{4/3} = \frac{243/128}{16/9} = \frac{2187}{2048} = 1,067$$

Cette valeur est proche de $256/243 = 1,053$ (demi-ton diatonique) et de $\sqrt{9/8} = 1,061$ (voir note accompagnant la définition de ce demi-ton diatonique) ; on l'appelle demi-ton chromatique. On remarquera qu'un ton (par exemple entre fa et *sol*) est somme d'un demi-ton chromatique (entre fa et $fa\sharp$) et d'un demi ton diatonique (entre $fa\sharp$ et *sol*).

L'existence de modulations conduit à l'apparition de nouveaux intervalles dont l'énumération serait fastidieuse. Retenons quelques grands principes. La présence d'*altérations* (dièses ou bémols) ne change pas le nom de l'intervalle mais son qualificatif, par exemple on a toujours une seconde entre *do*$\sharp$ et *ré*$\flat$. Si l'intervalle est dans la liste précédente, pas de problème ; sinon, soit il est plus long qu'un intervalle majeur ou juste (par adjonction d'un demi-ton chromatique ou transformation d'un demi-ton diatonique en ton) et on le dit augmenté, soit il est plus court qu'un intervalle mineur ou juste (par les transformations inverses des précédentes) et on le qualifie de diminué. Pour s'aider dans le calcul, sachons qu'un demi-ton diatonique est toujours entre deux notes de noms différents (*do* et *ré*$\flat$, par exemple) et un demi-ton chromatique entre deux notes de même nom (*do* et *do*$\sharp$, par exemple).

Donnons deux exemples où T, D, C désignent un ton, un demi-ton diatonique et un demi-ton-chromatique.

do$\flat$-*mi* est une tierce (1=*do*, 2=*ré*, 3=*mi*) constituée de C (*do*$\flat$-*do*) + 2T (*do*-*mi*), c'est une tierce augmentée (= majeure à 2T à laquelle s'ajoute C).

do$\sharp$-*mi*$\flat$, tierce constituée de 2D est une tierce diminuée (= mineure à T+D où T$\rightarrow$ D).

V Enharmonie et tempérament

1 L'enharmonie

Comparons les fréquences de *do*$\sharp$ et de *ré*$\flat$ (unité de fréquence : *do*) : de *do* à *ré*$\flat$, un demi-ton diatonique soit $256/243 = 1,053$ et de *do* à *do*$\sharp$ un demi-ton chromatique soit $2187/2048 = 1,067$. C'est très proche, comme on l'a déjà laissé entendre ; l'intervalle entre ces deux notes est de :

$$\frac{2187/2048}{256/243} = \frac{531441}{524288} = 1,014$$

Cet intervalle est appelé *comma* pythagoricien et vaut à peu près un dixième[19] de ton.

Que le courageux lecteur qui m'a suivi jusqu'ici veuille bien relire les diagrammes qui ont introduit les dièses et bémols successifs. Sur ceux-ci, il y a douze quintes entre *ré*$\flat$ et *do*$\sharp$ (pauvre lecteur, tu devras faire seul la synthèse entre les deux diagrammes). On pourrait par le calcul des fréquences vérifier que ce *do*$\sharp$ se trouve sept octaves plus haut que le *ré*$\flat$ de départ et donc que douze quintes valent presque sept octaves. Il est plus aisé de le vérifier directement, à partir de la valeur du comma, car :

$$1 \approx \frac{531441}{524288} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7$$

Grace à ces mêmes tableaux, on trouvera le même comma entre les couples de notes suivants, notes qui seront donc très voisines :

fa$\flat \approx$ *mi*   *do*$\flat \approx$ *si*   *sol*$\flat \approx$ *fa*$\sharp$ *ré*$\flat \approx$ *do*$\sharp$

la$\flat \approx$ *sol*$\sharp$ *mi*$\flat \approx$ *ré*$\sharp$ *si*$\flat \approx$ *la*$\sharp$ *fa* $\approx$ *mi*$\sharp$ *do* $\approx$ *si*$\sharp$

Deux notes quasi-identiques sont appelées *enharmoniques* et on les confond dans les instruments à notes fixes, c'est à dire tous sauf la famille des violons,alto,. . . et les trombones à coulisse qui permettent de jouer toutes les fréquences imaginables par modification continue de leur longueur. Si l'on règle ainsi un piano :

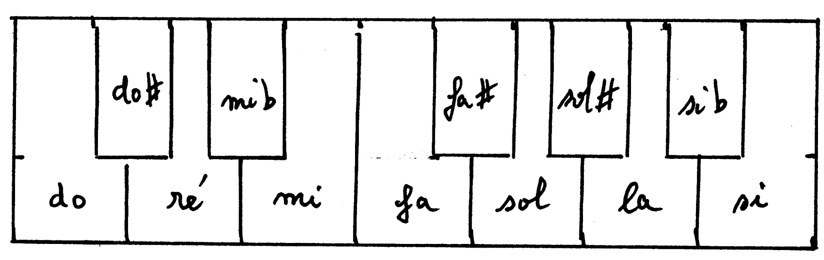


FIG. 11 – Une octave au piano.

on jouera *ré*$\flat$ sur la touche *do*$\sharp$ ou *mi*$\sharp$ sur la touche *fa*, mais ce sera faux d'un dizième de ton. Les seules gammes que l'on pourra jouer rigoureusement justes sont celles avec 1, 2 ou 3 dièses et 1 ou 2

[19]Car un ton vaut $9/8 = 1,125$ donc correspond à une augmentation de 12,5 %, un dixième de ton correspond donc approximativement à un augmentation de 1,25 % donc une multiplication par 1,0125 ; 1,014 est proche de cette valeur. Les matheux pourront passer par les logarithmes pour un calcul plus précis.

bémols, soit les gammes de *si♭*, *fa*, *do*, *sol*, *ré* et *la* majeurs et leur relatives mineures, ce qui limite le nombre de modulations possibles.

2 Les neuvièmes de ton

L'enharmonie résulte du fait que $3^{12}/2^{19} = 1,014$, on vient de le voir. La théorie qui suit, qui date de la fin du XVII^e^ siècle, repose sur une meilleure approximation[20] : $3^{53}/2^{84} = 1,002$, d'où :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{53} \approx 2^{31} \Rightarrow 53 \text{ quintes} \approx 31 \text{ octaves}$$

De savants calculs indiquent que c'est une erreur d'un peu moins de deux centièmes de ton pour trente et une octaves, soit un peu plus qu'un deux-millième de ton par octave[21].

Puisque 53 quintes valent 31 octaves et donc une quinte 31/53^e^ d'octave, l'idée consiste à dire que l'octave est formée de 53 intervalles élémentaires et que la quinte en vaut 31.

Pour construire la gamme par quintes de Pythagore entre do_1, pris comme origine à 0, et do_2, à 53 intervalles élémentaires, on avance à chaque quinte (ou l'on recule pour le *fa*) de 31 et chaque fois que l'on déborde, on recule (ou avance pour *fa*) de 53 (une octave). Le lecteur s'amusera à vérifier que l'on arrive à ce diagramme :

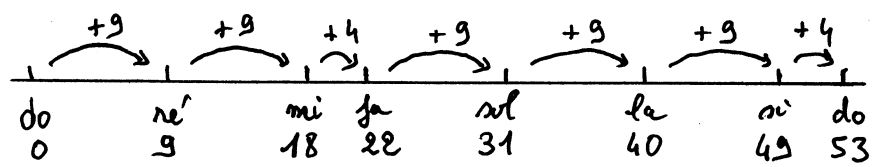


FIG. 12 – Gamme en neuvièmes de ton.

On y voit nettement qu'un ton vaut 9 intervalles élémentaires (qu'on appellera donc désormais neuvièmes de ton) et qu'un demi-ton diatonique vaut 4 neuvièmes de ton[22].

Si l'on poursuit la construction pour y ajouter les notes avec dièses et bémols, on arrive aisément au nouveau diagramme[23] de la figure 13, p. 11

On y voit que le demi-ton chromatique vaut 5 neuvièmes de ton et l'enharmonie un neuvième de ton.

Cette théorie s'appelle le tempérament par neuvièmes de ton, il y a eu aussi des essais de tempérament en septièmes ou en cinquièmes de ton. Il ne faut voir dans ces théories qu'une approximation numérique

[20] Pour les matheux qui auraient goûté au charme subtil des fractions continuées, le développement du rapport $\ln(3/2)/\ln(2)$, c'est-à-dire du rapport quinte/octave (converties en échelle logarithmique), donne, après les toutes premières fractions trop grossières : 7/12 (qui correspond au tempérament égal), 24/41 (tempérament au septième de ton, non développé ici, mais qui a été aussi historiquement proposé) et 31/53 (tempérament au neuvième de ton évoqué ici) ; au delà les fractions obtenues sont bien trop compliquées.

[21] Les matheux pourraient à partir d'un intervalle I, rapport de fréquences, et sachant qu'un ton est le rapport 9/8, calculer systématiquement le rapport $\ln(I)/\ln(9/8)$ qui convertit I en ton et fraction de ton. On rappelle qu'une multiplication de rapports de fréquences est décrite comme addition d'intervalles, ce qui impose le passage aux logarithmes.

[22] sic !

[23] Peu importe qu'il ne soit guère lisible ; il n'est là que pour se convaincre de la complexité obtenue.

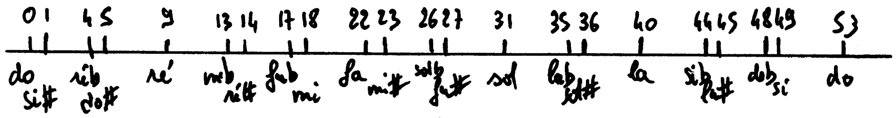


FIG. 13 – Même gamme, complète.

pratique, dans la mesure où elle simplifie[24] les calculs, mais qu'elles ne résolvent *en rien* les problèmes liés à l'enharmonie (difficulté à avoir des modulations justes).

3 La gamme par tierces et quintes

Mentionnons ici, sans trop approfondir, le travail de certains théoriciens qui reprochaient à la gamme de Pythagore de définir la tierce majeure comme 4 quintes moins 2 octaves donnant pour comme rapport de fréquences $81/64 = 1,266$ et non comme l'harmonique 5 ramené 2 octaves plus bas (comme la quinte est l'harmonique 3 descendu d'une octave) ce qui correspond à un intervalle de $5/4 = 1,25$; en ce sens la tierce pythagoritienne est fausse d'un dizième de ton par rapport à la tierce harmonique. Que le lecteur me fasse confiance, en échange de quoi je lui fais grâce des calculs.

Ils proposèrent la construction suivante : quatre quintes à $3/2$ à partir de fa et trois tierces à $5/4$ à partir des trois premières notes obtenues, soit trois accords parfaits successifs conformes à la théorie des harmoniques. Le premier diagramme ci-dessous donne la construction indiquée et les fréquences obtenues (unité : la fréquence du *do*) et le second, page suivante, ces mêmes notes ramenées par passage à l'octave inférieure ou supérieure entre deux *do* successifs.

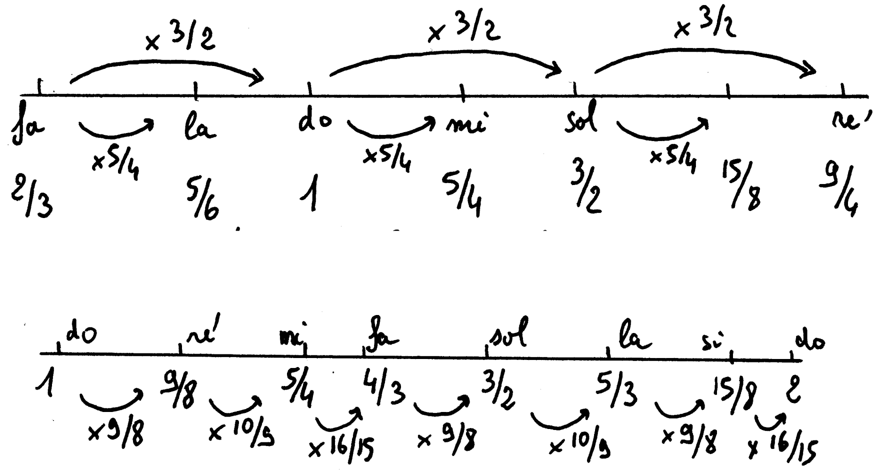


FIG. 14 – Gamme par quintes et tierces.

On remarque qu'il y a ici deux sortes de tons de rapports $9/8 = 1,125$ et $10/9 = 1,111$ et que le demi-ton diatonique est à $16/15 = 1,067$.

[24]Elle évite en fait l'usage des logarithmes.

Modulons en *sol* selon le principe évoqué plus haut et étudions le résultat sur les deux diagrammes ci-dessous (même principe) :

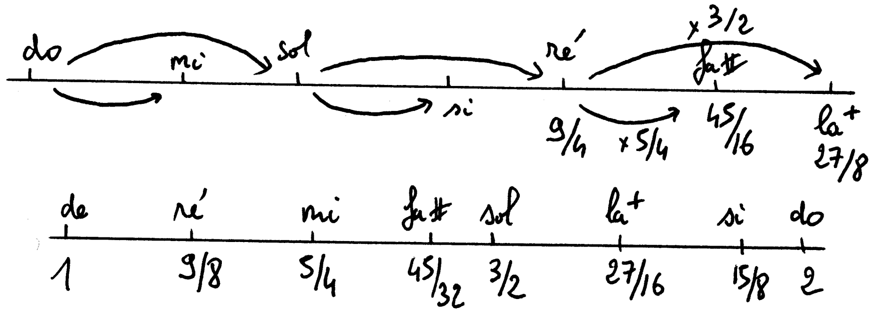


FIG. 15 – Modulation en sol.

Non seulement *fa* est remplacé par *fa*♯ (le demi-ton chromatique vaut ici $135/128 = 1,055$) mais *la* est remplacé par la^+ (lire « *la* haut »), l'intervalle *la*-la^+ vaut $81/80 = 1,012$ soit environ un dizième de ton, on l'appelle comma synthonique ou de Dydime. Inutile de dire que cette distinction entre *la* et la^+ ne fait que compliquer encore les choses et empêche toute modulation rigoureuse avec un instrument à notes fixes. La recherche d'une meilleure justesse théorique réduit à néant la possibilité de modulation. On ne peut s'empêcher de donner sans commentaire un agrandissement de la région *mi*♭-*ré*♯ :

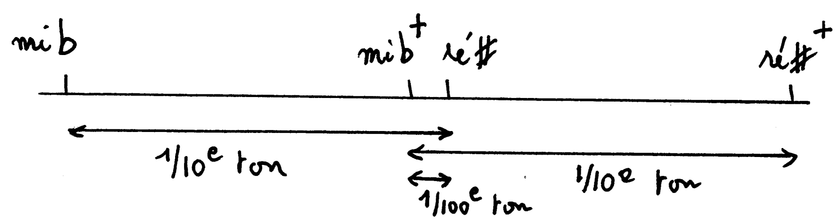


FIG. 16 – Du délire !

4 Le clavecin bien tempéré

Enfin J.S. BACH arriva, il comprit que l'essentiel n'était pas la justesse théorique des notes mais la possibilité de modulations aisées, pour cela il fallait pouvoir confondre les notes enharmoniques. Dès lors, la solution était simple : rejeter le privilège accordé à l'harmonique 3 (et *a fortiori* à l'harmonique 5) et diviser l'octave (5 tons + 2 demi-tons diationiques) en douze demi-tons (et donc six tons) rigoureusement égaux. Le demi-ton tempéré est donc de rapport $\sqrt[12]{2}$ et le ton tempéré $\sqrt[6]{2}$.

On arrive alors au diagramme suivant :

Certes la quinte tempérée est fausse, elle vaut $\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1,498$ et non $3/2 = 1,500$, mais cette infime différence est d'environ un centième de ton[25].

[25]Les matheux peuvent déduire de tout cela une échelle logarithmique commode ; à un rapport R de fréquence, on

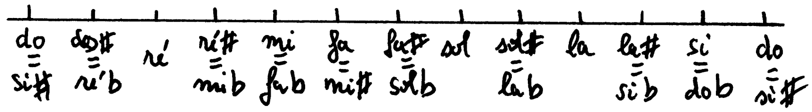


FIG. 17 – Le tempérament égal.

La tierce majeure tempérée vaut, par construction exactement $(\sqrt[6]{2})^2 = \sqrt[3]{2} = 1,260$ contre $81/64 = 1,266$ pour la tierce de Pythagore et $5/4 = 1,250$ pour la tierce harmonique, ce qui réalise un bon compromis entre les deux théories[26].

En conclusion, mis à part les violonistes (et encore les meilleurs) on joue exactement de la même façon[27], par exemple, *mi*$\flat$ et *ré*$\sharp$ mais, par tradition, on continue à appeler, même dans les ouvrages pour débutants, tierce mineure l'intervalle *do-mi*$\flat$ et seconde augmenté, l'intervalle *do-ré*$\sharp$, alors que ces intervalles sont rigoureusement identiques en gamme tempérée. On ne m'empêchera pas de penser que c'est une erreur pédagogique majeure (voire augmentée, si l'on m'autorise le clin d'œil).

VI Dodécaphonie et atonalité

Il ne s'agit, dans ce chapitre, que de donner quelques indications de base.

1 Gammes atonales

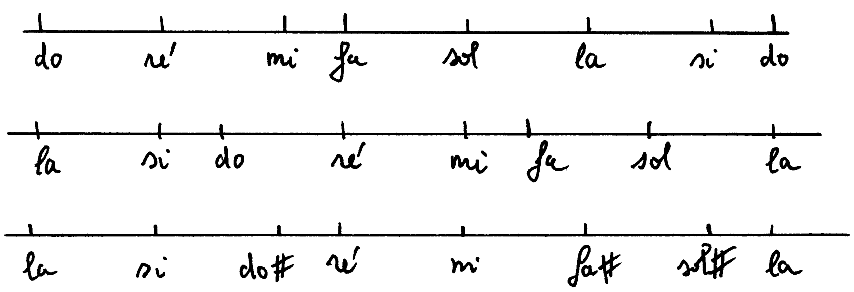


FIG. 18 – Gammes tonales.

Soit la gamme de *do* majeur (premier des trois diagrammes ci-dessus), on voit, et l'on a développé tout cela, qu'elle divise l'octave en intervalles inégaux. Si l'on énumère ces notes à partir de *la* sans

associe $\ln(R)/\ln(\sqrt[6]{2}) = 6\ \ln(R)/\ln(2)$ qui représente cet intervalle mesuré en tons tempérés, la quinte tempérée y vaut, bien sûr exactement 3, 5 tons et la quinte de Pythagore de rapport 3/2, 3,510 tons tempérés.

[26] On trouve, avec la définition de la note précédente, respectivement 2,000 2,039 et 1,932 tons tempérés pour ces trois tierces.

[27] Le lecteur aura, bien sûr remarqué aussi que le tempérament égal permet d'identifier la quarte augmentée et son retournement, la quinte diminuée, c'est-à-dire les deux «diaboli in musica».

changement (deuxième des diagrammes), on obtient la gamme de *la* mineur[28] qui divise d'une façon différente l'octave en intervalles inégaux. Si l'on veut retrouver à partir de *la* les mêmes intervalles qu'en gamme de *do* majeur, on doit construire la gamme de *la* majeur à trois dièses (dernier diagramme). Ce genre de musique est dite tonale.

Fin XIX^e^, début XX^e^, on a cherché une suite de notes «invariante» par décalage. Il suffit pour cela de découper l'octave en intervalles égaux. Les deux solutions les plus courantes sont la gamme par tons de DEBUSSY (6 tons) et la gamme dodécaphonique (12 demi-tons), c'est à dire que, dans une même mélodie, on utilise *indifféremment* ces 6 ou 12 sons. Ces constructions donnent de la musique dite *atonale*. Ci-dessous les diagrammes correspondants :

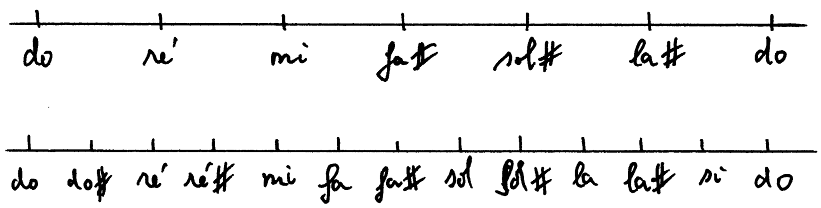


FIG. 19 – Gammes atonales.

2 Accords atonaux

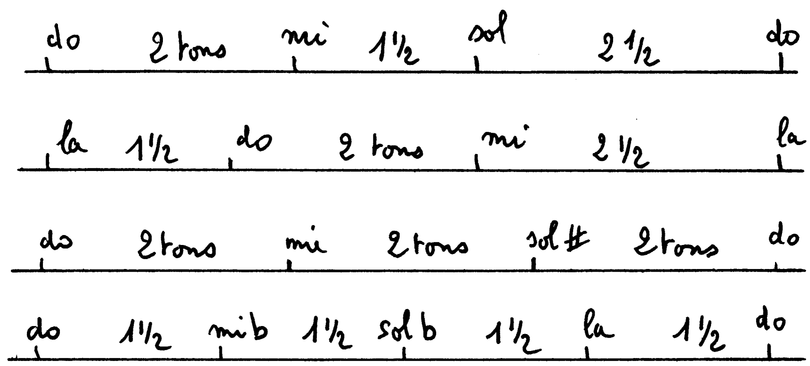


FIG. 20 – Accords tonaux et atonaux.

L'accord parfait majeur *do-mi-sol-do* (où la note basse est répétée à l'octave) divise l'octave en intervalles inégaux, de même que l'accord parfait mineur *la-do-mi-la*. Voyez les deux premiers des diagrammes ci-dessus.

Les deux autres donnent deux exemples possibles d'accords utilisés en musique atonale, ils divisent l'octave en intervalles égaux. On retrouvera, dans *do-sol*♭, le «diabolus in musica» des classiques.

[28] On rappelle que le *sol* y est souvent remplacé par *sol*♯.

3 Autres constructions

Bien sûr, ont été explorés d'autres partages de l'octave en intervalles inégaux (on retrouve donc une musique tonale) distincts de ceux de la gamme tempérée. Citons la gamme pentatonique (obtenue en ne jouant que les touches noires du piano) d'allure chinoise :

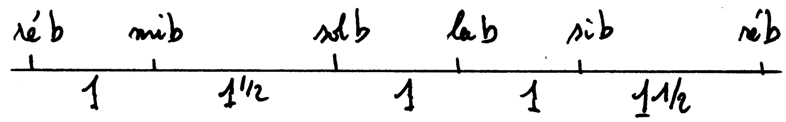


FIG. 21 – Gamme pentatonique.

MESSIAEN propose une gamme «à modulations limitées» qui permet deux modulations (et pas d'autres) :

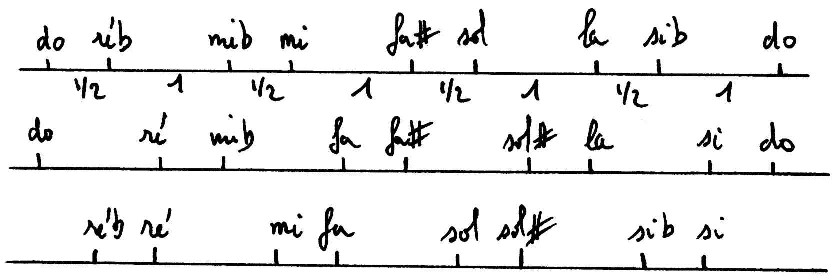


FIG. 22 – Gamme à modulations limitées.

Citons aussi la musique orientale traditionnelle qui utilise des gammes avec quarts de ton. Et, à contrecœur, certains compositeurs modernes qui utilisent toutes les fréquences possibles (on peut y passer d'une note à la suivante, non par saut de fréquence, mais par variation continue de fréquence), qu'on me permette de ne pas aimer.