VISCOÉLASTICITÉ

1 - Élasticité.

Soit un solide parallélépipédique de section S parallèlement au plan Oxy et de hauteur L selon Oz. Le cours sur les déformations longitudinales d'un solide affirme que si l'on exerce sur la face supérieure une force dans le sens de Oz et de module F (et la force opposée sur la face du dessous), le solide s'étire de ΔL dans le sens de Oz avec une loi de proportionnalité dont la constante E est le module d'Young :

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta L}{L}$$

On appelle contrainte le rapport F/S et une rapide analyse dimensionnelle montre que E est homogène à une pression.

Exerçons cette fois-ci sur la face supérieure une force de module F mais parallèlement à Ox ; la face supérieure va désormais se déplacer de $\Delta\ell$ parallèlement à Ox et les faces parallèles à Oxz vont devenir des parallélogrammes. Pour la majorité des solides, on a encore une loi de proportionnalité :

$$\frac{F}{S} = G\,\frac{\Delta\ell}{L}$$

Ici F/S est appelée contrainte de cisaillement, G le module de cisaillement et il est d'usage de donner $\Delta\ell/L$ en radian car cette grandeur est aussi l'angle dont a tourné l'arête pour que le rectangle devienne parallélogramme.

2 - Viscosité.

Soit une région parallélépipédique d'un fluide visqueux où règne un écoulement permanent ou quasi-permanent dont le champ de vitesses est :

$$\overrightarrow{v}(M) = v(z)\,\overrightarrow{e_x}$$

L'équation de Navier-Stokes donne ici, en projection sur Ox :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v(z,t)\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\eta}{\mu}\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Au premier membre, le second terme est nul et le premier négligeable en régime quasi-permanent, donc $v(z)$ est du premier degré, soit avec un choix convenable de l'origine et le choix d'une hauteur arbitraire L :

$$v(z) = v(L)\,\frac{z}{L}$$

Les lois de la viscosité donne pour une surface d'aire S parallèle à Oxy une force selon Ox de module :

$$F = \eta\,S\,\frac{\partial v}{\partial z}$$

soit ici :

$$\frac{F}{S} = \eta\,\frac{v(L)}{L}$$

Imaginons maintenant un fluide visqueux entre une plaque immobile de cote $z = 0$ et une plaque mobile parallèlement à Ox de cote $z = L$ et de mouvement sinusoïdal noté $x(t) = \Delta\ell(t)$ de pulsation ω

Une étude par ordre de grandeur à partir de l'équation de Navier-Sytokes montre que le régime est quasi-permanent si ω est petit devant $\eta/\mu L^2$. La formule précédente est alors encore valable. Or la vitesse $v(L)$ n'est autre que la dérivée du mouvement de la plaque supérieure, d'où :

$$\frac{F}{S} = \eta\,\frac{v(L)}{L} = \eta\,\frac{\frac{\mathrm{d}\Delta\ell}{\mathrm{d}t}}{L} = \jmath\,\omega\,\eta\,\frac{\Delta\ell}{L}$$

3 - Visco-élasticité.

Un corps est viscoélastique, si dans un mouvement de cisaillement, la surface d'étude est soumise à deux forces, l'une de nature élastique, l'autre de nature visqueuse, d'où un bilan :

$$\frac{F}{S} = G\,\frac{\Delta\ell}{L} + \eta\,\frac{\frac{\mathrm{d}\Delta\ell}{\mathrm{d}t}}{L}$$

soit en régime sinusoïdal :

$$\frac{F}{S} = (G + \jmath\,\omega\,\eta)\,\frac{\Delta\ell}{L}$$

4 - Étude expérimentale.

Si l'on soumet un corps visco-élastique à une contrainte de cisaillement sinusoïdale, il y a un lien entre son amplitude complexe et celle de la déformation $\Delta\ell(t)$ qu'on note :

$$\frac{F}{S} = G^*(\omega)\,\frac{\Delta\ell}{L}$$

avec $G^*(\omega) = G'(\omega) + \jmath\,G''(\omega)$ L'étude précédente donne $G(\omega) = G$, cest-à dire indépendant de ω et $G''(\omega) = \eta\,\omega$, c'est-à-dire proportionnel à ω.

Est-il utile de préciser que les résultats expérimentaux sont toujours un peu plus compliqués ?