

# Chapitre 7

## Transformation de Laplace

*Le but de ce chapitre est d'introduire  
la transformation de Laplace  
et d'en présenter les applications les plus usuelles*

### 7.1 Présentation

La transformation de Laplace est une transformation intégrale ayant un grand lien de parenté avec la transformation de Fourier, mais qui s'en démarque nettement sur plusieurs points. Notamment, on verra que la classe des fonctions admettant une transformation de Laplace est beaucoup plus vaste que celles des fonctions pour lesquelles l'intégrale de Fourier est définie.

En outre, la transformation de Laplace est particulièrement adaptée pour l'étude de la dynamique de systèmes supposés dans un état connu à un certain instant, que l'on peut toujours prendre comme origine des temps. Cette situation est très banale en Physique, qu'il s'agisse de résoudre un problème de dynamique classique, d'évolution d'un système quantique, ou de relaxation d'un système macroscopique à partir d'un état hors d'équilibre. Dans toutes ces situations, si on note  $f$  la quantité physique d'intérêt, la question est donc de résoudre l'équation décrivant l'évolution de la grandeur  $f$  et d'en obtenir l'expression,  $f(t)$ , à un instant  $t$  postérieur à celui où on a "déclenché le chronomètre". Comme on l'a vu, au contraire, la transformation de Fourier est très commode pour l'étude des régimes forcés qui, pour un système amorti, prévalent après extinction des régimes transitoires (oubli des conditions initiales), auquel cas le régime physique s'obtient en rejetant l'instant initial infiniment loin dans le passé.

Les équations d'évolution exigent toujours la donnée additionnelle de condition(s) initiale(s). Le nombre de ces conditions dépend de la nature de l'équation dynamique. Si celle-ci est une équation différentielle d'ordre  $p$ , et si le nombre de degrés de liberté est égal à  $N$ , il faut  $Np$  conditions initiales. Si la quantité cherchée obéit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre en temps, l'état initial est complètement défini par la donnée du champ à  $t = 0$  : c'est le cas de l'équation de Schrödinger, qui ne peut être complètement résolue pour un système quantique donné (à température nulle) que si la fonction d'onde de départ a été précisée.

Dans les problèmes d'évolution temporelle, un état initial étant donné (à un instant pris conventionnellement comme origine des temps,  $t = 0$ ), l'objectif est d'obtenir la fonction  $f(t)$  à  $t > 0$ . Dans ces conditions, la fonction  $f$  à  $t < 0$  n'est pas définie, ou plus précisément, on se moque de savoir ce qu'elle vaut. C'est pourquoi il est usuel (et conventionnel) de la prendre *nulle*. D'ailleurs, ce choix est souvent ce que dicte la situation physique d'intérêt ; soit par exemple un oscillateur harmonique à l'équilibre (position d'équilibre, vitesse nulle). S'il reçoit instantanément un choc à un certain instant ( $t = 0$ ), son abscisse (et sa vitesse) vont par la suite osciller dans le temps, ce seront des fonctions devenues non-identiquement nulles après de l'instant du choc.

Dans toute la suite, la transformée de Laplace sera définie exclusivement pour de telles fonctions, nulles pour  $t < 0$ , non-nulles pour  $t > 0$ . Remarquons tout de suite que ce n'est pas toujours la variable temps  $t$  qui intervient : si on étudie le mouvement d'une particule confinée dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+$ , toute grandeur relative à cette particule sera une fonction de l'abscisse  $x$ ,  $\phi(x)$ , identiquement nulle  $\forall x < 0$ . Toutefois, la variable-type utilisée ci-dessous sera notée  $t$ , afin de respecter les usages.

La transformation de Laplace est souvent associée aux calculs de circuits électriques, car c'est dans le souci de développer un calcul symbolique (on dit aussi *opérationnel*) pour ces systèmes qu'elle a été historiquement introduite. Il faut bien voir que ses propriétés, et sa puissance en tant qu'outil, ne la rende en aucune façon tributaire des circonstances de son émergence historique. La transformation de Laplace est l'une des transformations intégrales importantes de l'Analyse, et présente un grand intérêt en soi, en-dehors du fait que, dans presque tous les domaines des sciences, elle est très souvent un outil d'une extrême utilité.

## 7.2 Définition et formule d'inversion

La transformation de Laplace est une transformation intégrale associant une fonction à une autre. On notera :

$$F = \mathcal{L}[f] \iff f \xrightarrow{\mathcal{L}} F \quad (7.1)$$

La correspondance précise est la suivante. Soit une certaine fonction,  $f(t)$  continue par morceaux, et ayant au plus un nombre fini de discontinuités dans tout intervalle fini de  $\mathbb{R}$  ; sa transformée de Laplace  $F(z)$  est donnée par la relation intégrale suivante<sup>1</sup> :

$$F(z) \stackrel{\text{d'éf}}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt . \quad (7.2)$$

$f(t)$  est appelé *original* et sa transformée  $F(z)$  est appelée *image*. Sur cette définition, on voit bien que tout se passe comme si la fonction  $f(t)$  était de fait nulle à tout temps négatif.  $z$  est la variable conjuguée de  $t$ , et cette notation affiche la couleur : dans (7.2),  $z$  est *a priori* un nombre *complexe*. La toute première question à régler est de savoir dans quelles circonstances l'intégrale (7.2) existe. Si on pose  $z = x + iy$ , on a :

$$|F(z)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+iy)t} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-(x+iy)t}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-xt} dt . \quad (7.3)$$

Il en résulte immédiatement que si  $\forall t > 0$ ,  $f(t)$  est bornée<sup>2</sup> en module par une exponentielle ( $|f(t)| < Me^{x_0 t}$ ,  $M > 0$ ), alors le module  $|F(z)|$  est borné  $\forall z$ ,  $\Re z > x_0$  :

$$|F(z)| < M \int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} dt = \frac{M}{x-x_0} . \quad (7.4)$$

Ainsi, la transformation intégrale de Laplace définit une fonction  $F(z)$  qui est bornée dans le demi-plan  $\Re z > x_0$ . L'abscisse  $x_0$  est appelée *abscisse de sommabilité*. La fonction  $F(z)$  est ainsi définie dans le demi-plan complexe situé à la droite de la droite verticale d'abscisse  $x_0$ . L'équation (7.4) montre aussi que :

$$\forall F(z), \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |F(z)| = 0 \quad (\Re z > x_0) . \quad (7.5)$$

Une fonction donnée  $\Phi(z)$  qui n'a pas cette propriété ne saurait être une transformée de Laplace au sens ci-dessus<sup>3</sup>.

Notons que l'intégrale dans (7.2), qui va à l'infini, converge absolument et uniformément en  $z$  : pour tout  $z = x + iy$  donné, il suffit de remplacer partout  $x$  par  $x_1$  tel que  $x_0 < x_1 < x$  pour avoir une majoration *indépendante* de  $z$ . De plus,  $F(z)$  est de la forme  $\int_C \phi(z; t) dt$  où la dépendance en  $z$  est *via* l'exponentielle

<sup>1</sup>Si  $t$  est un temps,  $z$  est l'inverse d'un temps, une pulsation par exemple.

<sup>2</sup>On peut énoncer une condition un peu moins restrictive : il faut et suffit qu'il existe  $t_0 > 0$  tel que  $f$  soit sommable entre 0 et  $t_0$  et que  $\forall t > t_0$ ,  $|f(t)| < M_0 e^{x_0 t}$ .

<sup>3</sup>On peut cependant donner un sens, en tant que transformées de Laplace en un sens généralisé, à des fonctions n'ayant pas cette propriété. C'est ainsi que  $z^n = \mathcal{L}[\delta^{(+)(n)}(t)]$ , où  $\delta^{(+)}(t)$  est la fonction définie en (7.39),  $\delta^{(+)(n)}(t)$  désignant sa dérivée d'ordre  $n$ .

$e^{-zt}$ , qui est une fonction holomorphe. Autrement dit,  $\phi(z; t)$  est holomorphe en  $z$  pour tout  $t$  fixé. Comme l'intégrale converge uniformément en  $z$ , la fonction  $F(z)$  est elle-même holomorphe<sup>4</sup>.

La conclusion importante est donc, compte tenu de la forme particulière de la transformation intégrale (7.2) :

$$|f(t)| < Me^{x_0 t} \quad \implies \quad F(z) \text{ holomorphe } \forall z, \Re z > x_0 . \quad (7.6)$$

Le caractère holomorphe peut d'ailleurs se démontrer directement comme suit. L'intégrale (7.2) est de la forme  $\int_C \phi(z; t) dt$ , et la dérivée  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = -te^{-zt} f(t)$  est bornée ; il en résulte que la dérivée  $F'(z)$  s'obtient par dérivation sous le signe somme :

$$F'(z) = \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-zt} dt . \quad (7.7)$$

Compte tenu des hypothèses sur  $f(t)$ , on a :

$$|F'(z)| < \int_0^{+\infty} Mte^{-(x-x_0)t} dt = \frac{M}{(x-x_0)^2} \quad \forall z, \Re z > x_0 . \quad (7.8)$$

$F$  a donc une dérivée partout dans le demi-plan  $\Re z > x_0$ , ce qui établit que cette fonction  $y$  est holomorphe (analytique).

L'abscisse de sommabilité n'est pas toujours positive, même si c'est très souvent le cas. Par exemple, pour une fonction à support borné, l'abscisse de sommabilité est égale à  $-\infty$ . Ainsi, la fonction-porte  $P(t)$  :

$$P(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} , \quad (7.9)$$

a pour transformée de Laplace :

$$\mathcal{P}(z) = \int_0^1 e^{-zt} dt = \frac{1}{z}(1 - e^{-z}) . \quad (7.10)$$

Cette fonction, ainsi définie par l'intégrale, est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  (la singularité en  $z = 0$  est clairement éliminable). L'abscisse de sommabilité est bien  $-\infty$  – c'est d'ailleurs le cas pour toute fonction à support borné<sup>5</sup>. Tout polynôme et toute fraction rationnelle ont une abscisse de sommabilité égale à zéro.

Il est bien évident que, comparée à la transformation de Fourier, la transformation de Laplace permet de considérer une classe beaucoup plus grande de fonctions : quand  $x_0$  est strictement positif, la fonction  $f(t)$  peut diverger comme  $e^{x_f t}$  avec  $x_f < x_0$ , sa transformée de Laplace existe quand même. La contrainte essentielle est donc ici que l'original ne croisse pas plus vite qu'une exponentielle, alors que la transformation de Fourier, avec son exponentielle oscillante, n'a un sens avec certitude que pour des fonctions absolument intégrables (rappelons toutefois qu'une fonction intégrable mais non-absolument intégrable peut néanmoins avoir une transformée de Fourier, par exemple  $\frac{\sin x}{x}$ ). Inversement, il est bien clair qu'il existe des fonctions croissant trop vite à l'infini pour avoir une transformée de Laplace : c'est le cas de  $e^{\alpha t^2}$ , par exemple ; pour de telles fonctions, on peut dire que l'abscisse de sommabilité  $x_0$  est égale à  $+\infty$ .

Pour mémoire, la transformée de Laplace spatiale s'écrit :

$$F(k) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-kx} dx ; \quad (7.11)$$

$k$  a la dimension de l'inverse d'une longueur, c'est par exemple un vecteur d'onde. À nouveau, les grandeurs  $x$  et  $k$  sont souvent dites *conjuguées* l'une de l'autre.

<sup>4</sup>En effet, si l'intégrale  $\int_C \phi(z; t) dt$  converge uniformément  $\forall z \in \mathcal{D}$ , et si les points singuliers de  $\phi$  ne dépendent pas du paramètre  $z$ , alors  $\int_\Gamma F(z) dz = 0$ , où  $\Gamma$  est un contour fermé situé dans  $\mathcal{D}$  – une conséquence du fait que  $\int_\Gamma [\int_C \phi(z; t) dt] dz = \int_C [\int_\Gamma \phi(z; t) dz] dt$  avec  $\int_\Gamma \phi(z; t) dz = 0$  en vertu du théorème de Cauchy.

<sup>5</sup>Pour une fonction  $f(t)$  nulle pour  $t > t_0$ , on a visiblement  $f(t) = 0 < e^{x_0 t}$ ,  $\forall t > t_0$ , quel que soit  $x_0$  réel,  $y$  compris  $-\infty$  !

À titre d'exemple, considérons la fonction de Heaviside (échelon-unité) :

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t > 0 \end{cases}, \quad (7.12)$$

D'après la définition intégrale (7.2), sa transformée de Laplace est :

$$\mathcal{Y}(z) \equiv \mathcal{L}[Y](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z} \quad \forall z, \Re z > 0. \quad (7.13)$$

La fonction  $Y(t)$  est bornée par  $e^{xt} \forall x > 0, \forall t > 0$ . On en déduit que sa transformée de Laplace  $\mathcal{Y}(z)$  est holomorphe dans le demi-plan ouvert de droite,  $\Re z > 0$  ; c'est bien ce que dit (7.13) : la fonction  $\frac{1}{z}$  est bien holomorphe dans ce demi-plan (elle n'a en fait qu'une seule singularité, un pôle simple en  $z = 0$ ).

Cet exemple simple permet d'illustrer la notion de prolongement analytique. En effet, la fonction  $F_2(z) = \frac{1}{z}$  est définie dans le domaine  $\mathcal{D}_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  (le plan privé de l'origine). D'un autre côté, la relation intégrale (7.13) définit une fonction  $F_1(z) = \frac{1}{z}$  dans le domaine  $\mathcal{D}_1 = \{z, \Re z > 0\}$ . Les deux domaines se recouvrent (largement !),  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ , et dans la région commune, on a bien  $F_1(z) = F_2(z)$ . On peut donc dire que  $F_2(z)$  est le prolongement analytique de  $\mathcal{Y}(z)$  du côté  $\Re z < 0$ . En définitive, la transformée de Laplace de  $Y(t)$  est la fonction  $\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{z}$  prolongée dans tout le plan complexe et analytique partout dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  :

$$\mathcal{Y}(z) \equiv \mathcal{L}[Y](z) = \frac{1}{z} \quad \forall z, z \neq 0. \quad (7.14)$$

Il convient de bien saisir la distinction entre (7.13) et (7.14), qui est d'importance.

Ainsi, et de façon générale, l'opération de prolongement étant faite, on n'est plus confiné au demi-plan  $\Re z > x_0$  (ici  $\Re z > 0$ ) ; c'est ce qui autorisera des promenades dans  $\mathbb{C}$  affranchies de cette condition – nécessaire pour que la définition par l'intégrale (7.13) ait un sens –, tout juste contraintes, comme toujours, à contourner les singularités de  $F(z)$ , dûment identifiées.

On sait que le prolongement analytique n'est pas toujours possible. On peut deviner d'avance qu'il l'est ici, en jouant avec l'intervalle d'intégration apparaissant dans l'intégrale de définition. En effet, soit l'intégrale :

$$\int_C e^{-z\tau} d\tau \quad (7.15)$$

où le contour fermé  $C$  est formé de l'intervalle  $[0, R] \subset \mathbb{R}$ , de l'arc de cercle de rayon  $R$ ,  $0 \leq \phi \leq \phi_0 < \frac{\pi}{2}$  et du segment joignant le point  $Re^{i\phi_0}$  à l'origine. Ce contour délimite un domaine où  $e^{-z\tau}$  est holomorphe. Le théorème de Cauchy permet donc d'écrire :

$$\int_C e^{-z\tau} d\tau = 0. \quad (7.16)$$

En décomposant l'intégrale, on peut écrire :

$$\int_0^{+R} e^{-zt} dt + \int_0^{\phi_0} iRe^{i\phi} d\phi e^{-Re^{i\phi}} + \int_{+R}^0 e^{-z\rho e^{i\phi_0}} d\rho = 0. \quad (7.17)$$

L'intégrale du milieu tend vers zéro exponentiellement avec  $R$ . À la limite  $R = +\infty$ , on a donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-z\rho e^{i\phi_0}} d\rho. \quad (7.18)$$

Maintenant,  $z = re^{i\theta}$  étant donné, l'argument de l'exponentielle est  $-r\rho e^{i(\phi_0+\theta)}$  : il suffit de prendre  $|\phi_0 + \theta| < \frac{\pi}{2}$  pour que l'exponentielle dans l'intégrale de droite soit de la forme  $e^{-(\text{quantité positive})\rho}$ , assurant que l'intégrale au second membre de (7.18) converge à l'infini et donc existe. Ainsi, simplement en jouant avec le contour d'intégration, on voit d'avance que  $\mathcal{Y}(z)$  va pouvoir être prolongée bien au-delà de  $\{z, \Re z > 0\}$ .

Bien évidemment, lorsque l'abscisse de sommabilité est égale à  $-\infty$ , aucun prolongement analytique n'est nécessaire ; c'est le cas pour la fonction-porte (7.9) : d'emblée, la transformation intégrale produit à elle toute seule la fonction donnée en (7.10), qui est holomorphe dans le plan entier ouvert.

Tout comme pour la transformation de Fourier, se pose maintenant la question de l'inversion de la transformation intégrale (7.2) : étant donné une fonction  $F(z)$ , considérée comme une image par Laplace, quelle est la formule donnant son original  $f(t)$  :

$$f = \mathcal{L}^{-1}[F] \iff F \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f ? \quad (7.19)$$

La fonction  $F(z)$  est donc donnée et l'analyse de son expression permet l'identification complète de ses singularités ; la question est donc de trouver la façon d'obtenir son original  $f(t)$ .

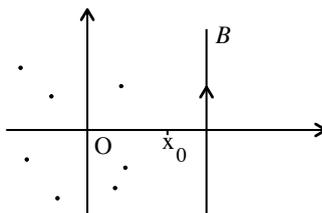


Figure 7.1: Droite de Bromwich utilisée pour l'inversion de la transformation de Laplace (voir (7.24)). Les points schématisent les singularités de  $F(z)$ , qui sont toutes situées à la gauche de cette droite.

Pour établir la formule traduisant cette inversion, on s'appuie sur ce que l'on sait de la transformation de Fourier.  $x_0$  désignant toujours l'abscisse de sommabilité, on peut en introduisant  $Y(t)$  récrire (7.2) sous la forme :

$$F(z = x - iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t)f(t)e^{-(x-iy)t} dt \quad \forall x > x_0, \quad (7.20)$$

soit :

$$F(x - iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} Y(t)f(t)e^{-xt} dt. \quad (7.21)$$

Cette dernière écriture montre que  $F(x - iy) = \mathcal{F}[Y(t)f(t)e^{-xt}]$ . En utilisant la formule d'inversion de Fourier, il en résulte :

$$Y(t)f(t)e^{-xt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt} F(x - iy) dy \iff Y(t)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x-iy)t} F(x - iy) dy. \quad (7.22)$$

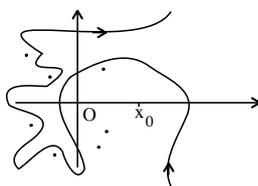


Figure 7.2: Un contour possible pour l'inversion de Laplace.

En posant maintenant  $z = x - iy$  ( $dy = idz$ ), et notant que quand  $y$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $z$  décrit sa droite de *haut en bas*, il vient  $\forall t > 0$  :

$$Y(t)f(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{x+i\infty}^{x-i\infty} e^{zt} F(z) dz, \quad (7.23)$$

soit, en définitive :

$$Y(t)f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} F(z) dz. \quad (7.24)$$

$\mathcal{B}$  est la droite parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse  $x > x_0$  parcourue de *bas en haut*, appelée *droite de Bromwich*. Par construction, toutes les singularités de  $F(z)$  sont à *gauche* de cette droite, puisque celle-ci est située à la *droite* de l'abscisse de sommabilité  $x_0$ . Ceci étant acquis, toutes les déformations de  $\mathcal{B}$  sont autorisées à condition de ne pas franchir de singularité de  $F(z)$ . Le contour de la fig. 7.2 est tout aussi légitime que  $\mathcal{B}$ , ni plus, ni moins.

*Remarque*

De la définition de la transformée de Laplace  $F(z)$  d'une fonction  $f(t)$ , il résulte que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |F(z)| = 0$  (voir (7.5)). Cette propriété triviale n'est pas anodine : elle permet de dire d'emblée si une fonction  $H(z)$  "tirée au hasard" peut être ou non une transformée de Laplace.

À titre d'exemple, soit la gaussienne  $G(z) = e^{\tau^2 z^2}$  ( $\tau \in \mathbb{R}$ ), qui n'est pas bornée lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ , quand  $z$  est dans le double secteur  $|\text{Arg } z| < \frac{\pi}{4}$  ( $\pi$ ). La propriété ci-dessus permet d'affirmer *a priori* qu'il n'existe pas de fonction  $g(t)$  nulle à  $t < 0$  dont  $G(z)$  est la transformée de Laplace :

$$\# g(t) : \quad g(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} e^{\tau^2 z^2} dz . \quad (7.25)$$

D'un autre côté, rien n'interdit de considérer l'intégrale  $I(t)$  :

$$I(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_D e^{zt} e^{\tau^2 z^2} dz , \quad (7.26)$$

où  $D$  est une droite verticale dans  $\mathbb{C}$ , d'abscisse  $a \in \mathbb{R}$ , parcourue de bas en haut. L'intégration de (7.26) peut s'effectuer directement en posant  $z = a + iy$  ; ainsi :

$$I(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+iy)t} e^{\tau^2 (a+iy)^2} idy = \frac{1}{2\pi} e^{at} e^{a^2 \tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} e^{-\tau^2 (ay^2 - 2ia y)} dy . \quad (7.27)$$

En utilisant  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2 + \beta u} du = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$ ,  $\forall \alpha, \Re \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{C}$ , on trouve :

$$I(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau} e^{-\frac{t^2}{4\tau^2}} . \quad (7.28)$$

Au passage, on note que l'abscisse  $a$  de la droite  $D$  disparaît ; ceci est une simple conséquence du fait que  $e^{zt} e^{\tau^2 z^2}$  est une fonction entière et que l'on peut déplacer la droite (et aussi la déformer en un *spaghetti*) sans changer la valeur de  $I(t)$  : on ne risque pas de tomber sur des singularités qui n'existent pas.

Plus important est de noter que le résultat (7.28) est vrai quel que soit  $t$ , *positif* ou *négatif*. Ainsi, il existe bien une fonction  $I(t)$  obtenue par intégration suivant  $D$ , mais en l'occurrence (7.26) ne peut être interprétée, en dépit des apparences, comme une relation d'*inversion* : c'est juste une relation indiquant la recette comment calculer  $I(t)$ . En tout cas,  $I(t)$  n'est pas de la forme  $Y(t) \times$  quelque chose, et n'est donc pas une transformée de Laplace.

On peut résumer les choses ainsi. Pour la transformation de Laplace, la succession des étapes est :

$$\begin{aligned} \text{étape (I)} : f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \equiv \mathcal{L}[f](z) \\ \text{étape (II)} : F(z) &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} F(z) dz \equiv \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f](z)](t) = f(t) . \end{aligned} \quad (7.29)$$

$F$  est l'image d'une certaine fonction  $f$  (original), obtenue suivant la prescription de Laplace. D'un autre côté, si on "débarque" au milieu avec une fonction  $H(z)$  tirée d'un chapeau, on peut toujours définir une certaine fonction  $h(t)$  (si cette écriture a un sens dans le cas particulier considéré, évidemment) :

$$h(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_D e^{zt} H(z) dz ; \quad (7.30)$$

mais si on force à maintenir la relation  $H(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} h(t) dt$ , celle-ci peut n'être vérifiée que pour  $h \equiv 0$  et donc  $H \equiv 0$ , alors que la fonction  $H$  choisie n'est pas identiquement nulle, évidemment. En pareil,  $H$  n'est pas une image, et  $h$  n'est pas un original dans la mesure où on peut pas lui définir une transformée au sens usuel (par exemple quand  $h$  n'est pas nulle à  $t < 0$ ).

Il est instructif de voir la formule d'inversion à l'œuvre pour la fonction  $Y(t)$ , dont la transformée est  $\frac{1}{z}$ . Dans ce cas, le second membre de (7.24) est :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} \frac{1}{z} dz . \quad (7.31)$$

Dans un premier temps, limitons la droite entre les deux points  $x_1 \pm iR$  ( $x_1 > x_0$ ), et calculons l'intégrale en refermant le contour par un grand arc de cercle de rayon  $R$ . Quand  $t > 0$ , la contribution du grand arc tendra vers zéro (exponentiellement) à la limite  $R \rightarrow +\infty$  si  $\Re z < 0$  : pour  $t > 0$ , on referme à gauche ; l'intégrand de (7.31) a un pôle simple en  $z = 0$ , dont le résidu vaut 1, de sorte que l'intégrale vaut  $2i\pi$ . Il vient donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} \frac{1}{z} dz = 1 , \quad t > 0 . \quad (7.32)$$

À l'inverse, si  $t < 0$ , on referme par la droite ; alors le contour fermé ne contient aucune singularité et, par le théorème de Cauchy, l'intégrale est nulle :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} \frac{1}{z} dz = 0 , \quad t < 0 . \quad (7.33)$$

Au total, on a bien :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} \frac{1}{z} dz = Y(t) . \quad (7.34)$$

Remarquons que si l'on fait  $t = 0$  sous l'intégrale dans (7.31), on obtient une intégrale qui se calcule immédiatement puisqu'une primitive,  $\ln z$ , est connue :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2i\pi} |\ln z|_{\mathcal{B}} . \quad (7.35)$$

La droite  $\mathcal{B}$  étant dans le demi-plan de *droite*, la variation de la partie imaginaire du logarithme, quelle que soit la détermination choisie, est  $+i\pi$ . Il en résulte que, pour  $t = 0$ , l'inversion de Laplace fournit la valeur  $\frac{1}{2}$ , qui est la demi-somme des valeurs à gauche et à droite de  $Y(t)$ .

Cet exemple montre bien la nécessité d'effectuer (le plus souvent mentalement et implicitement) le prolongement analytique, faute de quoi aucune incursion dans le demi-plan de gauche  $\Re z \leq x_0$  ne serait autorisée, ce que l'on vient pourtant de faire pour trouver  $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{z}]$  lorsque  $t > 0$ .

Il est clair que quand l'original  $f(t)$  a un (ou plusieurs) saut(s) (fini(s)), on peut en compléter la définition en convenant d'une valeur ou d'une autre au point de discontinuité<sup>6</sup> : ceci ne change en aucune façon la valeur de la fonction obtenue par la transformation intégrale (on change l'original sur un ensemble de mesure nulle). À l'inverse, la formule inverse fournit une valeur unique, qui n'a aucune raison de coïncider avec la valeur conventionnelle définie antérieurement. C'est pourquoi on précise usuellement que l'inversion de Laplace redonne l'original, aux valeurs aux points de discontinuité près. De fait,  $\mathcal{L}^{-1}[f](t)$  et  $f(t)$  sont *presque partout* égales. Ce phénomène, déjà rencontré à propos des séries et de l'intégrale de Fourier ne devrait plus surprendre

Un autre exemple ; soit  $f(t) = e^{\alpha t}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  (donc  $x_0 > \Re \alpha$ ), dont la transformée est  $\frac{1}{z-\alpha}$ , fonction holomorphe dans  $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ . La droite de Bromwich est n'importe quelle droite<sup>7</sup> parallèle à l'axe imaginaire et coupant l'axe réel en un point d'abscisse strictement supérieure à  $\alpha$ . La formule d'inversion (7.24) est ici :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} \frac{1}{z-\alpha} dz . \quad (7.36)$$

On referme le contour comme ci-dessus : par la gauche si  $t > 0$ , le pôle simple en  $z = \alpha$  donnant au total  $e^{\alpha t}$ , par la droite si  $t < 0$ , auquel cas le contour ne contient aucune singularité et l'intégrale est nulle. En définitive :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} \frac{1}{z-\alpha} dz = Y(t) e^{\alpha t} , \quad \forall t \quad (7.37)$$

<sup>6</sup>Souvent, on prend la valeur limite d'un côté, mais on pourrait prendre aussi n'importe quelle autre valeur – la demi-somme, un choix parmi d'autres – étant *a priori* naturel.

<sup>7</sup>ou, bien sûr, n'importe quelle ligne laissant à sa gauche toutes les singularités de l'image.

comme il se doit.

Tout comme pour la transformation de Fourier, il est parfois nécessaire (ou en tout cas très utile) de définir la transformée de Laplace de “fonctions” obtenues comme limite de certaines suites. Le cas le plus utile est celui de la fonction  $\delta_{\Delta t}(t)$  définie comme :

$$\delta_{\Delta t}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & \text{si } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} . \quad (7.38)$$

Si  $\Delta t \ll 1$ , cette fonction est très étroite et l’aire de son graphe vaut 1 : c’est un précurseur de la fonction de Dirac centrée juste à droite de  $t = 0$ , que l’on peut noter  $\delta^{(+)}(t)$  :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta_{\Delta t}(t) = \delta^{(+)}(t) . \quad (7.39)$$

La transformée de Laplace de  $\delta_{\Delta t}(t)$  est :

$$\mathcal{L}[\delta_{\Delta t}(t)] \equiv \Delta_{\Delta t}(z) = \int_0^{\Delta t} e^{-zt} \frac{1}{\Delta t} dt = \frac{1 - e^{-z\Delta t}}{z\Delta t} . \quad (7.40)$$

Ceci montre que la largeur en  $z$  de  $\Delta_{\Delta t}(z)$  est  $\frac{1}{\Delta t}$  : tout comme pour la transformation de Fourier, le produit de la largeur  $\Delta t$  de l’original et  $\Delta z$  de son image – qui ici vaut strictement 1 – est d’une façon générale un nombre d’ordre unité :

$$\Delta t \Delta z \sim 1 . \quad (7.41)$$

Comme pour les couples de Fourier, ceci tient à la nature même de la transformation intégrale de définition, qui conduit immédiatement à la relation de dilatation (voir (7.62)) : plus l’original est concentré dans le temps, plus l’image est étendue en  $z$ , et inversement.

Maintenant, pour tout  $z$  fixé, la limite de  $\Delta_{\Delta t}(z)$  quand  $\Delta t \rightarrow 0$  donne :

$$\Delta(z) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta_{\Delta t}(z) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-z\Delta t}}{z\Delta t} = 1 ; \quad (7.42)$$

ceci permet d’écrire :

$$\mathcal{L}[\delta^{(+)}(t)] = 1 , \quad (7.43)$$

où  $\delta^{(+)}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \delta_{\Delta t}(t)$ . Réciproquement, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}[1] = \delta^{(+)}(t) . \quad (7.44)$$

### 7.3 Propriétés de la transformation de Laplace

À l’instar de la transformation de Fourier, la transformation de Laplace possède des propriétés importantes, qui résultent directement de la définition (7.2). On note toujours :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z) , \quad F = \mathcal{L}[f] ; \quad F(z) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) , \quad f = \mathcal{L}^{-1}[F] . \quad (7.45)$$

■ **Linéarité** L’intégrale étant une opération linéaire, on a de toute évidence :

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g] , \quad (7.46)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des scalaires. La transformation de Laplace est donc elle aussi bien adaptée à la résolution d’équations *linéaires*, et produira aisément les solutions admettant une transformée de Laplace, c’est-à-dire ne croissant pas plus vite qu’une certaine exponentielle.

■ **Translation** Étant donné une fonction  $f(t)$ , sa translatée de  $t_0$  est la fonction  $(\mathcal{T}_{t_0}f)(t) = f(t - t_0)$  ; cette fonction est non nulle seulement pour  $t > t_0$ . La transformée de  $\mathcal{T}_{t_0}f$  est :

$$\mathcal{L}[\mathcal{T}_{t_0}f] = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t - t_0) dt = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-zt} f(t - t_0) dt = e^{-zt_0} \int_0^{+\infty} e^{-zt'} f(t') dt' = e^{-zt_0} \mathcal{L}[f] . \quad (7.47)$$

Dans le contexte traditionnel de la transformation de Laplace, ce résultat s'appelle parfois *théorème du retard*.

À titre d'illustration élémentaire, soit l'équation :

$$f(t) = f(t - t_0) + a , \quad f(t < 0) = 0 \quad (a, t_0 \in \mathbb{R}_+) , \quad (7.48)$$

qui peut être résolue par la transformation de Laplace. Remarquons d'abord que la solution se trouve à vue : quand  $0 < t < t_0$ , l'équation est  $f(t) = 0 + a = a$  ; quand  $t_0 < t < 2t_0$ , l'équation est  $f(t) = a + a = 2a$  et ainsi de suite. La solution nulle à  $t < 0$  vaut donc à  $t$  positif :

$$f(t) = a \left[ 1 + E\left(\frac{t}{t_0}\right) \right] \quad (t > 0) \quad (7.49)$$

où  $E(x)$  désigne la partie entière du réel  $x$  : c'est une fonction en escalier, qui vaut  $a$  entre 0 et  $t_0$ ,  $2a$  entre  $t_0$  et  $2t_0$ , etc. Ce résultat peut aussi s'obtenir comme suit. La transformation de Laplace appliquée à (7.48) donne :

$$F(z) = e^{-zt_0} F(z) + \frac{a}{z} \iff F(z) = \frac{a}{z(1 - e^{-zt_0})} \iff f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} \frac{a}{z(1 - e^{-zt_0})} dz . \quad (7.50)$$

L'intégrale se calcule par résidus. Les pôles sont  $z_0 = 0$  d'une part, les zéros de  $1 - e^{-zt_0}$  soit  $z_k = \frac{2ik\pi}{t_0}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , d'autre part ; le pôle en  $z_0$  est double, le résidu vaut  $\frac{t}{t_0}$ , tous les autres sont simples et donnent chacun le résidu  $\frac{1}{2ik\pi} e^{2ik\pi \frac{t}{t_0}}$  ( $k \neq 0$ ). L'expression de  $f(t)$  qui résulte de l'application du théorème des résidus est ainsi :

$$\frac{1}{a} f(t) = \frac{t}{t_0} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{2ik\pi \frac{t}{t_0}}}{2ik\pi} , \quad (7.51)$$

étant sous-entendu que  $f(t < 0) = 0$ . La série peut se calculer en passant par l'intermédiaire de la dérivée  $f'(t)$ , qui donne un peigne de Dirac, à un terme près, et a pour expression (toujours pour  $t > 0$ ) :

$$\frac{1}{a} f'(t) = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_0} \left[ 2\pi \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \delta\left(2\pi \frac{t}{t_0} - 2p\pi\right) - 1 \right] = \frac{1}{t_0} \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \delta\left(\frac{t}{t_0} - p\right) = \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \delta(t - pt_0) ; \quad (7.52)$$

l'écriture de la dernière somme ( $\mathbb{N}^*$  au lieu de  $\mathbb{Z}^*$ ) anticipe le fait que  $f$  et  $f'$  sont nulles  $\forall t < 0$ , de sorte que les  $\delta(t - pt_0)$ ,  $p < 0$ , peuvent être omis. On en déduit par intégration et après calage de la constante<sup>8</sup>, sachant que  $f(0 < t < t_0) = a$  :

$$f(t) = a \sum_{p \in \mathbb{N}} Y(t - pt_0) \quad \forall t , \quad (7.53)$$

qui a bien les mêmes valeurs que la fonction  $f(t)$  donnée en (7.49). À tout  $t$  fini, la série (7.53) ne contient qu'un nombre fini de termes non-nuls.

L'inversion peut aussi se faire comme suit. La transformée  $F(z)$  dans (7.50) se développe en série entière :

$$F(z) = \frac{a}{z(1 - e^{-zt_0})} = \frac{a}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nzt_0} . \quad (7.54)$$

Ce développement converge uniformément  $\forall z$ ,  $|e^{-zt_0}| < 1$ , soit  $\Re z > 0$ . On peut donc effectuer la transformation inverse en intégrant terme à terme ; se souvenant que  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] = Y(t)$  et compte tenu du théorème du retard donnant ici  $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-nzt_0} \frac{1}{z}\right] = Y(t - nt_0)$  :

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = a \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-nzt_0} \frac{1}{z}\right](t) = a \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{T}_{nt_0} Y(t) = a \sum_{n=0}^{+\infty} Y(t - nt_0) . \quad (7.55)$$

<sup>8</sup>Une fois connues les règles (exposées plus loin) concernant les relations entre les dérivées et les primitives d'un original et de son image, l'inversion de (7.50) se fait plus rapidement. Par ailleurs

Pour tout  $t$  fini, la série est en fait tronquée au plus grand entier  $n$  tel que  $nt_0 < t$ , soit  $E(\frac{t}{t_0})$  (tous les termes d'après sont nuls). En définitive, on retrouve bien l'expression (7.49).

Notons l'important résultat pratique, auquel il sera fait référence dans la suite :

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{z^{\alpha+1}} \quad (\Re\alpha > -1) , \quad (7.56)$$

par définition<sup>9</sup> de la fonction  $\Gamma$  d'Euler. Il en résulte :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{z^\alpha} \right] = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Y(t) \quad (\Re\alpha > 0) . \quad (7.58)$$

Maintenant, par le théorème de translation, on en déduit :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-zt_0}}{z^\alpha} \right] = \mathcal{T}_{t_0} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} Y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} Y(t - t_0) (t - t_0)^{\alpha-1} . \quad (7.59)$$

■ **Modulation** Étant donnée une fonction  $f(t)$ , sa modulée à  $\omega_0$  est  $e^{-i\omega_0 t} f(t)$ . On a :

$$\mathcal{L}[e^{-i\omega_0 t} f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-(z+i\omega_0)t} f(t) dt = \mathcal{L}[f](z + i\omega_0) \equiv F(z + i\omega_0) . \quad (7.60)$$

Plus généralement, on a :

$$\mathcal{L}[e^{-\gamma t} f(t)] = F(z + \gamma) . \quad (7.61)$$

Exemple : on trouve sans peine que la fonction  $f(t) = Y(t) \cos \omega t$  a pour transformée  $F(z) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}$ . Soit la fonction modulée  $f_{\text{mod}} = \sin \delta \omega t f(t)$  ; sa transformée de Laplace est  $F_{\text{mod}}(z) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{z - i\delta\omega}{(z - i\delta\omega)^2 + \omega^2} - \frac{z + i\delta\omega}{(z + i\delta\omega)^2 + \omega^2} \right]$ .

■ **Dilatation** Un changement d'échelle sur la variable d'une fonction  $f(t)$  définit une nouvelle fonction  $f_\lambda$  telle que  $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$ . On a :

$$\mathcal{L}[f_\lambda(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-z \frac{t'}{\lambda}} f(t') dt' = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}[f] \left( \frac{z}{\lambda} \right) \equiv \frac{1}{\lambda} F \left( \frac{z}{\lambda} \right) . \quad (7.62)$$

Fondamentalement, c'est cette propriété qui est à l'origine de la relation d'incertitude entre  $\Delta t$  et  $\Delta z$  (voir (7.41)) : plus  $f$  est ramassée, plus  $F$  est étendue.

À titre d'illustration, montrons comment la relation (7.62) permet d'obtenir astucieusement la transformée de la fonction<sup>10</sup>  $f(t) = Y(t) \ln \frac{t}{\tau}$ . En effet, posant  $F(z) = \mathcal{L}[\ln \frac{t}{\tau}]$  on a d'après (7.62) :

$$\mathcal{L}[\ln \lambda \frac{t}{\tau}] = \frac{1}{\lambda} F \left( \frac{z}{\lambda} \right) ; \quad (7.63)$$

En utilisant  $\ln \lambda \frac{t}{\tau} = \ln \lambda + \ln \frac{t}{\tau}$ , on obtient :

$$F(z) + \frac{\ln \lambda}{z} = \frac{1}{\lambda} F \left( \frac{z}{\lambda} \right) ; \quad (7.64)$$

maintenant, dérivant membre à membre par rapport à  $\lambda$  et faisant ensuite  $\lambda = 1$ , on trouve que  $F(z)$  satisfait l'équation différentielle  $zF'(z) + F(z) = -\frac{1}{z}$ , dont la solution générale est  $-\frac{1}{z} \ln \frac{z}{z_0}$ , où  $z_0$  est une constante

<sup>9</sup>On rappelle que :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \quad (\Re z > 0) . \quad (7.57)$$

<sup>10</sup>On note que cette fonction n'a pas de transformée de Fourier.

d'intégration, que l'on peut trouver en connaissant une valeur particulière de l'intégrale de définition de  $F(z)$ . Si on fait  $z = \tau^{-1}$ , on a :

$$F(z = \tau^{-1}) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \ln \frac{t}{\tau} dt = \tau \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln u du . \quad (7.65)$$

La dernière intégrale est connue et est égale à l'opposé de la constante d'Euler<sup>11</sup> traditionnellement notée  $\mathbf{C}$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \ln u du = -\mathbf{C} = -0.577 \dots . \quad (7.67)$$

D'où, notant  $\gamma = e^{\mathbf{C}} = 1.781 \dots$  comme le font la plupart des auteurs :

$$\mathcal{L}\left[\ln \frac{t}{\tau}\right] = -\frac{1}{z} \ln(\gamma \tau z) . \quad (7.68)$$

### ■ Conjugaison

$$\mathcal{L}[f^*] = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f^*(t) dt = \left[ \int_0^{+\infty} e^{-z^* t} f(t) dt \right]^* = F^*(z^*) . \quad (7.69)$$

Cette propriété joue un rôle important lorsque  $F(z)$  est une fonction multiforme, en permettant de lever toute ambiguïté sur la détermination à considérer. Par exemple (avec  $\alpha > -1$ ) :

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^\alpha dt = \frac{1}{z^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) , \quad (7.70)$$

où, à nouveau, référence a été faite à la définition de la fonction  $\Gamma$  d'Euler. Lorsque  $\alpha$  n'est pas entier, la fonction  $z^{\alpha+1}$  a un point de branchement en  $z = 0$ , mais la coupure est ici complètement déterminée par la définition même de la transformation de Laplace. En effet, compte tenu de la relation de conjugaison (7.69), la coupure est nécessairement le demi-axe réel négatif, et on a sans ambiguïté :

$$z = r e^{i\theta} , \quad z^{\alpha+1} = r^{\alpha+1} e^{i(\alpha+1)\theta} \quad (-\pi < \theta < +\pi) . \quad (7.71)$$

**■ Dérivation** Un résultat particulièrement utile en pratique est le lien entre les transformées de Laplace d'une fonction et de ses dérivées. La transformée de la dérivée  $f'$  est par définition :

$$\mathcal{L}[f'] = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t) dt \quad (\forall z \Re z > x_0) . \quad (7.72)$$

Par une intégration par parties, on a :

$$\mathcal{L}[f'] = [f(t)e^{-zt}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-z) e^{-zt} f(t) dt . \quad (7.73)$$

Le terme tout intégré vaut<sup>12</sup>  $-f(0)$ , d'où :

$$\mathcal{L}[f'] = -f(0) + z\mathcal{L}[f](z) , \quad (7.74)$$

d'où la règle :

$$\mathcal{L}[f'] = zF(z) - f(0) , \quad (7.75)$$

<sup>11</sup>On sait plus précisément (!) que  $\mathbf{C} = 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767234884\dots$ . Cette constante apparaît fréquemment en Analyse et en théorie des nombres ; on peut la définir comme :

$$\mathbf{C} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln N \right) . \quad (7.66)$$

<sup>12</sup>Il faut bien sûr comprendre que  $f(0)$  désigne la limite à droite  $f(0+)$ . Par ailleurs  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) = 0$ , puisque  $f(t)$  ne croît pas plus vite que  $e^{x_0 t}$ .

De la même façon :

$$\mathcal{L}[f''] = z\mathcal{L}[f'](z) - f'(0) = z[zF(z) - f(0)] - f'(0) = z^2F(z) - zf(0) - f'(0) , \quad (7.76)$$

et plus généralement ( $f^{(m)}(t) = \frac{d^m f}{dt^m}$ ) :

$$\mathcal{F}[f^{(m)}] = z^m F(z) - z^{m-1}f(0) - z^{m-2}f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0) = z^m F(z) - \sum_{r=0}^{m-1} z^{m-r-1} f^{(r)}(0) . \quad (7.77)$$

À titre d'exemple, soit l'équation :

$$f'(t) - \gamma f(t - t_0) = \phi(t) \quad (7.78)$$

où  $\phi(t)$  est une source donnée, et sachant que  $f(0) = f_0$  (avec toujours  $f(t < 0) = 0$ ). La transformation de Laplace donne ( $\Phi = \mathcal{L}[\phi]$ ) :

$$zF(z) - f_0 - \gamma e^{-zt_0} F(z) = \Phi(z) \iff F(z) = \frac{\Phi(z) + f_0}{z - \gamma e^{-zt_0}} . \quad (7.79)$$

La fonction cherchée est donc :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{f_0 e^{zt}}{z - \gamma e^{-zt_0}} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{\Phi(z) e^{zt}}{z - \gamma e^{-zt_0}} dz \equiv f_h(t) + f_{\text{source}}(t) . \quad (7.80)$$

Le terme contenant la source  $\Phi(z)$  ne peut être explicité davantage tant que l'on ne sait pas précisément ce

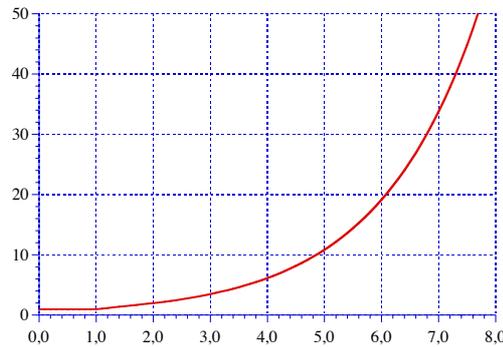


Figure 7.3: Graphe de la fonction définie en (7.83).

qu'est  $\phi(t)$ . En revanche, le terme homogène peut s'inverser en développant en série la fraction rationnelle :

$$f_h(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{f_0}{z - \gamma e^{-zt_0}} = f_0 \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\gamma}{z} e^{-zt_0} \right)^n = f_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^n \mathcal{T}_{nt_0} \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{z^{n+1}} . \quad (7.81)$$

En utilisant maintenant (7.56), il vient :

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{f_0}{z - \gamma e^{-zt_0}} = f_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^n \mathcal{T}_{nt_0} \frac{t^n Y(t)}{\Gamma(n+1)} = f_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma^n}{n!} (t - nt_0)^n Y(t - nt_0) = f_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma^n}{n!} (t - nt_0)^n . \quad (7.82)$$

Explicitement, la fonction  $f_h(t)$  définie en (7.82) est :

$$f_h(t) = \begin{cases} f_0 & \text{si } 0 < t < t_0 \\ f_0[1 + \gamma(t - t_0)] & \text{si } t_0 < t < 2t_0 \\ f_0[1 + \gamma(t - t_0) + \frac{\gamma^2}{2}(t - 2t_0)^2] & \text{si } 2t_0 < t < 3t_0 \\ \dots & \dots \end{cases} . \quad (7.83)$$

Cette fonction un peu bizarre a un saut de la  $n^{\text{ème}}$  dérivée en  $t = nt_0$  : nulle avant, la dérivée en question vaut  $\gamma^n$  à  $nt_0 + 0$ . On ne s'en douterait pas au seul vu du graphe (voir fig. 7.3) : un graphe d'apparence anodine peut se référer à une fonction un peu étrange<sup>13</sup>.

Notons que l'usage de la transformation de Laplace n'est pas ici absolument nécessaire. En effet, la solution de l'équation homogène :

$$f'(t) - \gamma f(t - t_0) = 0 \quad (7.84)$$

peut aussi se trouver de proche en proche, en raisonnant successivement dans les intervalles  $[nt_0, (n+1)t_0]$ . Pour  $0 < t < t_0$ , l'équation est  $f'(t) = 0$ , soit  $f(t) = f_0$  ; pour  $t_0 < t < 2t_0$ , l'équation est  $f'(t) - \gamma f_0 = 0$ , qui donne  $f(t) = f_0 \gamma(t - t_0) + f_0$ . Pour  $2t_0 < t < 3t_0$ , on a  $f'(t) - \gamma f(t - t_0) = 0$  avec  $f(t) = f_0 \gamma(t - t_0) + f_0$ , soit  $f'(t) - \gamma[f_0 \gamma(t - 2t_0) + f_0] = 0$ , et ainsi de suite.

Montrons maintenant comment il est possible de définir les transformées de Laplace des dérivées de la fonction  $\delta_{\Delta t}$  définie en (7.38). Notons qu'un précurseur gaussien de la fonction de Dirac  $\delta(x)$  a pour dérivée une fonction impaire croissant très vite pour  $x \lesssim 0$ , et s'annule en  $x = 0$  et décroît très vite pour  $x \gtrsim 0$ . D'où l'idée de considérer la fonction :

$$\delta_{\Delta t}^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & 0 < t < \frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{1}{\Delta t} & \frac{\Delta t}{2} < t < \Delta t \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} . \quad (7.85)$$

On trouve facilement que sa transformée de Laplace est  $\frac{1}{z\Delta t}(1 - e^{-\frac{1}{2}z\Delta t})^2$ . Dans la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{L}[\delta_{\Delta t}^{(1)}(t)](z) = z . \quad (7.86)$$

Revenant à la définition de  $\delta^{(+)}(t)$ , (7.43), et compte tenu de (7.75), on voit que l'on peut bien considérer  $\delta_{\Delta t}^{(1)}(t)$  comme la dérivée de  $\delta^{(+)}(t)$ . Plus généralement,  $z^m$  sera la transformée de Laplace de la  $m^{\text{ème}}$  dérivée  $\delta^{(+)(m)}(t)$  de  $\delta^{(+)}(t)$  :

$$\mathcal{L}[\delta^{(+)(m)}(t)](z) = z^m \iff \mathcal{L}^{-1}[z^m](t) = \delta^{(+)(m)}(t) . \quad (7.87)$$

Il est clair que ces définitions (conventionnelles) ne respectent pas la propriété (7.5) propre à toute "bonne" transformée de Laplace.

Notons enfin que (7.75) se lit aussi :

$$zF(z) = \mathcal{L}[f'](z) + f(0) , \quad (7.88)$$

de sorte que pour des bonnes fonctions (telles que leur transformée de Laplace est nulle à l'infini), on a :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = f(0) . \quad (7.89)$$

■ **Intégration** Soit  $\int_0^t f(t')dt'$  la primitive de  $f$  qui s'annule en  $t = 0$ . Sa dérivée est égale à  $f(t)$ , dont la transformée de Laplace est  $\mathcal{L}[f] = F(z)$ , mais d'après (7.74), elle vaut aussi  $z\mathcal{L}[\int_0^t f(t')dt'] - 0$ . On en déduit :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t')dt'\right](z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}[f](z) = \frac{F(z)}{z} . \quad (7.90)$$

Comme pour la transformation de Fourier, la symétrie entre  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  permet d'établir des propriétés duales. Par exemple, si on translate la transformée  $F(z)$  d'une fonction  $f(t)$ ,  $\mathcal{T}_{z_0}F(z) = F(z - z_0)$ , la transformée inverse est :

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{T}_{z_0}F] = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{zt} F(z - z_0) dz = e^{z_0 t} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} e^{z't} F(z') dz' = e^{z_0 t} \mathcal{L}^{-1}[F] . \quad (7.91)$$

<sup>13</sup>Un saut de fonction saute aux yeux, ainsi qu'une rupture de pente ; en revanche, un saut de dérivée seconde est quasi invisible, et *a fortiori* pour les dérivées d'ordre supérieur.

Ceci est en quelque sorte le théorème dual du théorème du retard. Dans le même ordre d'idée, considérons  $\int_z^\infty F(z') dz'$ , qui est la primitive de  $F(z)$  s'annulant à l'infini. On a :

$$\int_z^\infty F(z') dz' = \int_z^\infty \left( \int_0^{+\infty} e^{-z't} f(t) dt \right) dz' \quad (7.92)$$

En prenant le chemin d'intégration en  $z$  dans le demi-plan  $\Re z \geq x_1 > x_0$ , l'intégrale interne est majorée comme suit ( $f(t) < Me^{x_0 t}$ ) :

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-z't} f(t) dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(x_1-x_0)t} dt . \quad (7.93)$$

L'intégrale interne converge donc uniformément en  $z$  ; en intervertissant l'ordre des intégrations dans (7.92) :

$$\int_z^\infty F(z') dz' = \int_0^{+\infty} f(t) dt \left( \int_z^\infty e^{-z't} dz' \right) = \int_0^{+\infty} f(t) dt \frac{e^{-zt}}{t} = \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] . \quad (7.94)$$

En définitive :

$$\int_z^\infty F(z') dz' = \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] \iff \frac{f(t)}{t} = \mathcal{L}^{-1} \left[ \int_z^\infty F(z') dz' \right] . \quad (7.95)$$

Ceci est la propriété duale de (7.90). Par exemple, soit à trouver  $\mathcal{L} \left[ \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \right]$  :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \right] = \int_z^\infty \mathcal{L}[e^{-at} - e^{-bt}](z') dz' = \int_z^\infty \left[ \frac{1}{z'+a} - \frac{1}{z'+b} \right] dz' = \ln \frac{z+b}{z+a} . \quad (7.96)$$

Enfin, on peut noter que :

$$\frac{d^m F}{dz^m} = \int_0^\infty (-t)^m f(t) e^{-zt} dt \iff t^m f(t) = (-1)^m \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{d^m F}{dz^m} \right] . \quad (7.97)$$

■ **Convolution** La convolution de deux fonctions a été définie au ch. 6 ; toujours notée  $f * g$ , elle s'obtient par l'opération suivante :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t') dt' . \quad (7.98)$$

Ici, toutes les fonctions sont nulles pour  $t < 0$ , de sorte que l'intégrale de (7.98) s'étend de fait de 0 à  $t$  seulement :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t')g(t-t') dt' . \quad (7.99)$$

La transformée de  $f * g$  est :

$$\mathcal{L}[f * g](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt \int_0^t f(t')g(t-t') dt' . \quad (7.100)$$

L'interversion de l'ordre d'intégration donne :

$$\mathcal{L}[f * g](z) = \int_0^{+\infty} f(t') dt' \int_{t'}^{+\infty} g(t-t') e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} f(t') e^{-zt'} dt' \int_{t'}^{+\infty} g(t-t') e^{-z(t-t')} dt , \quad (7.101)$$

soit :

$$\mathcal{L}[f * g](z) = \int_0^{+\infty} f(t') e^{-zt'} dt' \int_0^{+\infty} g(t'') e^{-zt''} dt'' \equiv F(z) G(z) . \quad (7.102)$$

Enfin, on peut aussi montrer que la transformée de Laplace du produit de deux fonctions est la convolution de leurs transformées :

$$\mathcal{L}[fg](z) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) e^{-zt} dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z')G(z-z') dz' ; \quad (7.103)$$

Si  $x_0$  et  $x'_0$  désignent les abscisses de sommabilité de  $f$  et  $g$  respectivement, on a  $a > x_0$  et  $\Re z > x'_0 + a$ .  $\mathcal{L}[fg](z)$  est de fait holomorphe dans le demi-plan  $\Re z > x_0 + x'_0$ . Schématiquement, (7.103) résulte de la suite d'égalités :

$$\mathcal{L}[fg](z) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_0^{+\infty} dt e^{-zt} \int_{\mathcal{B}'} dz' \int_{\mathcal{B}''} dz'' e^{z't} F(z') e^{z''t} G(z'') = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\mathcal{B}'} dz' \int_{\mathcal{B}''} dz'' \frac{F(z')G(z'')}{z - z' - z''}, \quad (7.104)$$

la dernière écriture venant de l'intégration sur la variable  $t$ . Maintenant, on effectue l'intégration en  $z''$  en refermant par un demi-cercle à droite :  $F$  et  $G$  étant analytiques dans le demi-plan de droite, la seule singularité est le pôle simple en  $z''_0 = z - z'$  ; le résidu est  $-F(z')G(z - z')$ , mais comme on tourne dans le sens négatif, c'est  $(-2i\pi)$  qui apparaît dans l'expression du théorème des résidus, d'où (7.103).

## 7.4 Propriétés asymptotiques

On se doute intuitivement que, tout comme pour la transformation de Fourier, il existe une relation étroite entre le comportement de  $f(t)$  à l'infini et celui de  $F(z)$  aux petits  $z$ . Ceci est d'ailleurs évident au vu de la définition (7.2) : si  $t$  devient très grand, l'intégrand est quasi nul sauf quand  $z$  est très petit, typiquement  $|z| \lesssim t^{-1}$ . Autrement dit, les grandes valeurs de  $t$  filtrent les petites valeurs de  $|z|$ . Montrons ceci en commençant par démontrer un résultat utile en pratique :

Si une fonction  $f(t)$  admet une limite pour  $t \rightarrow +\infty$ , alors on a l'égalité :

$$f(+\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} [zF(z)], \quad (7.105)$$

où  $F(z) = \mathcal{L}[f](z)$ .

En effet, une fonction  $g(t)$  étant donnée, on a ( $G = \mathcal{L}[g]$ ) :

$$\lim_{z \rightarrow 0} G(z) = \int_0^{+\infty} g(t) dt \equiv \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^{-1}[G](t) dt, \quad (7.106)$$

d'une part. D'autre part,  $zF(z) = \mathcal{L}[f'](z) + f(0) \iff \mathcal{L}^{-1}[zF(z)] = f'(t) + \mathcal{L}^{-1}[f(0)](t)$ , d'où :

$$\lim_{z \rightarrow 0} zF(z) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^{-1}[zF(z)](t) dt = \int_0^{+\infty} [f'(t) + \mathcal{L}^{-1}[f(0)](t)] dt. \quad (7.107)$$

$f(0)$  est une constante, donc d'après (7.44),  $\mathcal{L}^{-1}[f(0)](t) = f(0)\delta^{(+)}(t)$ . D'où :

$$\lim_{z \rightarrow 0} zF(z) = \int_0^{+\infty} [f'(t) + f(0)\delta^{(+)}(t)] dt = [f(+\infty) - f(0)] + f(0) = f(+\infty). \quad (7.108)$$

L'existence de la limite  $f(+\infty)$  est une hypothèse essentielle : la fonction  $F(z) \equiv \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}$  est telle que  $\lim_{z \rightarrow 0} zF(z) = 0$ , et pourtant  $\sin \omega t$  n'a pas de limite à l'infini (tout au plus peut-on remarquer que  $\lim_{z \rightarrow 0} zF(z)$  donne une sorte "moyenne" de  $\sin \omega t$ ...)

En pratique, l'usage de la transformation de Laplace est une méthode commode et puissante pour obtenir des informations précises sur une fonction  $f(t)$  que l'on cherche à analyser. Le résultat ci-dessus permet de trouver la valeur de la limite quand on sait par ailleurs qu'elle existe. Il est aussi également intéressant de savoir comment  $f(t)$  approche sa limite (quand elle existe). Une question fréquente est ainsi la suivante : quel est le comportement de  $f(t)$  aux grands temps, alors qu'en général  $F(z)$  est une fonction trop compliquée pour que l'on sache faire exactement l'inversion ?

La réponse est apportée par une suite de théorèmes appelés *théorèmes tauberiens*, qui s'établissent tous par application de la méthode suivante : on effectue le développement de  $F(z)$  aux petits<sup>14</sup>  $z$ , et on inverse terme à terme. Par exemple, si on trouve<sup>15</sup> :

$$F(z) \simeq \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}, \quad z \rightarrow 0. \quad (7.109)$$

on peut alors montrer que :

$$f(t) \sim \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}; \quad (7.110)$$

il importe de noter que le développement ainsi obtenu est en général *asymptotique* – d'où le symbole caractéristique  $\sim$  –, et que tout renseignement *a priori* sur les propriétés analytiques de  $f$  et/ou  $F$  est donc le bienvenu. Par ailleurs, on note que ceci est *symboliquement* le résultat établi en (7.58), prolongé aux valeurs quelconques de  $\alpha$ .

La mise en œuvre de ce type d'analyse exige un peu de savoir-faire, comme le montre l'exemple suivant. Supposons que l'on obtienne d'une façon ou d'une autre la transformée de Laplace suivante :

$$F(z) = \frac{1}{1 + \Phi(z)}, \quad (7.111)$$

où  $\Phi(z)$  est une fonction compliquée interdisant l'espoir de pouvoir effectuer exactement l'inversion de Laplace. En revanche, on suppose connu le comportement de  $\Phi$  aux petits  $z$  ; admettons qu'il soit de la forme<sup>16</sup> :

$$\Phi(z) \simeq Cz^{\alpha} \quad (\alpha > 0 \text{ non-entier}), \quad (7.112)$$

ce qui autorise à écrire :

$$F(z) \simeq \frac{1}{1 + Cz^{\alpha}} \equiv F_{\text{ap}}(z), \quad z \rightarrow 0. \quad (7.113)$$

L'idée est d'approximer  $f(t)$  aux grands temps par  $\mathcal{L}^{-1}[F_{\text{ap}}] \equiv f_{\text{ap}}(t)$ .

L'erreur consisterait à dire que, quand  $z$  est petit et si  $\alpha > 0$ ,  $z^{\alpha}$  peut être négligé devant 1, d'où l'on déduirait que  $f(t) \sim \mathcal{L}^{-1}[1] = \delta^{(+)}(t) \dots$ . La règle *absolue* est de conserver *le terme multiforme dominant*. On s'en convainc en écrivant en détail l'expression de  $f_{\text{ap}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_{\text{ap}}]$  résultant d'une déformation continue de la droite de Bromwich<sup>17</sup> pour lui faire entourer la coupure de  $z^{\alpha}$ , choisie le long du demi-axe réel négatif, de façon à écrire l'inversion de Laplace sous la forme d'une intégration portant sur une variable réelle, une écriture évitant l'apparition de canulars. Après un petit calcul ( $z = xe^{\pm i\pi}$  sur les bords supérieure et inférieure de la coupure,  $x > 0$ ), on trouve finalement que  $f_{\text{ap}}(t)$  se met en effet sous la forme de l'intégrale *réelle* :

$$f_{\text{ap}}(t) = \frac{C}{\pi} \sin \alpha\pi \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{x^{\alpha}}{1 + 2Cx^{\alpha} \cos \alpha\pi + C^2 x^{2\alpha}} dx. \quad (7.114)$$

Sur cette expression, on peut maintenant sans risque exploiter le fait que  $t$  est très grand, de sorte que grâce à la "coupure" effectuée par  $e^{-zt}$ , ce qui se passe loin de l'origine est quasi-invisible. On peut ainsi écrire :

$$f(t) \sim f_{\text{ap}}(t) \sim \frac{C}{\pi} \sin \alpha\pi \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-xt} [1 + \mathcal{O}(x^{\alpha})] dx \sim \frac{C}{\pi} \sin \alpha\pi \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{t^{\alpha+1}}, \quad (\alpha > 0, t \rightarrow +\infty). \quad (7.115)$$

Notons que ce terme est bien nul pour les valeurs entières de  $\alpha$ , auquel cas la fonction  $F_{\text{ap}}(z)$  n'a pas de coupure et prend les mêmes valeurs de part et d'autre de l'axe réel négatif : l'expression (éventuellement *asymptotique*)

<sup>14</sup>Comme toujours, si  $t$  désigne le temps, parler des "petits  $z$ " veut dire que vis-à-vis d'une autre échelle de temps  $\tau$  préalablement définie, on a  $z\tau \ll 1$ .

<sup>15</sup>Les  $\alpha$  ne sont nullement tenus d'être entiers.

<sup>16</sup>Ne pas écrire  $F(z) \simeq 1 - Cz^{\alpha}$  au motif que  $z^{\alpha}$  est petit ! Une telle écriture conduirait à des objets ressemblant à des dérivées fractionnaires de  $\delta^{(+)}(t)$  et ne serait vraiment ici d'aucune utilité.

<sup>17</sup>Ce faisant, il faut bien sûr contourner les autres éventuelles singularités, d'où l'importance d'en savoir le plus possible sur les propriétés analytiques de la vraie transformée  $F(z)$  ! On suppose ici que  $F(z)$  n'a pas d'autres singularités que la coupure – ou que tous ses pôles ont une partie réelle négative, auquel cas la conclusion qui suit n'est pas altérée, une fois éteints les transitoires correspondants.

de  $f(t)$  dépend alors d'autres singularités de  $F(z)$  non envisagées dans le calcul précédent. Par ailleurs, quand  $\alpha$  augmente, il faut se poser tôt ou tard la question des termes omis dans l'expression approchée (7.112) de  $\Phi(z)$  : on pourrait tout à fait avoir quelque chose comme  $\Phi(z) \simeq Cz^\alpha + Dz^2$  auquel cas l'analyse ci-dessus peut sembler incorrecte quand  $\alpha > 2$ . À nouveau, on est tenté de penser que si  $\alpha > 2$  le terme multiforme peut être omis car infiniment petit devant le terme en  $z^2$  (au motif que  $|z|^\alpha \ll |z|^2$  si  $z$  tend vers zéro et si  $\alpha > 2$ ). C'est faux : le même type de calcul montre que les termes non-multiformes se compensent et que la puissance de  $t$  donnant le comportement asymptotique est inchangée ! Ce constat valide l'affirmation suivant laquelle il faut conserver le terme multiforme dominant (ce qui veut dire que l'on peut oublier  $z^\beta$  comparé à  $z^\alpha$  si  $\beta > \alpha$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  non-entiers), même si sa puissance (non-entière) est *supérieure* à d'autres termes en puissance entière.

Le résultat intéressant est le suivant : la présence d'une puissance *quelconque* (*i. e.* non-entière) dans  $F_{\text{ap}}(z)$  donne à  $f(t)$  un déclin en loi-puissance avec un exposant non entier. Depuis une bonne vingtaine d'années, les comportements en loi-puissance sont massivement apparus en Physique (notamment à propos des systèmes fractals caractérisés par une certaine invariance d'échelle, dans les phénomènes de diffusion anormale, pour décrire les relaxations lentes, ...). Un déclin en loi-puissance donne en général une physique qualitativement différente d'un déclin exponentiel banal : pour ce dernier, on peut sans ambiguïté définir un temps de relaxation, ce qui n'est pas possible pour une relaxation en loi-puissance quand l'exposant est petit ; à la limite, cet exposant peut être nul : c'est le cas lorsque  $f(t) \propto \frac{1}{\ln(t/\tau)}$ , la fonction  $\frac{1}{\ln x}$  décroissant plus lentement que  $x^{-\alpha}$  quel que soit  $\alpha > 0$ .

## 7.5 Quelques applications de la transformation de Laplace

### 7.5.1 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Il s'agit sans doute de l'application la plus élémentaire (et c'est d'ailleurs pour résoudre de telles équations que la transformation de Laplace – ou ses avatars – a été inventée). Soit l'équation linéaire :

$$\sum_{p=0}^n a_p \frac{d^p f}{dt^p} = \phi(t) , \quad f(t < 0) = 0 , \quad (7.116)$$

complétée par la donnée d'autant de conditions initiales que nécessaire, par exemple les  $n$  nombres  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , ...,  $f^{(n-1)}(0)$ . En prenant la transformée de Laplace, compte tenu de (7.77), il vient :

$$a_0 F(z) + \sum_{p=1}^n a_p \left[ z^p F(z) - \sum_{r=0}^{p-1} z^{p-r-1} f^{(r)}(0) \right] = \Phi(z) , \quad (7.117)$$

d'où :

$$F(z) = \frac{1}{\sum_{p'=0}^n a_{p'} z^{p'}} \left[ \Phi(z) + \sum_{p=1}^n a_p \sum_{r=0}^{p-1} z^{p-r-1} f^{(r)}(0) \right] . \quad (7.118)$$

Sur cette expression, on retrouve bien le fait que la solution s'obtient comme la somme d'une combinaison linéaire (dépendant des  $n$  conditions initiales) représentant la solution générale de l'équation homogène, et d'une solution particulière de l'équation complète qui contient la source  $\phi(t)$ . L'expression formelle de  $f(t)$  est donc :

$$f(t) = \sum_{r=0}^{n-1} f^{(r)}(0) \sum_{p=r+1}^n a_p \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{z^{p-r-1}}{\sum_{p'=0}^n a_{p'} z^{p'}} e^{zt} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{\Phi(z)}{\sum_{p'=0}^n a_{p'} z^{p'}} e^{zt} dz \equiv f_{\text{h}}(t) + f_{\text{source}}(t) . \quad (7.119)$$

La fonction au dénominateur,  $Z(z) = \sum_{p=0}^n a_p z^p$ , s'appelle<sup>18</sup> *fonction de transfert* ; sauf coïncidence accidentelle<sup>19</sup>, ses  $n$  zéros  $z_k$  donnent des pôles pour  $F(z)$ . Par le seul fait de la présence de  $Z(z)$  – et sans préjuger

<sup>18</sup> Attention, la terminologie est variable d'un auteur à l'autre : c'est parfois  $\frac{1}{Z(z)}$  qui porte ce nom. L'essentiel est de savoir, dans chaque cas, de quoi on parle.

<sup>19</sup> avec des zéros des numérateurs.

d'autres contributions venant de singularités du crochet dans (7.118) –, l'expression de  $f(t)$  contiendra donc une combinaison linéaire d'exponentielles  $e^{z_k t}$ . Si toutes les parties réelles des  $z_k$  sont négatives, ces termes tendent vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini et représentent les régimes transitoires qui disparaissent rapidement. Les autres résidus (ceux venant des singularités de  $\Phi(z)$ ) décrivent le régime forcé.

Il est possible d'expliciter le terme homogène  $f_h(t)$  de la solution (7.119). Si  $Z(z)$  n'a que des zéros simples, notés  $z_k = \gamma_k + i\omega_k$ , on peut écrire (par le théorème fondamental de l'algèbre)  $Z(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ , où les  $n$  zéros  $z_k$  sont tous différents – et apparaissent par paires conjuguées si les coefficients  $a_p$  sont tous réels. Alors, le théorème des résidus<sup>20</sup> permet d'écrire<sup>21</sup> :

$$f_h(t) = \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{r=0}^{n-1} f^{(r)}(0) \sum_{p=r+1}^n a_p \frac{z_k^{p-r-1}}{a_n \prod_{l=1, l \neq k}^n (z_k - z_l)} e^{z_k t} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{e^{z_k t}}{Z'(z_k)} \sum_{r=0}^{n-1} f^{(r)}(0) \sum_{p=r+1}^n a_p z_k^{p-r-1} . \quad (7.121)$$

Au total,  $f_h(t)$  est de la forme<sup>22</sup> :

$$f_h(t) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{e^{z_k t}}{Z'(z_k)} , \quad (7.122)$$

où les  $A_k$  incorporent les  $n$  valeurs initiales  $\{f^{(m)}(0)\}_{0 \leq m \leq n-1}$ .

Pour un système physique *stable*<sup>23</sup>, on a  $\Re z_k = \gamma_k \leq 0$ . Si tous les  $\gamma_k$  sont strictement négatifs, le terme homogène disparaît de fait pour  $t \gg \frac{1}{\min_k |\gamma_k|}$  ; au-delà de cet instant, l'oubli des conditions initiales est quasi-total et  $f(t)$  se réduit en pratique à  $f_{\text{source}}(t)$  : c'est le régime forcé.

Si un  $z_k$  est imaginaire pur<sup>24</sup>, par exemple  $z_{k_0} = i\omega_{k_0}$ , alors le terme homogène ne tend pas vers zéro ; après extinction des autres termes (transitoires, eux, puisqu'ayant  $\gamma_k \neq 0$ ), et pour des  $a_p \in \mathbb{R} \forall p$  :

$$f_h(t) \simeq 2\Re \frac{e^{i\omega_{k_0} t}}{Z'(i\omega_{k_0} t)} \sum_{r=0}^{n-1} f^{(r)}(0) \sum_{p=r+1}^n a_p (i\omega_{k_0} t)^{p-r-1} , \quad t \gg \frac{1}{\min_{k \neq k_0} |\gamma_k|} . \quad (7.123)$$

Ainsi, seules subsistent aux grands temps des oscillations non-amorties relatives au(x) pôle(s) imaginaire(s) pur(s) de  $\frac{1}{Z(z)}$ .

Clairement, la fonction  $\hat{\chi}(z) = \frac{1}{Z(z)}$  joue un rôle essentiel ; toutes les autres quantités apparaissant dans l'expression (7.119) de la solution dépendent de la *préparation* du système (les conditions initiales) et de la source externe  $\phi(t)$  qui lui est imposée : on peut donc dire que  $\hat{\chi}$  décrit la dynamique propre irréductible du système étudié<sup>25</sup>.

Le terme de source est de la forme :

$$f_{\text{source}}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{B}} \hat{\chi}(z) \Phi(z) e^{zt} dz , \quad \hat{\chi}(z) = \frac{1}{Z(z)} . \quad (7.124)$$

Cette expression montre que  $\mathcal{L}[f_{\text{source}}](z) = \hat{\chi}(z) \Phi(z)$ , donc que  $f_{\text{source}}(t)$  est la convolution  $(\mathcal{L}^{-1}[\hat{\chi}]) * \phi$ . On peut donc écrire :

$$f_{\text{source}}(t) = \int_0^t \chi(t-t') \phi(t') dt' . \quad (7.125)$$

<sup>20</sup>ou l'application systématique de :

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{z - z_k} = e^{z_k t} . \quad (7.120)$$

<sup>21</sup>Le dénominateur dans (7.121) n'est autre que la dérivée de  $Z(z)$  calculée au pôle, soit  $Z'(z_k)$ .

<sup>22</sup>Toujours dans l'hypothèse où tous les zéros de  $Z(z)$  sont simples.

<sup>23</sup>Par là, on entend ici qu'aucune divergence de nature exponentielle ne peut se produire. Alors l'abscisse de sommabilité est non-positive ; avec l'hypothèse que  $\frac{1}{Z(z)}$  est méromorphe, il en résulte que tous les pôles ont une partie réelle négative ou nulle.

<sup>24</sup>Si les coefficients  $a_p$  sont tous réels, les zéros imaginaires purs arrivent aussi par paires complexes conjuguées.

<sup>25</sup>Pour l'oscillateur harmonique  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 = \frac{1}{m} f(t)$ , on a  $X(z) = [Z(z)]^{-1} [zx(0) + \dot{x}(0) + \frac{1}{m} \Phi(z)]$  avec  $Z(z) = z^2 + \gamma z + \omega_0^2$ .

où la fonction  $\chi = \mathcal{L}^{-1}[\hat{\chi}]$  est de ce fait égale à :

$$\chi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\sum_{p=0}^n a_p z^p} \right] \equiv \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{Z(z)} \right] . \quad (7.126)$$

Faisant à nouveau l'hypothèse que les zéros  $z_k$  de  $Z(z)$  sont tous différents les uns des autres, il vient :

$$\chi(t) = Y(t) \sum_{k=1}^n \frac{e^{z_k t}}{Z'(z_k)} \equiv Y(t) \sum_{k=1}^n \Gamma_k e^{z_k t} , \quad Z(z_k) = 0 . \quad (7.127)$$

*Remarque*

Si deux  $z_k$  coïncident (on parle alors de *dégénérescence*),  $z_{k_1} = z_{k_2}$ , il existe un pôle double. Plutôt que de faire le calcul idoine du résidu, le plus simple est prendre la limite dans la forme générale (7.127), en isolant deux  $z_{k_i}$  quelconques et en imaginant que l'un tend vers l'autre, par exemple  $z_{k_2} \rightarrow z_{k_1}$ . La somme au second membre de (7.127) contient donc les deux termes à analyser plus particulièrement :

$$\frac{e^{z_{k_1} t}}{(z_{k_1} - z_{k_2})Z'(z_{k_1})} + \frac{e^{z_{k_2} t}}{(z_{k_2} - z_{k_1})Z'(z_{k_2})} , \quad (7.128)$$

soit :

$$\frac{1}{z_{k_1} - z_{k_2}} \left[ \frac{e^{z_{k_1} t}}{Z'(z_{k_1})} - \frac{e^{z_{k_2} t}}{Z'(z_{k_2})} \right] , \quad (7.129)$$

Les deux dérivées  $Z'$  dans les dénominateurs deviennent égales quand  $z_{k_2} \rightarrow z_{k_1}$  ; les autres termes se combinent en restituant formellement la dérivée de  $e^{z t}$  par rapport à  $z$  ; à la limite, on trouve pour ces deux termes :

$$\frac{e^{z_{k_1} t}}{Z'(z_{k_1})} \left[ t - \frac{Z''(z_{k_1})}{Z'(z_{k_1})} \right] . \quad (7.130)$$

Un pôle double produit donc typiquement un terme en  $t e^{z_k t}$  ; plus généralement, un pôle d'ordre  $n$  en  $z_k$  fournira des contributions  $\propto t^{n-1} e^{z_k t}$ .

L'expression (7.125) est caractéristique des systèmes *linéaires* et exprime le fait que la *réponse*<sup>26</sup> du système à une source extérieure est caractérisée par une susceptibilité<sup>27</sup>  $\chi(t)$ , laquelle ne dépend clairement que du système (c'est donc un attribut intrinsèque de ce système). On note également que cette expression contient le Principe de causalité : la réponse (effet) à l'instant  $t$  ne dépend que des valeurs de la source (cause) aux instants *antérieurs*, puisque l'intégrale n'implique que les instants  $t' \leq t$ .

Pour un système dont tous les modes sont amortis ( $\Re z_k = \gamma_k < 0 \forall k$ ), il est par ailleurs possible de définir la transformée de Fourier de  $\chi(t)$ ,  $\hat{\chi}_F$  :

$$\hat{\chi}_F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \chi(t) dt \equiv \hat{\chi}(z = -i\omega) . \quad (7.131)$$

D'après (7.127), on a :

$$\hat{\chi}_F(\omega) = \sum_{k=1}^n \frac{i\Gamma_k}{\omega - iz_k} = \sum_{k=1}^n \frac{i\Gamma_k}{\omega - (i\gamma_k - \omega_k)} . \quad (7.132)$$

Toutes les singularités de  $\hat{\chi}_F(\omega)$  sont des pôles en  $-\omega_k - i|\gamma_k|$  et sont donc toutes situées dans le demi-plan *inférieur*. L'expression de  $\chi(t)$  par la transformation de Fourier inverse,  $\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \hat{\chi}_F(\omega) d\omega$ , montre que  $\chi(t)$  est bien nulle  $\forall t < 0$  : en pareil cas, on referme le contour par un grand demi-cercle du côté  $\Im\omega > 0$  et on ne ramasse aucune singularité ; par le théorème de Cauchy, l'intégrale donnant  $\chi(t)$  est alors nulle<sup>28</sup>.

<sup>26</sup>après extinction des transitoires.

<sup>27</sup>Le vocable est à prendre dans le même sens que celui du langage ordinaire : on dit d'une personne qu'elle est *susceptible* si elle réagit au quart de tour. De la même façon, un système réagit plus ou moins à une sollicitation extérieure selon que sa susceptibilité est plus ou moins grande.

<sup>28</sup>Ces considérations pourraient faire croire qu'il existe un lien direct entre stabilité et causalité : il n'en est rien. En fait, tous les systèmes physiques, qu'ils soient stables ou instables, obéissent au Principe de causalité. Le seul fait, pour l'argument, d'utiliser la transformation de Fourier élimine *de facto* les systèmes instables et il ne reste que les systèmes qui à la fois sont stables et satisfont la causalité. Le lien apparent entre causalité et stabilité est donc illusoire.

## 7.5.2 Équations aux différences finies

Une équation aux différences finies est une équation où figurent les valeurs d'une fonction inconnue en plusieurs points séparés d'une distance finie, alors qu'une équation différentielle ordinaire, par les dérivées qu'elle contient, n'implique que des valeurs distinctes infiniment proches d'une même fonction<sup>29</sup>. Notamment, une relation de récurrence entre des quantités  $f_m, f_{m+1}, f_{m+2}, \dots$  ( $m$  entier) relève de cette catégorie : en définissant une fonction  $f(t)$  telle que  $f(t) = f_m$  quand  $m \leq t < m+1$ , la relation de récurrence implique les valeurs  $f(t), f(t+1), f(t+2), \dots$  de la fonction en différents points.

De telles équations surviennent souvent en Physique, où il est parfois utile de discrétiser une variable continue. L'exemple-type est celui où on préfère travailler sur un réseau isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , plutôt que de raisonner dans l'espace continu  $\mathbb{R}$ , quitte à revenir vers le *continuum* en bout de course, quand on analyse le problème à grande échelle ; c'est ainsi que la marche de l'ivrogne sur réseau (avec des déplacements vers les sites premiers voisins) reproduit l'équation classique de la diffusion quand on regarde le réseau de loin<sup>30</sup>. Par ailleurs, la discrétisation intervient forcément dès que l'on doit résoudre un problème numériquement : les machines ne connaissent pas les infiniment petits !

Soit donc une relation de récurrence linéaire d'ordre  $n$ , impliquant  $n+1$  termes consécutifs  $\forall m \geq 0$  :

$$\sum_{p=0}^n a_p f_{m+p} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.133)$$

d'une suite de quantités  $f_m$  définies pour  $m \geq 0$ , qu'il s'agit de trouver ; les coefficients  $a_p$  sont supposés indépendants de  $m$ , au même titre que les coefficients de (7.116) étaient supposés indépendants<sup>31</sup> de la variable  $t$ . On voit tout de suite que l'on ne pourra résoudre cette équation que moyennant la donnée supplémentaire de  $n$  valeurs "initiales", par exemple les  $n$  valeurs  $f_q, q = 0, 1, 2, \dots, n-1$  : alors la valeur suivante  $f_n$  est déterminée par l'équation (7.133), et de proche en proche toutes les valeurs  $f_{m>n}$  le sont aussi. Définissons maintenant la fonction  $f(t)$  :

$$f(t) = f_m \quad m \leq t < m+1 ; \quad (7.134)$$

alors, l'équation (7.133) devient :

$$\sum_{p=0}^n a_p f(t+p) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (7.135)$$

Pour transformer par Laplace une telle équation, il faut connaître  $\mathcal{L}[f(t+p)]$  en fonction de  $F(z) = \mathcal{L}[F](z)$ . On a par exemple :

$$\mathcal{L}[f(t+1)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t+1) dt = e^z \int_0^{+\infty} e^{-z(t+1)} f(t+1) dt = e^z \left[ F(z) - \int_0^1 e^{-zt} f(t) dt \right]. \quad (7.136)$$

On sait, par les conditions initiales, que  $f(t) = f_0$  quand  $0 \leq t < 1$  ; il vient donc :

$$\mathcal{L}[f(t+1)](z) = e^z \left[ F(z) - f_0 \int_0^1 e^{-zt} dt \right] = e^z \left[ F(z) - f_0 \frac{1 - e^{-z}}{z} \right] = e^z F(z) - f_0 \frac{e^z - 1}{z}. \quad (7.137)$$

De la même façon, on trouve ( $f_1$  est la valeur de  $f(t)$  pour  $1 \leq t < 2$ , qu'il faut aussi se donner) :

$$\mathcal{L}[f(t+2)](z) = e^{2z} F(z) - f_0 \frac{e^z(e^z - 1)}{z} - f_1 \frac{e^z - 1}{z}, \quad (7.138)$$

et ainsi de suite. Au total, la transformée de l'équation (7.133) est de la forme :

$$\left[ \sum_{p=0}^n a_p e^{pz} \right] F(z) = \Lambda(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}; z), \quad (7.139)$$

<sup>29</sup>De ce point de vue, l'équation (7.78) est une équation qui est à la fois différentielle et aux différences finies.

<sup>30</sup>Ce que l'on réalise en prenant formellement la limite nulle pour le pas du réseau.

<sup>31</sup>Dans un cas comme dans l'autre, le problème est d'une tout autre difficulté si les coefficients sont variables – en général, on ne sait pas alors trouver la solution sous une forme exploitable...

où  $\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}; z)$  est une forme linéaire des  $n$  conditions initiales, paramétrée par la variable  $z$ , que l'on sait trouver dans chaque cas particulier. La solution est donc :

$$F(z) = \frac{\Lambda(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}; z)}{\sum_{p=0}^n a_p e^{pz}} , \quad (7.140)$$

où  $Z(e^z) = \sum_{p=0}^n a_p e^{pz}$  est un polynôme de degré  $n$  dans la variable  $e^z$  et joue le rôle d'une fonction de transfert discrète.

L'analyse de l'expression (7.140) procède suivant les mêmes lignes que précédemment, à propos des équations différentielles. Elle montre un résultat général intéressant :  $f(m \leq t < m+1) \equiv f_m$  est une combinaison linéaire des  $e^{z_k m} \equiv (e^{z_k})^m$ , où  $Z(e^{z_k}) = 0$  : chaque  $f_m$  est donc de la forme  $\sum_k c_k X_k^m$  où  $Z(X_k) = 0$ , les constantes  $c_k$  étant trouvées à partir des conditions initiales. Ce résultat est l'équivalent, pour les équations aux différences finies, du résultat retrouvé dans la sous-section 7.5.1 : pour une équation telle que (7.116), les solutions sont des combinaisons linéaires des  $e^{z_k t}$  où les  $z_k$  sont les zéros<sup>32</sup> de  $Z(X) = \sum_{p=0}^n a_p X^p$ .

Bien sûr, la méthode fonctionne aussi pour une équation inhomogène, du genre :

$$\sum_{p=0}^n a_p f_{m+p} = \phi_m , \quad m = 0, 1, 2, \dots , \quad (7.141)$$

en définissant la fonction  $\phi(t) = \phi_m$  si  $m \leq t < m+1$ .

Cette technique, appliquée à l'équation du second ordre ( $n = 2$ ) :

$$f_{m+2} - 5f_{m+1} + 6f_m = 0 , \quad f_0 = 0, f_1 = 1 , \quad (7.142)$$

donne la solution  $f_m = 3^m - 2^m$  (qui est bien une combinaison linéaire des zéros de  $Z(X) = X^2 - 5X + 6$ ). Pour l'équation inhomogène :

$$f_{m+2} - 5f_{m+1} + 6f_m = 4^m , \quad (7.143)$$

on trouve  $f_m = \frac{1}{2}(4^m - 2^m)$ .

Traisons un dernier exemple simple, montrant le lien entre équations aux différences finies et équations différentielles, et attirant l'attention sur une difficulté propre aux équations non-linéaires. Soit l'équation linéaire :

$$f_{m+1} = \alpha f_m , \quad f_0 \text{ donné} . \quad (7.144)$$

Bien évidemment, on voit immédiatement que la solution est  $f_m = \alpha^m f_0$ . L'exercice consiste à retrouver ce résultat en utilisant la transformation de Laplace.

Pour la clarté des grandeurs introduites,  $t$  désigne le temps ; on définit maintenant la fonction  $f(t)$  :

$$f(t) = f_m \quad m\Delta t \leq t < (m+1)\Delta t \quad (7.145)$$

où  $\Delta t$  est un intervalle de temps donné, ce qui permet de récrire (7.144) comme suit :

$$f(t + \Delta t) = \alpha f(t) , \quad f_0 \text{ donné} . \quad (7.146)$$

On a :

$$\mathcal{L}[f(t + \Delta t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t + \Delta t) dt = e^{z\Delta t} \int_0^{+\infty} e^{-z(t+\Delta t)} f(t + \Delta t) dt = e^{z\Delta t} \left[ F(z) - \int_0^{\Delta t} e^{-zt} f(t) dt \right] \quad (7.147)$$

soit :

$$\mathcal{L}[f(t + \Delta t)](z) = e^{z\Delta t} \left[ F(z) - f_0 \int_0^{\Delta t} e^{-zt} dt \right] = e^{z\Delta t} \left[ F(z) - f_0 \frac{1 - e^{-z\Delta t}}{z} \right] = e^{z\Delta t} F(z) - f_0 \frac{e^{z\Delta t} - 1}{z} . \quad (7.148)$$

<sup>32</sup>On dit parfois que  $Z(X) = 0$  est l'équation caractéristique de l'équation différentielle.

Au total, la transformation de Laplace sur (7.146) produit :

$$e^{z\Delta t}F(z) - f_0 \frac{e^{z\Delta t} - 1}{z} = \alpha F(z) \iff F(z) = f_0 \frac{1 - e^{-z\Delta t}}{z(1 - \alpha e^{-z\Delta t})} , \quad (7.149)$$

d'où :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ f_0 \frac{1 - e^{-z\Delta t}}{z(1 - \alpha e^{-z\Delta t})} \right] . \quad (7.150)$$

En développant en série la fraction rationnelle en  $e^{-z\Delta t}$ , il vient :

$$f(t) = f_0 \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1 - e^{-z\Delta t}}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-nz\Delta t} \right] . \quad (7.151)$$

Utilisant  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-nz\Delta t}}{z} \right] = Y(t - n\Delta t)$ , on trouve :

$$f(t) = f_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n [Y(t - n\Delta t) - Y(t - (n+1)\Delta t)] . \quad (7.152)$$

Ceci est une fonction en escalier, dont la marche située entre  $n\Delta t$  et  $(n+1)\Delta t$  est à la hauteur  $\alpha^n f_0$ . On peut donc aussi l'écrire ( $E$  désigne toujours la partie entière) :

$$f(t) = f_0 \alpha^{E(\frac{t}{\Delta t})} . \quad (7.153)$$

En quelque sorte,  $f(t)$  est une exponentielle discrétisée, décroissante si  $\alpha < 1$ , croissante dans le cas contraire.

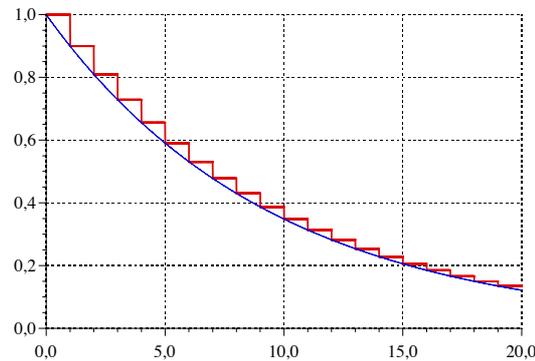


Figure 7.4: Variations comparées de la fonction (7.153) et de sa limite en temps continu (l'abscisse est  $t/\Delta t$ ,  $f_0 = 1$ ).

Ceci peut aussi se voir en envisageant la limite continue en temps de l'équation aux différences, qui devient différentielle dans cette limite. Clairement, pour que ceci soit possible, il faut simultanément faire tendre  $\Delta t$  vers zéro et  $\alpha$  vers 1, puisque si  $\Delta t$  devient très petit,  $f(t + \Delta t)$  tend vers<sup>33</sup>  $f(t)$ . D'ailleurs, il est évident que la limite différentielle n'existe que si  $\alpha$  est de la forme :

$$\alpha \rightarrow 1 + \gamma \Delta t \quad \Delta t \rightarrow 0 ; \quad (7.154)$$

ceci assure que pour les petits  $\Delta t$ , (7.146) prend l'aspect d'une équation "pré-différentielle".

Effectuons donc la limite suivant cette procédure dans la solution (7.149). En développant l'exponentielle  $e^{z\Delta t} \simeq 1 + z\Delta t + \mathcal{O}(t^{\geq 2})$  et tenant compte de (7.154), il vient :

$$F(z) \rightarrow f_0 \frac{z\Delta t}{z[z\Delta t - \gamma\Delta t]} = f_0 \frac{1}{z - \gamma} \equiv F_{\text{cont}}(z) . \quad (7.155)$$

<sup>33</sup>On fait bien sûr l'hypothèse que  $f$  est une fonction continue.

La fonction  $f_{\text{cont}}(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_{\text{cont}}]$  est  $f_0 e^{\gamma t}$ , c'est bien la solution de la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  de l'équation aux différences (7.146), qui devient alors  $f'(t) = \alpha f$ . C'est aussi la limite de  $\alpha^n = e^{n \ln(1+\gamma\Delta t+\dots)}$  (voir (7.153)) dans la limite  $n \rightarrow +\infty$ ,  $n\Delta t = C^{\text{ste}} = t$ , avec  $\lim \alpha^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \gamma \frac{t}{n})^n = e^{\gamma t}$ .  $\gamma$  est  $\geq 0$  selon que  $\alpha \geq 1$ .

On voit ainsi que les deux équations cousines, aux différences et différentielles, donnent essentiellement le même résultat, quand on regarde la solution de la première à grande échelle (vu de loin, le  $\Delta t$  est petit). Cette coïncidence est très rassurante, mais *elle ne tient que pour les équations linéaires*. Il est possible de fabriquer des équations non-linéaires très simples, dont les deux versions discrète et continue n'ont pas du tout les mêmes solutions (dans la version discrète, on assiste souvent à la génération spontanée de points dits singuliers, qui changent radicalement la nature des solutions<sup>34</sup>) ; l'inverse peut aussi se produire : il arrive aussi que la solution discrète soit régulière partout, alors que sa cousine continue a des comportements singuliers (voir l'exemple de la note 34). Ce fait peut légitimement déclencher quelque inquiétude, car les équations non-linéaires sont le plus souvent insolubles analytiquement : l'obligation de recourir à un calcul sur ordinateur (pour lequel la discrétisation est une nécessité incontournable) permet de suspecter d'avance de grandes difficultés pour ne pas dénaturer le problème posé et en trouver bel et bien les solutions. En la matière, un immense savoir-faire est clairement de rigueur, et il est essentiel de procéder à des analyses locales des solutions qui permettent de trancher dans le vif si la machine fournit des solutions délirantes.

### 7.5.3 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre une fonction de plusieurs variables et ses dérivées. Un chapitre ultérieur du cours sera consacré à de telles équations ; il s'agit ici, à propos d'un exemple particulier, de montrer comment les transformations intégrales de Laplace et de Fourier permettent d'obtenir rapidement la solution.

L'exemple choisi est celui du propagateur d'une particule libre en Mécanique quantique, c'est-à-dire de l'objet mathématique qui permet de construire la fonction d'onde à tout instant, connaissant la fonction d'onde au départ, à l'instant  $t_0$  pris comme origine des temps.

On verra dans le cours de Mécanique quantique, que la fonction d'onde  $\Psi(x, t)$  pour une particule libre de masse  $m$  se déplaçant dans  $\mathbb{R}$  obéit à l'équation de Schrödinger<sup>35</sup> :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) , \quad (7.156)$$

où  $\hbar$  est la célèbre constante de Planck divisée par  $2\pi$ . C'est une équation du premier ordre en temps (et du second ordre en espace). Autrement dit, pour trouver  $\Psi(x, t)$  à un instant quelconque, il faut se donner un état initial  $\Psi(x, t_0)$ . Cette équation est en un sens infiniment plus compliquée qu'une équation différentielle : on peut dire qu'elle nécessite en fait une *infinité* de conditions initiales, toutes les valeurs du champ  $\Psi$  au départ, contenues dans la donnée de la *fonction*  $\Psi(x, t_0)$ .

Il se révèle commode d'introduire<sup>36</sup> le *propagateur*<sup>37</sup>  $U(x, t; x_0, t_0)$  qui relie l'état à l'instant  $t$  à l'état initial selon :

$$\Psi(x, t) = \int U(x, t; x_0, t_0) \Psi(x_0, t_0) dx_0 , \quad (7.157)$$

<sup>34</sup>On rencontrera des exemples au ch. 9, mais on peut déjà en donner un. L'équation  $f' = f^2 - f$ ,  $f(0) = 2$ , a pour solution  $f(x) = \frac{2}{2-e^x}$ , qui diverge en  $x_0 = \ln 2$ . D'un autre côté, l'équation aux différences  $a_{n+1} = a_n^2$  s'écrit aussi  $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n$  et partage un cousinage évident avec l'équation différentielle. Pourtant, ses solutions sont  $a_n = 2^{2^n}$  et sont *finies* quel que soit  $n$  !

<sup>35</sup>La particule étant libre, il n'y a pas d'énergie potentielle  $V(x)$  dans (7.156).

<sup>36</sup>Une fois connu le propagateur pour un problème donné, le calcul de  $\Psi(x, t)$  se réduit à une simple intégration avec l'état initial donné, conformément à (7.157).

<sup>37</sup>La terminologie est fluctuante : le propagateur s'appelle aussi fonction de Green ; par ailleurs, le terme *propagateur* est aussi utilisé aussi dans une acception plus vaste : dans tous les cas, il s'agit d'une représentation ou d'une autre de ce qui permet de relier explicitement un "ancêtre" à sa descendance. Il doit être clair que la notion de propagateur n'est pas spécifiquement quantique : d'une façon générale, le propagateur est l'objet qui fait évoluer le système dans l'espace-temps.

cette relation tenant quel que soit  $\Psi(x, t_0)$  ; le noyau  $U(x, t; x_0, t_0)$  est en quelque sorte une “matrice continue”. Compte tenu de (7.156), le propagateur satisfait l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(x, t; x_0, t_0) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t; x_0, t_0) \quad (7.158)$$

avec la condition initiale :

$$U(x, t = t_0; x_0, t_0) = \delta(x - x_0) , \quad (7.159)$$

exprimant que  $U(x, t_0; x_0, t_0)$  est le noyau de l'opérateur identité  $\mathbf{1}$  (entre  $t_0$  et  $t = t_0$ , le système n'évolue et reste ce qu'il est). Physiquement,  $U(x, t; x_0, t_0)$  ne dépend que de la *différence* des temps : on peut donc toujours prendre  $t_0 = 0$  ; dans la suite, on pose :

$$U(x, t; x_0, t_0 = 0) \equiv U(x, t; x_0) . \quad (7.160)$$

Il est facile de voir que l'intégrale de  $|\Psi(x, t)|^2$  est une constante du mouvement (la probabilité totale se conserve, la particule ne “disparaît” pas, elle est toujours forcément quelque part), ce qui est assuré<sup>38</sup> par le fait que  $U$  est un opérateur unitaire satisfaisant :

$$U^{-1}(x, t; x_0) = U^*(x, t; x_0) = U(x, -t; x_0) . \quad (7.162)$$

Il suffit donc de déterminer une fonction  $U_+$  égale à  $U$  si  $t > 0$  et nulle si  $t < 0$  ; le noyau  $U$  à  $t < 0$  s'en déduit par (7.162).  $U_+$  est appelé propagateur causal, ou avancé.

L'équation (7.158), écrite pour  $U_+$ , se résout aisément en effectuant successivement la transformation de Laplace en  $t$ , puis celle de Fourier en  $x$ . On commence par poser<sup>39</sup> :

$$K(x, z; x_0) = \int_0^{+\infty} dt U_+(x, t; x_0) e^{-zt} \quad (\Re z > 0) . \quad (7.163)$$

La restriction<sup>40</sup>  $\Re z > 0$  est suffisante<sup>41</sup> ; il est possible de s'en convaincre intuitivement comme suit.  $U_+$  est un opérateur unitaire dont toutes les valeurs propres sont de module égal à 1 et sont bornées. L'intégrale (7.163) converge dès que  $z$  a une partie réelle finie, aussi petite soit-elle ;  $K(x, z; x_0)$  n'a donc aucune singularité dans le demi-plan de droite  $\Re z > 0$ .

La transformée de Laplace de l'équation (7.158) pour  $U_+(x, t; x_0)$  se construit suivant la règle (7.74) et s'écrit :

$$i\hbar [z K(x, z; x_0) - \delta(x - x_0)] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, z; x_0) , \quad (7.164)$$

de sorte que l'équation pour  $K$  reste différentielle en  $x$ . Réarrangeant les termes :

$$z K(x, z; x_0) - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, z; x_0) = \delta(x - x_0) . \quad (7.165)$$

Pour résoudre (7.165), il est maintenant commode de faire une transformation de Fourier en  $x$  et de poser :

$$K(x, z; x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}(k, z; x_0) e^{-ikx} dk \iff \mathcal{U}(k, z; x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx K(x, z; x_0) e^{+ikx} . \quad (7.166)$$

La transformée de Fourier de  $\delta(x - x_0)$  est  $e^{ikx_0}$  ; la transformée de Fourier de l'équation (7.165) est donc :

$$z \mathcal{U}(k, z; x_0) + \frac{i\hbar}{2m} k^2 \mathcal{U}(k, z; x_0) = e^{ikx_0} , \quad (7.167)$$

<sup>38</sup>La conservation de la probabilité totale est assurée par le fait que de l'équation fondamentale (7.156) on peut *déduire* une équation de conservation locale entre une densité  $\rho$  et un courant  $\vec{j}$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 , \quad (7.161)$$

où  $\rho = \Psi^* \Psi \equiv |\Psi|^2$  et  $\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} [\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*]$ .

<sup>39</sup>Pour être tout à fait explicite, il conviendrait de noter  $K_+$  cette transformée de Laplace. On se souviendra qu'elle est reliée au propagateur avancé  $U_+$ .

<sup>40</sup> $\Re$  désigne la partie réelle.

<sup>41</sup>Et non pas  $\Re z \geq s_0 > 0$ .

d'où l'on déduit immédiatement :

$$\mathcal{U}(k, z; x_0) = \frac{e^{ikx_0}}{z + \frac{i\hbar k^2}{2m}} . \quad (7.168)$$

Soit  $\mathcal{K}(k, t; x_0)$  la transformée de Laplace inverse de  $\mathcal{U}(k, z; x_0)$  ; comme  $\mathcal{L}^{-1}(z+a)^{-1} = e^{-at}$  :

$$\mathcal{K}(k, t; x_0) = e^{ikx_0} e^{-i \frac{\hbar k^2}{2m} t} . \quad (7.169)$$

On note au passage la relation :

$$[\mathcal{K}(k, t; x_0)]^* = \mathcal{K}(-k, -t; x_0) , \quad (7.170)$$

qui exprime la symétrie dans le renversement du temps : en renversant le temps et la vitesse ( $\hbar k$  étant l'impulsion  $mv$  de la particule, inverser la vitesse c'est changer  $k$  en son opposé), on obtient le complexe conjugué de  $\mathcal{K}$ . Ceci est en accord avec le fait que si  $\Psi(x, t)$  est solution de l'équation de Schrödinger,  $\Psi(x, -t)^*$  l'est aussi. Pour avoir enfin  $U_+(x, t; x_0)$  il suffit maintenant de prendre la transformée de Fourier inverse de  $\mathcal{K}$  ; compte tenu de (7.169) :

$$U_+(x, t; x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} e^{ikx_0} e^{-i \frac{\hbar k^2}{2m} t} . \quad (7.171)$$

Cette intégrale gaussienne se calcule aisément, par un changement de variable élémentaire. On trouve ainsi finalement :

$$U_+(x, t; x_0) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar t}} e^{i\frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{2t}} \equiv U(x, t; x_0) \quad \forall t > 0 \quad (7.172)$$

qui est donc le propagateur  $U$  pour  $t > 0$ . On reconnaît dans l'exponentielle donnant  $U_+$  l'action classique  $S_{\text{class}} = \frac{m(x-x_0)^2}{2t}$  de la particule libre partie de  $x_0$  à  $t = 0$  et arrivée en  $x$  à l'instant  $t$  – un fait pour le moins surprenant à première vue, qui est le point de départ de la formulation de Feynman de la Mécanique quantique dans le formalisme de l'intégrale de chemins (voir aussi la remarque de la note 42).

Pour avoir  $U$  pour  $t < 0$ , il suffit d'utiliser l'unitarité de  $U$  (voir (7.162)). Il vient ainsi :

$$U(x, t < 0; x_0) = [U_+(x, -t; x_0)]^* = \left[ \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar t}} e^{i\frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{2t}} \right]^* . \quad (7.173)$$

La branche de la racine carrée est celle qui prend des valeurs réelles positives sur l'axe réel positif ; il en résulte que :

$$(\sqrt{z})^* = \sqrt{z^*} \quad (7.174)$$

et finalement :

$$U(x, t < 0; x_0) = \sqrt{\frac{m}{2(-i)\pi\hbar(-t)}} e^{-i\frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{2(-t)}} = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar t}} e^{i\frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{2t}} . \quad (7.175)$$

Ainsi, l'expression de  $U$  est la même, que  $t$  soit positif ou négatif<sup>42</sup> ; rétablissant  $t_0$ <sup>43</sup> :

$$U(x, t; x_0, t_0) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}} \equiv \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{1}{\hbar} S_{\text{class}}(x, x_0; t, t_0)} \quad \forall t . \quad (7.177)$$

Il n'est pas difficile – en se souvenant de l'expression du précurseur gaussien de la fonction de Dirac (et en effectuant le prolongement analytique) –, de se convaincre que  $\lim_{t \rightarrow t_0} U(x, t; x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$ , comme il se doit (un bon exemple d'ailleurs où la méthode de la phase stationnaire se confond avec la méthode du col).

<sup>42</sup>Indépendamment du préfacteur contenant la constante de Planck, il est remarquable que la fonction action *classique*  $S_{\text{class}}$  apparaisse aussi simplement dans l'expression du propagateur. Il n'en va pas toujours ainsi, mais c'est vrai pour tous les Hamiltoniens au plus quadratiques en  $\vec{p}$  et  $\vec{r}$  (par exemple : oscillateur harmonique, particule accélérée par un champ constant). Ce fait, très surprenant de prime abord, est le point de départ de la formulation de Feynman en intégrale fonctionnelle de la Mécanique quantique.

<sup>43</sup>La généralisation à trois dimensions d'espace est immédiate :

$$U(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = \left( \frac{m}{2i\pi\hbar(t-t_0)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m}{\hbar} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{2(t-t_0)}} . \quad (7.176)$$

Ce résultat fournit aussi le propagateur pour l'équation de diffusion libre d'une particule *classique* ( $\hbar = 0$ ). En effet, en conséquence de la loi de Fick affirmant que le courant est proportionnel au gradient de la densité,  $j = -D \frac{\partial P}{\partial x}$ , l'équation de conservation  $\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div } j = 0$  donne l'équation de diffusion (en une dimension d'espace<sup>44</sup>) :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) , \quad (7.178)$$

où  $P(x, t)$  et la densité de probabilité (c'est cette fois une quantité positive ou nulle, alors que  $\Psi(x, t)$ , *essentiellement* à valeurs complexes, est une *amplitude de probabilité*). Les deux équations (7.156) et (7.178) sont formellement identiques, on passe de l'une à l'autre par la substitution :

$$\frac{i\hbar}{2m} \rightarrow D \iff \frac{m}{\hbar} \rightarrow \frac{i}{2D} . \quad (7.179)$$

Il en résulte que le propagateur pour l'équation de la diffusion, usuellement noté  $W$ , s'obtient de l'expression (7.177) en y faisant la substitution ci-dessus et vaut donc :

$$W(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}} . \quad (7.180)$$

Il est intéressant de noter que les deux équations (7.156) et (7.178), quoique formellement identiques, produisent des comportements en temps radicalement différents. L'équation de Schrödinger est invariante par renversement du temps<sup>45</sup>, alors que l'équation de la diffusion donne une évolution irréversible (la tache d'encre à la surface de l'eau s'étale toujours !). La différence tient à l'absence ou à la présence du nombre imaginaire fondamental  $i$ , un détail qui a donc son importance...

## 7.5.4 Réduction de l'ordre d'une équation différentielle

Afin de montrer l'utilité de la transformation de Laplace pour ce propos, le mieux est de traiter un exemple<sup>46</sup>. Soit l'équation différentielle du second ordre :

$$-\psi'' + \frac{1}{a^3} x \psi(x) = k_0^2 \psi , \quad \psi(x < 0) = 0 . \quad (7.181)$$

Cette équation apparaît en Mécanique quantique : c'est l'équation aux valeurs propres donnant les états propres  $\psi(x)$  d'une particule chargée négativement, soumise à un champ électrique constant dirigé vers les  $x$  croissants, et confinée sur le demi-axe  $\mathbb{R}_+$ .  $a$  et  $k_0$  sont des réels. Physiquement, il est évident que seuls des états liés peuvent exister<sup>47</sup>, d'énergie positive (c'est pourquoi  $k_0$  est réel<sup>48</sup>), et on ne s'intéresse donc qu'aux solutions  $\psi(x)$  qui tendent vers zéro quand  $x \rightarrow +\infty$ .

L'exemple qui suit est donné à titre d'illustration, car on sait résoudre directement l'équation<sup>49</sup> (7.181). Les solutions qui s'annulent à l'origine et à l'infini sont les fonctions  $\psi_n(x)$  définies comme suit<sup>50</sup> :

$$\psi_n(x) = C_n \text{Ai} \left( \frac{x}{a} - (k_0 a)^2 \right) \quad (n \in \mathbb{N}^*) , \quad x > 0 , \quad (7.183)$$

<sup>44</sup>La généralisation à  $\mathbb{R}^3$  est immédiate : la loi de Fick s'écrit alors  $\vec{j} = -\vec{\nabla} P$  et l'équation de conservation est  $\frac{\partial P}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ . L'équation de la diffusion qui en résulte est alors  $\frac{\partial P}{\partial t} P(\vec{r}, t) = D \Delta P(\vec{r}, t)$  où  $\Delta$  est le Laplacien.

<sup>45</sup>On verra qu'un *paquet d'ondes* s'étale toujours, mais c'est simplement parce que la relation de dispersion n'est pas linéaire (au contraire du champ électromagnétique), de sorte que les différentes composantes n'avancent pas à la même vitesse (la vitesse de groupe n'est pas égale à la vitesse de phase).

<sup>46</sup>Une variante de cette méthode permet de résoudre généralement les équations différentielles dont les coefficients sont au plus des fonctions linéaires de la variable. Sur cette méthode (dite aussi *Méthode de Laplace*), voir par exemple L. Landau & E. Lifchitz, *Mécanique Quantique*, Appendice p. 691 (Ed. Mir, Moscou, 1967).

<sup>47</sup>La particule est soumise à deux effets antagonistes : le mur en  $x = 0$  sur lequel elle ne peut que se réfléchir et la renvoie vers  $x > 0$ , et le champ qui la tire vers l'origine.

<sup>48</sup>L'énergie  $E$  de la particule est  $E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ . Elle est forcément supérieure au minimum d'énergie potentielle, ici égal à zéro.

<sup>49</sup>En effet, en posant  $\psi(x) = f(X)$  avec  $X = \frac{x}{a} - (k_0 a)^2$ , l'équation (7.181) s'écrit :

$$f''(X) = X f(X) , \quad (7.182)$$

qui est précisément l'équation dite d'Airy. La condition aux limites  $\psi(x = 0) = 0$  se traduit par  $f(-(k_0 a)^2) = 0$  : les  $-(k_0 a)^2$  sont donc bien les zéros de la bonne fonction d'Airy, celle qui, en outre, s'annule à l'infini (on cherche des états liés) – d'où la solution (7.183).

<sup>50</sup> $C_n$  est une constante de normalisation.

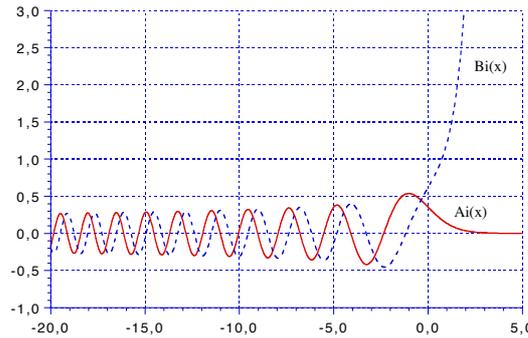


Figure 7.5: Les deux solutions conventionnelles linéairement indépendantes de l'équation d'Airy (7.182).

où  $\text{Ai}(x)$  est une fonction spéciale répertoriée (c'est l'une des deux fonctions conventionnellement appelées fonctions d'Airy).  $\text{Ai}(x)$  tend vers zéro quand  $x \rightarrow +\infty$  et oscille autour de zéro pour  $x$  négatif (voir fig. 7.5). Géométriquement, les graphes des  $\psi_n(x)$  s'obtiennent donc à partir de celui de la seule et unique fonction  $\text{Ai}(x)$ , en le translatant vers la droite de sorte que son premier zéro, puis son deuxième zéro,  $\dots$ , coïncide avec l'origine, et en effaçant toute la partie située à gauche. Les fonctions  $\psi_n(x)$  sont orthogonales au sens où<sup>51</sup> :

$$\int_0^{+\infty} \psi_n^*(x) \psi_{n'}(x) dx \equiv C_n C_{n'} \int_0^{+\infty} \text{Ai}\left(\frac{x}{a} - (k_{0,n}a)^2\right) \text{Ai}\left(\frac{x}{a} - (k_{0,n'}a)^2\right) dx = \delta_{nn'} . \quad (7.184)$$

Ceci n'est pas facile à démontrer, mais résulte de l'orthogonalité de deux fonctions propres associées à deux valeurs propres distinctes.

Le décalage de l'argument dans l'expression (7.183) assure que  $\psi_n(0) = 0$  car les  $-(k_{0,n}a)^2$  sont précisément les abscisses des zéros de  $\text{Ai}(x)$  (c'est comme toujours une condition aux limites, ici  $\psi(x=0) = 0$ , qui produit la quantification) ; les trois premières valeurs sont  $(k_{0,1}a)^2 = 2.33810743\dots$ ,  $(k_{0,2}a)^2 = 4.087949445\dots$ ,  $(k_{0,3}a)^2 = 5.520559819\dots$  et les fonctions correspondantes sont représentées sur la fig. 7.6. On note que si  $\psi_n(x)$  est continue en  $x = 0$  (la fonction d'onde est *toujours* continue), sa dérivée ne l'est pas : elle est nulle en  $0-$ , finie en  $0+$ , en conséquence du mur infranchissable vers les  $x$  négatifs, traduit par le saut infini de potentiel en  $x = 0$ . Les énergies de la particule sont donc les quantités discrètes  $E_n = \frac{\hbar^2 k_{0,n}^2}{2m}$ .

L'équation (7.181) permet de trouver directement le comportement des solutions à l'infini<sup>52</sup> ; en effet, pour  $x$  "grand" (à préciser le cas échéant), on peut oublier  $k_0^2 \psi$  comparé à  $x\psi$  ; l'équation (7.181) est alors approximativement :

$$-\psi'' + \frac{1}{a^3} x \psi(x) \simeq 0 . \quad (7.185)$$

Il s'agit de trouver le comportement dominant de  $\psi(x)$  à l'infini. En allant du plus simple au plus compliqué, on constate qu'un comportement du genre  $x^{-\alpha}$  ne convient pas : on ne peut pas équilibrer les termes dominants. En revanche, un comportement du genre exponentielle étirée convient :

$$\psi \simeq e^{-\lambda x^\alpha} \implies \psi''(x) \simeq [-\lambda \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \lambda^2 \alpha^2 x^{2\alpha-2}] e^{-\lambda x^\alpha} . \quad (7.186)$$

Les termes dominants satisfont (7.185) à condition de prendre  $2\alpha - 2 = 1$ , soit  $\alpha = \frac{3}{2}$  et  $\lambda = \frac{2}{3} a^{-3/2}$ . Les solutions cherchées se comportent donc comme :

$$\psi(x) \simeq C e^{-\frac{2}{3} \left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}} \equiv \psi_{\text{as}}(x) , \quad (7.187)$$

où  $C$  est une constante indéterminée, visiblement proportionnelle<sup>53</sup> à  $\psi'(0)$ . C'est cette information qui, convenablement traduite dans le langage de Laplace, permettra d'achever la résolution du problème.

<sup>51</sup> Comme pour tout état lié à une dimension, les fonctions propres sont en fait réelles, à une phase constante près, qui n'a aucun sens physique.

<sup>52</sup> On sait aussi le faire sur la définition conventionnelle de  $\text{Ai}(x)$ , mais c'est assez délicat. L'autre fonction d'Airy, notée  $\text{Bi}(x)$ , diverge exponentiellement quand  $x \rightarrow +\infty$  (voir fig. 7.5).

<sup>53</sup> De toute façon, l'équation (7.181) est homogène : elle ne permet donc de trouver  $\psi(x)$  qu'à un facteur près. Tout facteur arbitraire se reporte à la fois sur  $C$  et  $\psi'(0)$ , ce qui convainc que seul le rapport  $\psi'(0)/C$  est pertinent.

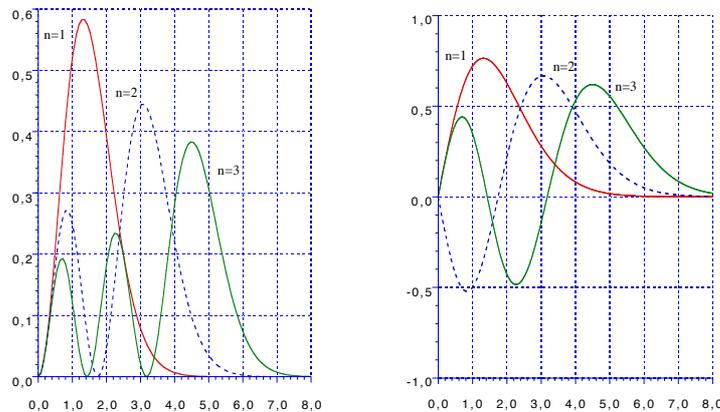


Figure 7.6: À gauche : premiers états propres normalisés  $\psi_n(x)$  ( $\int_0^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$ ) de la particule (généralement donnés en (7.183)) ; l'état fondamental ne s'annule pas pour  $x > 0$ , le premier état excité s'annule une fois, le second deux fois, etc. À droite les densités  $|\psi_n(x)|^2$  correspondantes. L'abscisse est  $\frac{x}{a}$ . Plus  $n$  augmente, plus le *maximum maximorum* de la densité se décale vers la droite : plus l'état est excité, plus la position moyenne de la particule s'éloigne de l'origine.

En posant  $\Psi(k) = \mathcal{L}[\psi](k) = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\psi(x)dx$ , la transformation de Laplace appliquée à l'équation (7.181) donne<sup>54</sup> :

$$-[k^2\Psi(k) - \psi'(0)] + \frac{1}{a^3}\mathcal{L}[x\psi(x)](k) = k_0^2\Psi(k) . \quad (7.188)$$

Or on a :

$$\mathcal{L}[x\psi(x)](k) = \int_0^{+\infty} e^{-kx}[x\psi(x)] dx = -\frac{d}{dk} \int_0^{+\infty} e^{-kx}\psi(x) dx = -\frac{d}{dk}\Psi(k) . \quad (7.189)$$

L'équation (7.188) se transforme en :

$$\frac{1}{a^3}\Psi'(k) + (k^2 + k_0^2)\Psi(k) = \psi'(0) . \quad (7.190)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du *premier* ordre : la transformation de Laplace réduit d'une unité l'ordre de l'équation à résoudre. La solution de (7.190) est :

$$\Psi(k) = a^3\psi'(0)e^{-a^3(\frac{k^3}{3} + k_0^2k)} \int_K^k e^{a^3(\frac{k'^3}{3} + k_0^2k')} dk' , \quad (7.191)$$

où  $K$  est une constante d'intégration.

Pour trouver  $K$ , on peut utiliser le raisonnement suivant. Les propriétés de  $\psi(x)$  à l'infini sont reliées au comportement de  $\Psi(k)$  pour  $k \sim 0$ . Par conséquent, la transformée de Laplace  $\Psi_{\text{as}}$  de la forme asymptotique (7.187) se comporte près de  $k = 0$  comme la vraie transformée de Laplace  $\Psi(k)$ . On a :

$$\Psi_{\text{as}}(k) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}(\frac{x}{a})^{3/2}} e^{-kx} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}(\frac{x}{a})^{3/2}} (1 - kx + \dots) dx . \quad (7.192)$$

En particulier, on sait calculer l'intégrale<sup>55</sup> pour  $k = 0$  :

$$\Psi_{\text{as}}(k = 0) = C \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}(\frac{x}{a})^{3/2}} dx = aC \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) . \quad (7.193)$$

<sup>54</sup>La fonction d'onde est toujours continue ; nulle à gauche, elle est donc nulle en  $x = 0$ , c'est pourquoi le terme  $-k\psi(0)$  venant de  $\mathcal{L}[\psi']$  est omis. Tant que le potentiel n'a que des sauts finis, la dérivée de la fonction d'onde est elle aussi toujours continue ; elle ne présente un saut (fini) que lorsque le potentiel a un saut infini (exemple : les puits infiniment profond).

<sup>55</sup>Faire le changement de variable  $\frac{2}{3}(\frac{x}{a})^{3/2} = X$ .

Ceci est aussi la valeur de  $\Psi(k=0)$ . Il en résulte que l'égalité suivante doit être satisfaite (voir (7.191)) :

$$a^2 \psi'(0) \int_K^0 e^{a^3(\frac{k'^3}{3} + k_0^2 k')} dk' = C \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) , \quad (7.194)$$

Comme  $C$  et  $\psi'(0)$  sont proportionnels, on peut écrire la solution (7.191) sous la forme :

$$\Psi(k) = a^3 \psi'(0) e^{-a^3(\frac{k^3}{3} + k_0^2 k)} \left[ \int_0^k e^{a^3(\frac{k'^3}{3} + k_0^2 k')} dk' + C' \right] \equiv \psi'(0) \Phi(k) , \quad (7.195)$$

où  $C'$  est une nouvelle constante à déterminer. Pour la trouver, on raisonne comme suit. Ici, on a simplement  $\mathcal{L}[\psi''] = k^2 \Psi(k) - \psi'(0)$  puisque  $\psi(x=0) = 0$  ; d'un autre côté,  $\mathcal{L}[\psi'']$  tend vers zéro quand  $k \rightarrow +\infty$ , d'où :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} [k^2 \Psi(k) - \psi'(0)] = 0 \iff \psi'(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} k^2 \Psi(k) . \quad (7.196)$$

Compte tenu de (7.195), on en déduit que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ k^2 a^3 e^{-a^3(\frac{k^3}{3} + k_0^2 k)} \left( \int_0^k e^{a^3(\frac{k'^3}{3} + k_0^2 k')} dk' + C' \right) \right] = 1 . \quad (7.197)$$

Ceci permet en principe de trouver la constante  $C'$ , ce qui achève de déterminer  $\Psi(k)$ .

Le retour vers  $\psi(x)$  exige l'inversion de Laplace de  $\Psi(k)$ , qui n'est pas simple. On peut toutefois toucher du doigt le phénomène important de quantification de l'énergie de la particule. En effet, puisque  $\psi'(x) = \mathcal{L}^{-1}[kF(k)](x)$ , on trouve finalement (voir (7.195)) :

$$\psi'(x) = \psi'(0) \mathcal{L}^{-1}[k\Phi(k)](x) . \quad (7.198)$$

Il en résulte que l'on doit avoir :

$$\psi'(0) = \psi'(0) \mathcal{L}^{-1}[k\Phi(k)](x=0) , \quad (7.199)$$

soit :

$$\mathcal{L}^{-1}[k\Phi(k)](0) - 1 = 0 . \quad (7.200)$$

Le premier membre de (7.200) est une certaine fonction du seul paramètre sans dimension du problème à savoir  $k_0 a$ . Cette équation signifie donc que seules les valeurs de ce paramètre qui annulent le premier membre satisfont toutes les conditions requises<sup>56</sup>.  $a$  est une donnée liée au champ électrique, c'est donc  $k_0$  qui est contraint de prendre certaines valeurs discrètes  $k_{0,n}$  : l'énergie de la particule est quantifiée, toutes les énergies (positives) ne sont pas accessibles. Pour une particule quantique liée, il existe un ensemble fini ou isomorphe à  $\mathbb{N}$  (c'est ce cas ici) d'énergies possibles, au contraire de ce qu'envisage implicitement la Mécanique classique, où l'énergie peut prendre n'importe quelle valeur.

<sup>56</sup> Les conditions essentielles sont d'imposer aux solutions de tendre vers zéro à l'infini, donc de représenter des états liés (seuls les états liés ont une énergie quantifiée), et de s'annuler à l'origine pour tenir compte du mur infranchissable : il faut retenir que ce sont les conditions imposées à la fonction d'onde qui produisent spontanément le miracle de la quantification de l'énergie. D'ailleurs, un phénomène analogue de quantification se produit pour une corde vibrante dont les extrémités sont maintenues fixes : la longueur d'onde  $\lambda$  ne peut pas avoir n'importe quelle valeur, seules les valeurs entières  $\times \frac{\lambda}{2} = L$  sont possibles ( $L =$  distance entre les extrémités fixes).