Méthodes Mathématiques
E.S.P.C.I
Première année

Elie Raphaël
Polycopié rédigé à partir du cours

Ce polycopié a été rédigé sous LaTeX 2ε par Jacques Fattaccioli, élève de la 117e promotion, et retouché par Clélia Canuel, Laure Ménétrier, Thomas Pellegrini, et Faustine Vanhulle de la 118e, Aude Maguer, Nicolas Champavert et Arnaud Spinelli-Audouin de la 119e, ainsi que Pierre Gouédard de la 120e.

Bibliographie

- L. Schwartz
  Méthodes Mathémathiques pour la Physique Hermann, 1961.
- R. Petit
  L'outil Mathémathique Dunod, 1998.
- G. Auliac, J. Avignant, E. Azoulay
  Technique Mathémathiques pour la Physique Ellipse, 2000.
- N. Boccara
  Fonctions Analytiques Ellipses, 1996 ;
  Intégration Ellipses, 1995 ;
  Distributions Ellipses, 1995.
- F. Roddier
  Distributions et transformations de Fourier Ediscience, 1971.
- K. Riley, M. Hobson, S. Bence
  Mathematical Methods for Physics and Engineering Cambridge Univ. Press, 1998.
- P. Morse and H. Feshbach
  Methods of Theoretical Physics Mc Graw Hill, 1953.

Chapitre 1

Fonctions Analytiques

1.1 Le plan complexe

1.1.1 Rappels

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $\exists !\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + i\,y$.
On définit le module de z comme $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
On peut aussi repérer z par des coordonnées polaires, en posant : $z = \rho\, e^{i\,\theta}$, avec $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ et $\rho = |z|$.
On a :

- si $z = 0$, alors θ n'est pas défini,
- si $z \neq 0$, alors θ est défini à $2k\pi$ près.

1.1.2 Topologie dans le plan complexe

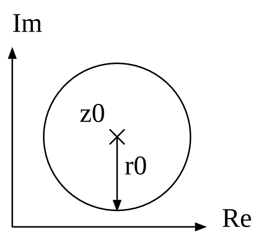
On définit une distance dans le plan complexe par :

$$\forall\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{d}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Définitions

- *On appelle disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$ l'ensemble :*

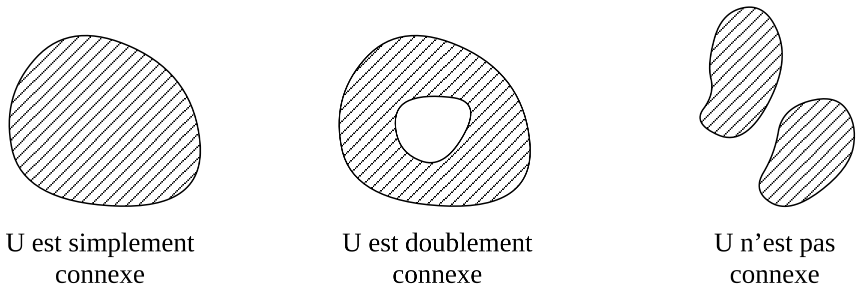
$$\mathrm{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z - z_0| < r\}$$



- *On appelle voisinage d'un point z_0 un disque ouvert quelconque de centre z_0.*
- *Un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ est un ouvert si chaque z de U possède un voisinage entièrement inclus dans U.*
- *Le complémentaire par rapport à $\mathbb{C}$ d'un sous ensemble ouvert est dit fermé.*

– *On définit le disque fermé de centre z_0 et de rayon r, comme :*
$$\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| \leqslant r\}$$

Définition (Connexe)
Un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ est connexe si deux points quelconques de U peuvent être rejoints par une ligne polygonale incluse dans U.
Si de plus U est ouvert alors il est appelé domaine.



1.2 Fonctions d'une variable complexe

1.2.1 Premières définitions

Définition
Soit U une partie de $\mathbb{C}$. On appelle fonction d'une variable complexe une application :

$$f : U \to \mathbb{C}$$

On a $f(x + i\,y) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, où u et v sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

Exemples

$$\bullet\ f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + i\,y & \longmapsto & x^2 - y^2 + 2i\,x\,y \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

$$\bullet\ f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + i\,y & \longmapsto & x - i\,y \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}$$

$$\bullet\ f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + i\,y & \longmapsto & e^x \cos y + i\,e^x \sin y \\ z & \longmapsto & e^z \qquad \text{(exponentielle complexe)} \end{array}$$

$$\bullet\ f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + i\,y & \longmapsto & \dfrac{e^{-y} + e^y}{2} \cos x + i\,\dfrac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ z & \longmapsto & \cos z \qquad \text{(cosinus complexe)} \end{array}$$

1.2.2 Limites et continuité

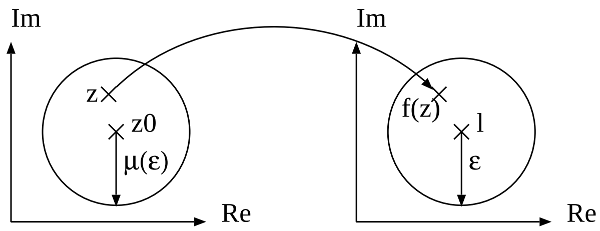
Limites

Dans la suite du paragraphe, on utilisera $f : U \to \mathbb{C}$.

Définition

Soit $z_0 \in U$. On dit que f tend vers une limite l quand $z \to z_0$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \mu(\varepsilon) \text{ tel que } |z - z_0| < \mu \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$



Remarque

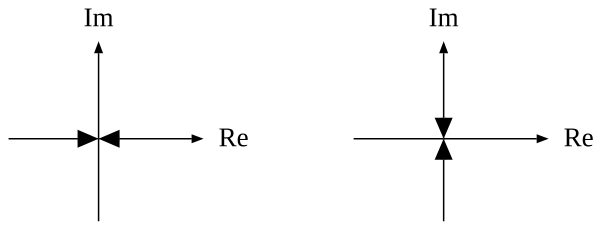
D'après la définition, f a une limite si elle tend vers la même valeur suivant toutes les directions du plan. Pour prouver que f n'admet pas de limite en un point il suffit de trouver deux directions d'approche de ce point telles que la fonction ne tende pas vers la même valeur suivant l'une ou l'autre.

Exemple

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{C} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{C} \\ & x + i\,y & \longmapsto & \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\,\dfrac{2\,x\,y}{x^2 + y^2} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z}{\bar{z}} \end{array}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Pour $y \in i\mathbb{R}$: $\lim_{y \to 0} f(i\,y) = -1$



f n'a donc pas de limite en 0.

Définition

On dit que f admet une limite l quand $|z|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists A(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } |z| > A \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

Continuité

Définition

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et f définie sur un voisinage de z_0. On dit que f est continue en z_0 si :
– f admet une limite finie en z_0
– $\lim_{z \to z_0} f(z)$ coïncide avec $f(z_0)$.

Proposition

f est continue si et seulement si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ définies précédemment sont continues.

Dérivée d'une fonction d'une variable complexe

Définition

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et soit f définie et continue sur un voisinage de z_0. On dit que f est dérivable en z_0 si l'expression

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

admet une limite quand z tend vers z_0.
On note alors cette limite $f'(z_0)$.

Exemple

Considérons la fonction f définie et continue sur $\mathbb{C}$, et telle que $f(z) = |z|^2$. f est-elle dérivable ?
On a :

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = z_0 \, \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z}$$

– Si $z_0 = 0$, alors $f'(z_0) = 0$, f est donc dérivable en 0.
– Si $z_0 \neq 0$, alors on se ramène à l'exemple précédent.
Donc f n'est pas dérivable en dehors de 0.

Proposition

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dérivables. On a :

$$\begin{aligned}
(\lambda f)' &= \lambda f' \\
(f + g)' &= f' + g' \\
(f g)' &= f' g + f g' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{g f' - f g'}{g^2}, \quad \textit{avec } g(z) \neq 0 \\
(f \circ g)' &= g' \, (f' \circ g)
\end{aligned}$$

Conditions de Cauchy-Riemann

Proposition

Soit $f = u + i\,v$ une fonction définie et continue sur un voisinage de z_0. Si f est dérivable en $z_0 = x_0 + i\,y_0$, alors u et v admettent en (x_0, y_0) des *dérivées partielles premières par rapport à chacune de leurs variables, et on a :*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; et \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Démonstration

Par hypothèse f est dérivable en z_0, donc $f'(z_0)$ existe.

Pour démontrer Cauchy-Riemann, on va considérer deux directions différentes pour aller vers z_0 et on va utiliser le fait que la limite de $\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{z-z_0}$ en z_0 est la même suivant toutes les directions.

– approche suivant l'axe réel ($\Delta y = 0$) :

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}\\ &\quad + i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\end{aligned}$$

– l'approche suivant l'axe imaginaire donne :

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

On obtient la condition de Cauchy-Riemann en égalant les deux résultats.

Remarque

Cette proposition n'admet pas de réciproque si on ne suppose rien d'autre sur les fonctions coordonnées u et v de f, car on ne considère que deux directions d'approche particulières de z_0.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} + i\,\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0\\ 0 & \text{si } z = 0\end{cases}$$

f est continue en tout point de $\mathbb{C}$ et vérifie les relations de Cauchy-Riemann en 0. Cependant on voit que :

– suivant l'axe réel : $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = 1+i$

– suivant la première bissectrice : $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1+i}{2}$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0, malgré le fait qu'elle vérifie les relations de Cauchy-Riemann.

Proposition

Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles premières continues sur un voisinage de z_0 et si ces dérivées satisfont aux relations de Cauchy-Riemann en $z = z_0$, alors f est dérivable en z_0.

Remarque

Si f est dérivable en un point z, alors on a :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

Fonctions analytiques (ou holomorphes)

Définition

On dit d'une fonction f qu'elle est analytique dans un ouvert U du plan complexe si et seulement si elle est dérivable en tout point de U.

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω. Si u et v sont de classe C^2 sur Ω, alors u et v satisfont l'équation de Laplace dans Ω :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Démonstration

On utilise Cauchy-Riemann et le théorème de Schwartz d'interversion des dérivées partielles pour une fonction de classe C^2 de deux variables.

Fonctions entières

Définition

On appelle fonction entière une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$.

Exemples

$f(z) = \exp z$ et $f(z) = z^2$ sont des fonctions entières.

1.3 Intégration dans le plan complexe

1.3.1 Introduction

Définition

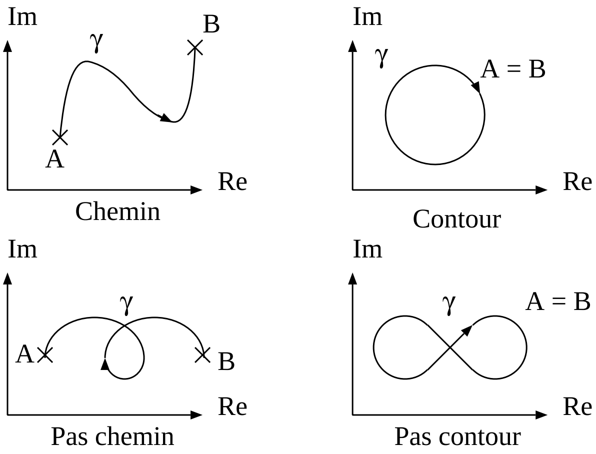
Soit $\gamma\ :\ J = [t_a, t_b] \to \mathbb{C}$, avec $[t_a, t_b] \subset \mathbb{R}$, tel que :

- *γ peut être décrite par $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ où x et y sont continues sur J et x' et y' continues par morceaux sur J*
- *γ est injectif, sauf peut-être aux extrémités (pas de points multiples, sauf éventuellement a=b).*

Alors γ est appelé chemin.

Si de plus $a = b$, γ est appelé contour.

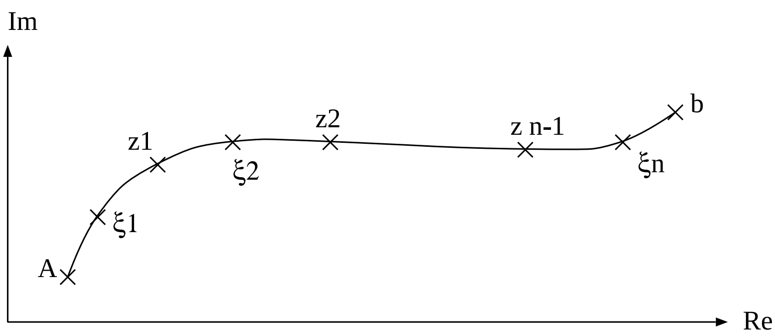
(N.B. : Cette définition assez restrictive d'un chemin ne correspond pas à la définition générale que l'on trouve dans les ouvrages de mathématiques)



1.3.2 Intégration le long d'un chemin

Soit γ un chemin et soit f définie en tout point de ce chemin. Soit $\{z_0, ..., z_n\}$ une subdivision de γ, avec $z_0 = a$ et $z_n = b$. Soient de plus $\xi_1, ..., \xi_n$ tels que $\forall\ i \in [1, n],\ \xi_i \in]z_{i-1}, z_i[$. On définit la suite :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$



Définition

Si, quand $n \to \infty$ de manière à ce que $|z_k - z_{k-1}| \to 0$ pour tout k de $[1, n]$, la somme I_n tend vers une limite indépendante du choix des z_k et des ξ_k, alors cette limite est appelée intégrale de f le long de γ et est notée :

$$\int_\gamma f(z)\ dz$$

Propriété

Si f est continue sur γ, alors son intégrale le long de γ existe.

Si on sépare la partie réelle et la partie imaginaire, on a :

$$\begin{aligned} I_n = & \sum_{k=1}^{n} \left[u(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k)\,(y_k - y_{k-1})\right] \\ & + i \sum_{k=1}^{n} \left[v(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k)\,(y_k - y_{k-1})\right] \end{aligned}$$

donc dans les mêmes conditions que tout à l'heure, en faisant tendre n vers l'infini, on a :

$$I = \int_\gamma (udx - vdy) \ + i \int_\gamma (vdx + udy)$$

Les deux intégrales curvilignes qui apparaissent dans l'expression de I peuvent être réduites à des intégrales ordinaires en utilisant le paramétrage de γ : $z(t) = x(t) + i\,y(t)$. On obtient alors :

$$\boxed{I = \int_{t_a}^{t_b} f\big(z(t)\big)\, z'(t)\, dt}$$

Exemples

1. On considère $f(z) = z$, intégré sur γ paramétré par $z(t) = R\,e^{2i\pi t}$.
   Alors :
   – si $t \in [0, \frac{1}{4}]$, on a :

   $$I = \int_0^{\frac{1}{4}} R\,e^{2i\pi t} \times R\,2i\pi e^{2i\pi t} dt = -R^2$$

   – si $t \in [0, 1]$, on a $I = 0$
2. On considère $f(z) = \dfrac{1}{z}$, intégré sur $\gamma : z(t) = R\,e^{2i\pi t},\ t \in [0, 1]$.

   $$I = \int_0^1 \frac{2i\pi R\,e^{2i\pi t}}{R\,e^{2i\pi t}}\, dt = 2i\pi$$

   NB : le résultat est indépendant de R.

Cas particulier

Soit f admettant une primitive, i.e. $\exists\ F$ telle que $F' = f$ sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$.
On intègre f sur un chemin γ contenu dans Ω, et on a :

$$I = \int_\gamma f(z)\, dz = F(b) - F(a)$$

si a et b sont les extrémités du chemin considéré.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $f(z) = z$ et $\gamma : t \in [0, \frac{1}{4}] \longmapsto R\,e^{2i\pi t}$.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \left[\frac{1}{2}\, z^2\right]_R^{iR} = -R^2$$

1.3.3 Inégalité de Darboux

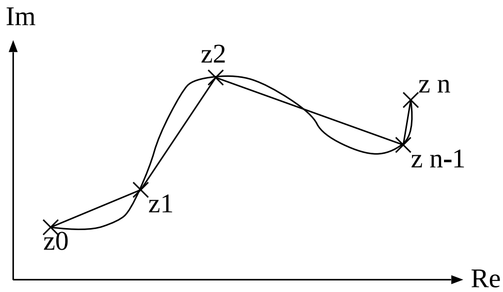
Proposition

Soit f intégrable sur un chemin γ de longueur curviligne L.
Soit $M = \sup_\gamma(|f|)$ (on suppose que M est fini).
Alors on a :

$$\boxed{|I| \leqslant M\,L}$$

Démonstration

En utilisant l'inégalité triangulaire sur un élément de la suite I_n, et en utilisant le fait que $|f| \leqslant M$, et que $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leqslant L$, on a le résultat de la proposition.



Jusqu'à maintenant, on n'a fait aucune hypothèse particulière sur les fonctions considérées, on ne s'est intéressé qu'aux fonctions continues sur γ.

1.4 Intégration de fonctions analytiques

1.4.1 Théorème de Cauchy et conséquences

Théorème de Cauchy

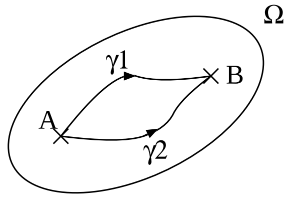
Soit un domaine Ω simplement connexe, soit f analytique sur Ω, et soit γ un contour quelconque dans Ω.
Alors

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$$

Proposition

Soit f analytique sur un domaine simplement connexe, soit A et B deux points de ce domaine et soit γ_1 et γ_2 deux chemins ayant pour extrémités A et B, alors on a :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$



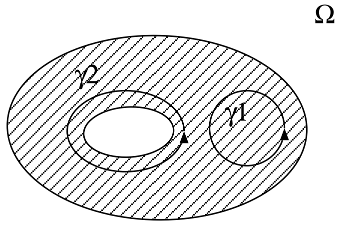
Démonstration

On intègre f sur le contour $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$, où $-\gamma_2$ correspond au chemin γ_2 parcouru en sens inverse, et on utilise la linéarité de l'intégrale.

Remarque

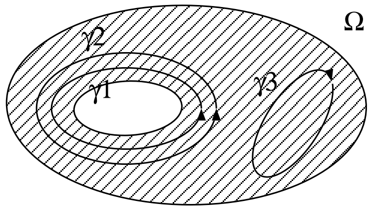
Si le domaine n'est pas simplement connexe, le théorème ne s'applique pas :

$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$ mais en général $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz \neq 0$.



Définition

- *Soit γ_1 et γ_2 deux contours d'un domaine Ω. On dit que ces deux contours sont homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue en restant dans Ω.*



- *Un contour est dit homotope à un contour ponctuel dans Ω s'il est homotope à un contour réduit à un point appartenant à Ω.*
- *Un domaine Ω est simplement connexe si tout contour de Ω est homotope à un contour ponctuel.*
- *Un domaine Ω multiplement connexe est un domaine simplement connexe dont on a retiré un ou plusieurs domaines simplements connexes.*

Proposition

Soient f une fonction analytique dans un domaine Ω pouvant être non simplement connexe et deux contours γ_1 et γ_2 de Ω homotopes dans Ω, *alors on a, en prenant la même orientation pour les deux contours :*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

Exemple

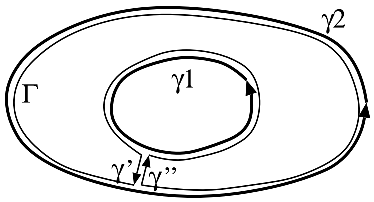
En reprenant la figure précédente :

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0 \text{ et } \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Démonstration

On considère un contour $\Gamma = \gamma_1 + \gamma' + (-\gamma_2) + \gamma''$ homotope a un point.
Les contributions de γ' et γ'' se compensant, on a :

$$\int_{\Gamma} f = 0 = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$



Proposition

Soit f analytique sur un domaine simplement connexe Ω, alors f admet une primitive sur Ω.

1.4.2 Formule intégrale de Cauchy

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω simplement connexe, et $z \in \Omega$. Alors on a, pour tout contour γ de Ω orienté positivement et entourant z :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{f(z')}{z'-z}\,dz'}$$

Démonstration

f est analytique donc continue sur Ω. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ |z'-z| \leqslant r \Rightarrow |f(z') - f(z)| \leqslant \varepsilon$$

Considérons le cercle γ' de centre z et de rayon r.

$$\forall z' \in \gamma',\ \left|\frac{f(z') - f(z)}{z'-z}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}$$

Le théorème de Darboux donne donc :

$$\left|\int_{\gamma'} \frac{f(z') - f(z)}{z'-z}\,dz'\right| \leqslant 2\pi\, r\, \frac{\varepsilon}{r}$$

En faisant tendre ε vers 0, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma'} \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' &= \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{z'-z}\,dz' \\
&= f(z) \int_{\gamma'} \frac{dz'}{z'-z} \\
&= f(z)\,2i\pi \qquad \text{(cf 1.3.2)}
\end{aligned}$$

1.4.3 Dérivabilité n-ième des fonctions analytiques

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω, alors f est de classe C^∞ sur Ω. Si de plus Ω est simplement connexe, pour tout contour γ entourant z on a :

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}\,dz'}$$

1.4.4 Théorème du maximum

Définition

Soit g une fonction de la variable complexe. On dit que $|g|$ admet un maximum local relatif en $z = z_0$ s'il existe un voisinage U de z_0 tel que :

$$\forall z \in U,\ |g(z)| \leqslant |g(z_0)|$$

Si l'inégalité est stricte, i.e. :

$$\forall z \in U,\ |g(z)| < |g(z_0)|$$

alors le maximum local est dit strict.

Théorème

Soit f une fonction analytique sur un domaine Ω. Le module $|f|$ ne peut présenter de maximum local strict en un point $z_0 \in \Omega$.

Démonstration

Supposons qu'il y ait un maximum strict en z_0, alors on peut trouver un voisinage $\mathcal{V}$ de z_0 tel que $\forall z \in \mathcal{V}$, $|f(z)| < |f(z_0)|$.
Considérons le chemin γ défini comme le cercle de centre z_0 et de rayon $r > 0$. On a :

$$\gamma : \gamma(t) = z_0 + r\,e^{2i\pi t},\ t \in [0,1]$$

D'après les théorèmes précédents, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

D'après le théorème de Darboux, on a une majoration :

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{z\in\gamma} \left| \frac{f(z)}{z-z_0} \right| 2\pi\, r = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$$

Donc il existe $z \in \gamma$ tel que $|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$ et z_0 n'est pas maximum strict.

Proposition

Soit f analytique sur un domaine Ω. Si en un point $z_0 \in \Omega$, $|f|$ présente un maximum local relatif, alors f est constante sur Ω.

1.4.5 Théorème de Morera

Théorème (Morera)

Soit f une fonction continue dans un domaine Ω simplement connexe. Si pour tout contour $\gamma \in \mathbb{C}$ on a

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

alors f est analytique sur Ω.

1.4.6 Théorème de Liouville

Théorème (Liouville)

Soit f une fonction entière.
Si f est bornée (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leqslant M$), alors f est constante.

Démonstration

f est entière. Soit z_0 un point de $\mathbb{C}$ et soit γ le cercle de centre z_0 et de rayon R.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$
$$\left|f'(z_0)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2}\, 2\pi R = \frac{M}{R}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ on montre que $|f'| = 0$ donc que f est constante.

Remarques

– Attention à bien vérifier que le module de f est borné :
ce n'est pas le cas de $z \longmapsto \sin z$ par exemple
– Le théorème de Liouville permet de démontrer facilement le théorème de D'Alembert-Gauss

1.5 Séries de fonctions d'une variable complexe

1.5.1 Généralités

Définition

Soit une suite de fonctions $\big(g_n(z)\big)_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle série de terme général

$g_n(z)$ la suite :

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} g_n(z)$$

Définition (Convergence simple)
On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ et que sa somme est $S(z)$ si et seulement si :

$$\forall z \in U,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(z,\varepsilon),\ n > N \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

Définition (Convergence uniforme)
On dit que la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S si et seulement si, les deux propositions étant équivalentes :
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ n > N \Longrightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \forall z \in U$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon),\ n > N \Longrightarrow \sup\limits_{z\in U} |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$

ATTENTION
La convergence uniforme demande des hypothèses beaucoup plus fortes que la convergence simple, les z n'étant pas choisis au début de la définition. La convergence uniforme implique de manière évidente la convergence simple.

Propriétés des séries uniformément convergentes

1. *Si (S_n) converge uniformément dans $U \subset \mathbb{C}$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue en un point $z_0 \in U$ alors la somme de la série des g_n est continue en z_0.*
2. *Si (S_n) converge uniformément le long d'un chemin γ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue, alors*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma g_n(z)\, dz\right)$$

3. *Si quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $g_n(z)$ est analytique dans un domaine Ω et si (S_n) converge uniformément dans <u>tout disque fermé</u> contenu dans Ω, alors la somme S est analytique dans Ω et :*

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'(z)$$

Proposition (Critère de Weierstrass)
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|g_n(z)| \leqslant a_n \qquad \forall z \in U$$

avec a_n terme général d'une série numérique convergente, alors la série $\sum g_n$ converge uniformément sur U.

Définition (Convergence absolue)
On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument si et seulement si la série $\sum |g_n|$ converge.

1.5.2 Séries entières

Définition

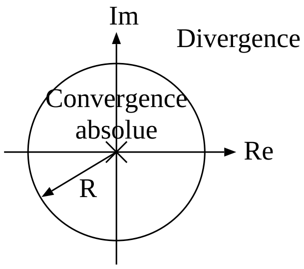
On appelle série entière de centre z_0 et de coefficient a_n la série de terme général $g_n(z) = a_n(z - z_0)^n$.

Proposition

$\exists R > 0$ tel que :

1. *la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge absolument dans le disque de convergence $\mathrm{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}/|z - z_0| < R\}$*
2. *la série entière diverge en tout point z tel que $|z - z_0| > R$*

R est appelé rayon de convergence de la série.



Si $\sum g_n(z)$ ne converge que pour $z = z_0$, alors $R = 0$.
Si $\sum g_n(z)$ converge dans tout le plan complexe, alors $R = +\infty$.

Exemple

Etudier la série entière de terme général $g_n(z) = z^n$.
On étudie la série réelle à termes positifs $\sum |z^n|$ en utilisant le critère de d'Alembert. Pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, on a :

$$\frac{|g_{n+1}(z)|}{|g_n(z)|} = |z|$$

donc :

$$\begin{cases} \sum |g_n(z)| & \text{converge si } |z| < 1 \\ \sum |g_n(z)| & \text{diverge si } |z| > 1 \end{cases}$$

De manière évidente, si $|z| = 1$ la série $\sum |z^n|$ diverge.
La série entière $\sum |z^n|$ converge normalement sur le disque ouvert unité.

Proposition

Soit $\sum a_n(z - z_0)^n$ de rayon de convergence R. Dans tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r)$ avec $r < R$, la série entière converge uniformément.

Théorème (Dérivation)

Soit la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ de rayon de convergence R. On a :

1. *Le rayon de convergence de la série $\sum n\, a_n(z - z_0)^{n-1}$ est égal à R.*
2. *La somme $S(z)$ de la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ est analytique dans $\mathrm{D}(z_0, R)$ et sa dérivée $S'(z)$ en $z \in \mathrm{D}(z_0, R)$ est :*

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n(z - z_0)^{n-1}$$

3. *Par itération de la proposition précédente, on a :*

$$S^{(k)}(z_0) = k!\, a_k, \;\; k \geqslant 0$$

d'où :

$$\forall z \in \mathrm{D}(z_0, R), \;\; S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

1.6 Séries de Taylor

1.6.1 Série de Taylor d'une fonction analytique

Définition

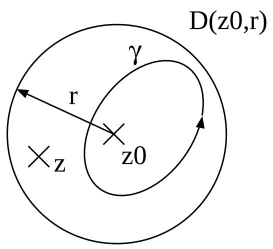
Soit f analytique sur le disque ouvert $\mathrm{D}(z_0, r)$, avec $r > 0$.
$\forall z \in \mathrm{D}(z_0, r)$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}}\, dz'$$

et avec γ un contour dans $\mathrm{D}(z_0, r)$ orienté positivement entourant z_0.
Ce développement (qui est unique) est appelé développement de Taylor de f autour de z_0.



NB : γ n'a pas besoin d'entourer z.

Remarque

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Démonstration

Soit $\gamma_e(t) = z_0 + \hat{r}\, e^{2i\pi t}, \;\; 0 \leqslant t \leqslant 1$, avec $|z - z_0| < \hat{r} < r$.
D'après le théorème de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\, d\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega - z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\omega - z_0}}$$

et $\omega \in \gamma_e$ donc $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$ donc en développant le deuxième terme de l'expression en série entière, on a :

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\omega)(z-z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \, d\omega$$

Montrons alors que la série de fonctions à l'intérieur de l'intégrale est uniformément convergente sur γ_e. Par majoration du terme général de la série et en utilisant l'inégalité de Darboux, on a :

$$\left|\frac{f(\omega)(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{\sup_{\gamma_e} |f(\omega)|}{\hat{r}} \left|\frac{z-z_0}{\hat{r}}\right|^n$$

Or $\left|\frac{z-z_0}{\hat{r}}\right|^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente, sa raison étant inférieure a 1.
Donc par Weierstrass on a convergence uniforme de la série et on peut inverser les signes somme et intégrale, ce qui donne :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_e} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} \, d\omega$$

Or f est analytique donc l'intégration est indépendante du chemin entourant z_0. Par unicité du développement en série entière de f, en identifiant les coefficients, on a le résultat voulu.

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

f a une singularité en $z = 0$.
On cherche le développement de Taylor de f en 1.
On considère le disque ouvert $\mathrm{D}(z_0 = 1, r = 1)$. f est bien analytique sur ce disque. $\forall z \in \mathrm{D}(1,1)$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Pour calculer c_n :
Méthode 1 :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \\ f^{(n)} &= \frac{(-1)^n (n+1)!}{z^{n+2}} \\ c_n &= (-1)^n (n+1) \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} &= \frac{1}{(1+Z)^2} \qquad \text{avec : } z = 1+Z \\ &= 1 + \frac{-2}{1!}\,Z + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}\,Z^2 + \ldots \quad (|Z|<1) \\ &= 1 - 2\,(z-1) + 3\,(z-1)^2 + \ldots\end{aligned}$$

Remarque

C'est la présence d'une singularité à l'origine pour $f(z) = \frac{1}{z^2}$ qui limite le rayon de convergence de la série entière $\sum(-1)^n\,(n+1)\,(z-1)^n$ à 1.

Proposition
Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine Ω, et soit $z_0 \in \Omega$. Pour tout z' appartenant au plus grand disque ouvert de centre z_0 contenu dans Ω, la série de Taylor $S(z') = \sum c_n(z'-z_0)^n$ est convergente et a pour somme $f(z')$.

Proposition
Si f est entière, alors la série de Taylor de f de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n$ est convergente et a pour somme $f(z)$ pour tout z de $\mathbb{C}$.

1.6.2 Zéro d'une fonction analytique

Définition
Soit f une fonction analytique dans un domaine Ω et non identiquement nulle sur Ω.
S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$, alors z_0 est un zéro de f. De plus, on dit que z_0 est un zéro d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si :

$$\forall i \leqslant m-1,\ f^{(i)}(z_0) = 0 \ \text{ et } \ f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Remarque
Si z_0 est un zéro d'ordre m, alors on peut mettre f sous la forme $f(z) = (z-z_0)^m h(z)$, avec :

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k\,\frac{f^{(m+k)}(z_0)}{(m+k)!}$$

La fonction h ainsi définie est analytique dans Ω et dérivable donc continue en z_0 et ne s'annule pas sur un voisinage de z_0.

Définition (points isolés)
Soit z et z' deux éléments de $\mathbb{C}$. On dit que ces deux points sont isolés si il existe V et V' respectivement voisinages de z et z', tels que $V \cap V' = \varnothing$.

Théorème (théorème des zéros isolés)

Les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sont isolés.

Conséquence : prolongement analytique

Soit f_1 et f_2 deux fonctions analytiques sur Ω et soit U un ouvert non vide de Ω.
Si $\forall z \in U,\ f_1(z) = f_2(z)$ alors $f_1 = f_2$ pout tout $z \in \Omega$.
Cas particulier : si une fonction f analytique est nulle sur U alors elle est nulle sur Ω.

Remarque

Cette proposition reste vraie si U est un arc de courbe non réduit a un point.

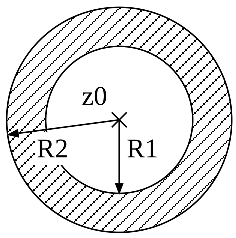
1.7 Séries de Laurent et résidus

1.7.1 Série de Laurent

Définition

On définit la couronne ouverte de centre z_0, de rayon R_1 et R_2 par :

$$\mathrm{C}(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 \leqslant R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$



Remarque

Si $R_1 = 0$, on note $\mathrm{C}(z_0, 0, R_2) = \dot{\mathrm{D}}(z_0, R_2)$, qu'on appelle disque pointé.

Proposition

Soit f analytique sur $\mathrm{C}(z_0, R_1, R_2)$, alors :

$$\forall z \in \mathrm{C}(z_0, R_1, R_2),\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

avec :

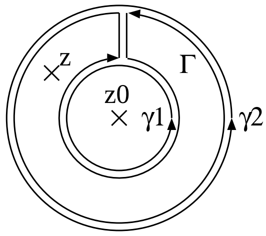
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}}\, dz' \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \\ c_{-1} &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z')\, dz' \end{aligned}$$

et γ un contour quelconque orienté positivement, inclus dans la couronne et entourant z_0.

Ce développement est appelé développement en série de Laurent et il est unique.

Démonstration

γ est homotope à un contour Γ proche de $\gamma_2 - \gamma_1$ et entourant z.



$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2i\pi}\left[\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\right] \end{aligned}$$

On fait le dévelopement de Taylor de f sur γ_2, ce qui donne les c_n pour $n \geqslant 0$.
Pour γ_1 on a $|w-z_0| < |z-z_0|$. Il faut donc refaire le même raisonnement que pour Taylor mais en considérant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= -\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} \\ &= -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \end{aligned}$$

On obtient ainsi les c_n pour $n \leqslant 0$.

Remarque

Si f est analytique sur $\mathrm{D}(z_0, R_2)$ alors les coefficients c_n sont nuls pour $n \leqslant 0$.

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \qquad a \in \mathbb{R}_+^*$$

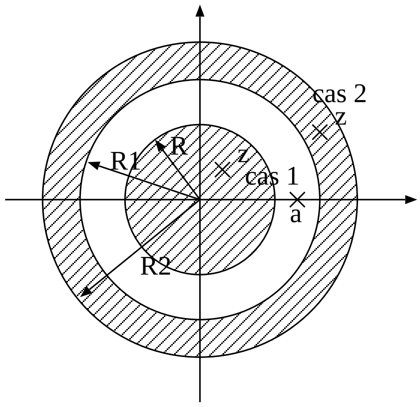
f possède une singularité en a. On cherche le développement en série de Laurent de f autour de $z_0 = 0$.
Cas 1 : $|z| < a$, f est analytique sur $\mathrm{D}(0, R)$ avec $|z| < R < a$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} \\ &= -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \dots \end{aligned}$$

Cas 2 : $|z| > a$

f est analytique sur $\mathrm{C}(0, R_1, R_2)$, avec $a < R_1 < |z| < R_2$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a}{z}} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \ldots \end{aligned}$$



1.7.2 Points singuliers

Définition

- *Soit z_0 un point au voisinage duquel f n'est pas analytique. On dit que z_0 est un point singulier de f.*
- *Soit z_0 un point singulier de f. S'il existe un disque ouvert pointé (i.e. privé de z_0) de centre z_0 et de rayon $r > 0$ dans lequel f est analytique, alors on dit que z_0 est un point singulier isolé.*

Exemples

1. $f : z \longmapsto \dfrac{1}{z-2}$, le point $z_0 = 2$ est un point singulier isolé.
2. $f : z \longmapsto \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$, le point $z_0 = 0$ est un point singulier non isolé.

N.B. : Dans tout ce qui suit, on supposera les points singuliers isolés.

Dans le cadre de cette hypothèse, si on prend f admettant un point singulier z_0, et que l'on considère sa série de Laurent associée autour de z_0, on a, en notant $b_n = c_{-n}$ et $a_n = c_n$:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{partie singulière}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Définition

1. *Si tous les b_n sont nuls, la fonction est analytique dans $\mathrm{D}(z_0, r)$ et on dit que z_0 est une singularité apparente.*
2. *Si les b_n sont non tous nuls, i.e. s'il existe un b_m non nul tel que $b_n = 0$ pour tout $n \geqslant m$, alors z_0 est un pôle d'ordre m et :*

$$\forall z \in \dot{\mathrm{D}}(z_0, r), \; f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + ...$$

Si $m = 1$, on dit qu'on a un pôle simple.

3. *S'il existe une infinité de b_n non nuls, la singularité est dite essentielle*

Exemples

1. $z \longmapsto \frac{\sin z}{z}$: $z_0 = 0$ est une singularité.
Les b_n sont tous nuls et on a :

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!} & \text{si } n \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$z \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ est analytique et z_0 est une singularité apparente.

2. $z \longmapsto \frac{1}{z-2}$: $z_0 = 2$ est une singularité.
C'est un pôle d'ordre 1.
3. $z \longmapsto e^{1/z}$: $z_0 = 0$ est une singularité.

$$\begin{aligned} e^{1/z} &= 1 + \frac{1}{z} + ... + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + ... \\ a_0 &= 1 \\ a_n &= 0 \qquad \forall n > 0 \\ b_n &= \frac{1}{n!} \qquad \forall n > 0 \end{aligned}$$

z_0 est un singularité essentielle.

Définition

Une fonction ne possédant pas d'autres singularités que des pôles dans un domaine Ω est dite méromorphe dans Ω.

1.7.3 Résidu en un point singulier isolé

Définition

Soit z_0 un point singulier isolé de f. Soit $\dot{\mathrm{D}}(z_0, r)$ un disque pointé ne contenant pas de point singulier de f.

$$\forall z \in \dot{\mathrm{D}}(z_0, r) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Le coefficient b_1 est appelé résidu de f en z_0 et est noté $\operatorname{Res}(f, z_0)$.
On a donc :

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, dz}$$

où γ est un contour orienté positivement inclus dans $\dot{\mathrm{D}}(z_0, r)$ et entourant z_0.

Remarque
Si z_0 est une singularité apparente de f alors $\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$.

Calcul pratique de résidus

1. Si z_0 est un pôle simple

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + g(z)$$

où $g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + ...$ est une fonction analytique au voisinage de z_0 et nulle en z_0. On a donc :

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = b_1$$

d'où :

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)}$$

2. Si z_0 est un pôle d'ordre m

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]}$$

En pratique il vaut mieux calculer directement le développement pour des pôles d'ordres élevés.

Proposition
Soit $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - z_0}$ avec g une fonction analytique au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.
On a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = g(z_0)$$

Proposition
Soit $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ avec g et h deux fonctions analytiques au voisinage de z_0 et telles que $g(z_0) \neq 0$ et z_0 est un zéro simple de h.
On a alors :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Démonstration

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = g(z_0) \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

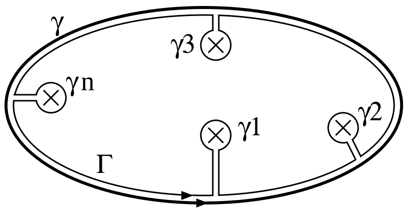
1.7.4 Théorème des résidus

Théorème des résidus

Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $(z_1, ..., z_n)$ un nombre fini de points de Ω isolés et distincts. Soit de plus f analytique dans $\Omega\backslash\{z_1, ..., z_n\}$. Si on prend γ un contour contenu dans Ω et entourant les $z_i, i \in [1, n]$, sans rencontrer ces points, et orienté positivement, alors :

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f, z_k)}$$

Démonstration



$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 = \int_\gamma f(z)\, dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\, dz$$

or

$$\int_{\gamma_k} f(z)\, dz = -2i\pi\, \mathrm{Res}\,(f, z_k)$$

d'où le résultat.

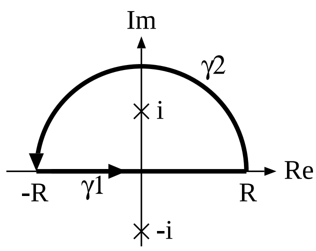
1.7.5 Application des résidus au calcul d'intégrales

Exemple

Calcul de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Considérons pour cela $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{+i, -i\}$.

i et $-i$ sont des pôles simples.



$\gamma(R) = \gamma_1(R) + \gamma_2(R)$ avec :

$$\begin{cases} \gamma_1(R) & : \quad t \quad \longmapsto \quad (2t-1)\, R \\ \gamma_2(R) & : \quad t \quad \longmapsto \quad R\, e^{i\pi t} \end{cases} \quad t \in [0, 1], R > 1$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(R)} f(z)\,dz &= 2i\pi\,\mathrm{Res}\,(f,i) = 2i\pi\,\frac{1}{2i} = \pi \\ &= \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_2(R)} f(z)\,dz\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\forall z \in \gamma_2(R) \qquad |1+z^2| &\geqslant R^2-1 \\ \left|\frac{1}{1+z^2}\right| &\leqslant \frac{1}{R^2-1} \\ \left|\int_{\gamma_2(R)} f(z)\,dz\right| &\leqslant \frac{\pi R}{R^2-1}\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$ (ce résultat est immédiat avec les lemmes de Jordan), puis que $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{1+x^2} = I = \pi$.

Remarque

Pour certains calculs d'intégrales, il faut utiliser les valeurs principales de Cauchy qui sont décrites dans le chapitre 5.

1.8 Lemmes de Jordan

Lemme 1

Soit f une fonction analytique dans le demi-plan supérieur sauf en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si

$$\lim_{|z|\to\infty} z f(z) = 0$$

$$(i.e.\ si\ \forall\varepsilon > 0, \exists A = A(\varepsilon), \quad |\, z \,| > A \Rightarrow |\, z f(z) \,| \leqslant \varepsilon)$$

alors l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz \qquad où \qquad \gamma : t \longmapsto R\,e^{i\pi t},\ t \in [t_1, t_2] \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$$

tend vers zéro quand R tend vers l'infini.

Lemme 2

Soit f une fonction analytique dans le demi-plan supérieur sauf en certains points (en nombre fini) qui sont des singularités isolées. Si

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$$

alors, pour $k > 0$, l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\,e^{ikz} dz \qquad où \qquad \gamma : t \longmapsto R\,e^{i\pi t},\ t \in [t_1, t_2] \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$$

tend vers zéro quand R tend vers l'infini.

Lemme 3

Si f est une fonction possédant un pôle simple à l'origine on a :

$$\lim_{r \to 0} \int_\gamma f(z)\, dz = i\pi \,\mathrm{Res}\,(f, 0)$$

où r est positif et $\gamma : t \longmapsto r\, e^{i\pi t},\ t \in [0, 1]$.

1.9 Fonctions multiformes : la fonction Ln

Rappels

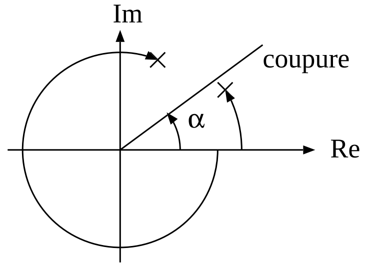
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $X \in \mathbb{R}$.
On a : $X = \ln(x) \Longleftrightarrow x = e^X$.

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On cherche $Z = X + i\,Y$ tel que $z = e^Z$.

$$z = |z|\, e^{i\theta} = e^X\, e^{i\,Y} \Longrightarrow \begin{cases} X &= \ln|z| \\ Y &= \theta + 2\,k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$Z = \ln|z| + i\,(\arg(z) + 2\,k\pi)$$

Il existe donc une infinité de Z tel que $z = e^Z$, d'où le nom de fonction multiforme (ou à détermination multiple).
On peut alors définir une coupure dans le plan complexe (demi-droite partant de l'origine), et un ensemble $\mathbb{C}_{\text{coupé}}$ ($\mathbb{C}$ privé de la coupure) dans lequel il n'y a plus de contour entourant l'origine :
on choisit $\alpha \in [0, 2\pi[$ et par convention on impose $\arg(z) \in]-2\pi + \alpha, \alpha[$.
Les arguments sont ainsi déterminés de façon unique.



(En pratique on prend souvent $\alpha \neq 0$ pour ne pas se priver de l'axe réel)
On a alors, $\boxed{Z = \ln|z| + i\, \arg(z) = \mathrm{Ln}(z)}$, $\quad \forall z \in \mathbb{C}_{\text{coupé}}$
Le résultat de la fonction Ln dépend du choix de la coupure.
Dans $\mathbb{C}_{\text{coupé}}$, Ln est analytique et $\dfrac{d}{dz}\,\mathrm{Ln}(z) = \dfrac{1}{z}$.

Cas particulier

On appelle détermination principale du logarithme la fonction Ln avec pour coupure $\alpha = \pi$.
On a alors $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$ et $\mathbb{C}_{\text{coupé}} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*$.

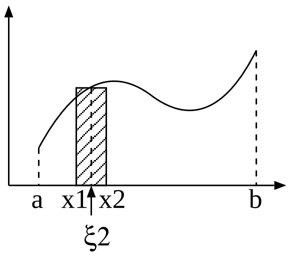
Chapitre 2

Intégrale de Lebesgue

2.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann

Soit f bornée sur un intervalle $[a, b]$ fini de $\mathbb{R}$, et soit $x_1, ..., x_n$ un ensemble fini de points de $[a, b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n < b = x_{n+1}$. On considère alors un ensemble de $\zeta_k,\ k = 1, ..., n+1$ tel que pour tout $k \in [1, n+1]$, on ait

$$x_{k-1} < \zeta_k < x_k$$



On peut donc définir une somme S_n telle que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$$

Définition

Si, quand $n \to \infty$ de manière à ce que $|x_k - x_{k-1}| \to 0$ pour tout k de $[1, n]$, la somme S_n tend vers une limite indépendante du choix des x_k et des ζ_k, alors cette limite est appelée intégrale de f au sens de Riemann sur le segment $[a, b]$ et est notée :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

2.2 Notion de mesure (mesure de Lebesgue)

Soit E un sous-espace de $\mathbb{R}$, et soit $(I_j)_{j \in J}$ un recouvrement de E par un ensemble fini ou infini dénombrable d'intervalles ouverts de E.

Rappels

- *E est dénombrable s'il existe une bijection entre E et une partie de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}$ lui-même).*
  Exemple : les rationnels de $[0,1]$ forment un ensemble dénombrable (on peu les dénombrer en considérant la suite : $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$).
  L'ensemble des irrationnels de $[0,1]$ est indénombrable.
- *soit $\mathcal{F}$ une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un recouvrement de E si tout point de E appartient à au moins un élément de $\mathcal{F}$.*

Définition (mesure extérieure de E)

On appelle mesure extérieure de E la quantité $\mathcal{M}_{ext}(E) = \inf\limits_{(I_j)_{j\in J}} \sum\limits_{j\in J} l(I_j)$ avec $l(I_j)$ la longueur de l'intervalle I_j.

Remarque

1. $\mathcal{M}_{ext}(\varnothing) = 0$.
2. $\mathcal{M}_{ext}(E) \geqslant 0$.
3. Si $A \subset B$, alors $\mathcal{M}_{ext}(A) \leqslant \mathcal{M}_{ext}(B)$.
4. $\mathcal{M}_{ext}(E)$ peut être finie ou infinie.

Définition (mesure intérieure de E)

Soit E un sous-espace de $\mathbb{R}$ tel que sa mesure extérieure soit finie. Soit $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble de toutes les parties fermées de E. On appelle mesure intérieure de E,

$$\mathcal{M}_{int}(E) = \sup_{K\subset\mathcal{F}(E)} \mathcal{M}_{ext}(K)$$

Remarque

On a toujours $\mathcal{M}_{int}(E) \leqslant \mathcal{M}_{ext}(E)$.

Définition (notion d'espace mesurable)

Si $\mathcal{M}_{int}(E) = \mathcal{M}_{ext}(E)$, on dit que E est mesurable au sens de Lebesgue. On pose alors $\mu(E) = \mathcal{M}_{int}(E) = \mathcal{M}_{ext}(E)$.

Définition (mesurabilité d'un ensemble de mesure extérieure infinie)

Soit E un sous espace de la droite réelle, de mesure extérieure infinie. On dit que E est mesurable au sens de Lebesgue si E est l'union d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables au sens de Lebesgue et de mesure extérieure finie, deux à deux disjoints. Alors, on dit que la mesure de E est infinie, $\mu(E) = +\infty$.

Remarque

Soit A et B deux ensembles <u>disjoints</u> et mesurables, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Proposition

Tout intervalle borné est mesurable. De plus, si $b > a$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors :

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \mu([a,b[) = \mu(]a,b]) = b - a$$

Proposition

Tout ensemble dénombrable de points est de mesure nulle.

Démonstration

- Si E est fini, alors on peut écrire $E = \{x_1, ..., x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ fini.
  Soit $\varepsilon > 0$. On définit la suite d'intervalles $I_j(\varepsilon) =]x_j - \frac{\varepsilon}{2n}, x_j + \frac{\varepsilon}{2n}[$, $j = 1...n$. L'ensemble des $I_j(\varepsilon)$ forme un recouvrement de E et :

$$\mathcal{M}_{ext}(E) = \sum_{j=1}^{n} l(I_j(\varepsilon)) = \varepsilon$$

  On a donc $\mathcal{M}_{ext}(E) = 0$ et par suite $\mu(E) = 0$.
- Si E est un ensemble infini dénombrable, alors il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer que la mesure de $\mathbb{N}$ est nulle.
  Pour $\varepsilon > 0$ on recouvre E par l'ensemble infini dénombrable d'intervalles ouverts $I_j(\varepsilon) =]j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}[$. On se ramène a la somme d'une série géométrique de raison inférieure à 1, donc convergente :

$$\sum_{j=1}^{N} l(I_j(\varepsilon)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

  On a donc $\mathcal{M}_{ext}(E) = \mathcal{M}_{ext}(\mathbb{N}) = 0$ et par suite $\mu(E) = \mu(\mathbb{N}) = 0$.

Remarque

La réciproque est fausse : il existe des sous ensembles de $\mathbb{R}$ indénombrables mais de mesure nulle (par exemple l'ensemble triadique de Cantor).

Exemples

1. $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. On a $\mu(E) = 0$ car c'est un ensemble dénombrable.
2. $E' = (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. On a $\mu(E') = 1$ car $E \cup E' = [O, 1]$ et que E et E' sont disjoints.

Définition

Une propriété est dite vraie <u>presque partout</u> si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est de mesure nulle.

Exemple

La fonction caractéristique des irrationnels inclus dans $[0, 1]$ (ou fonction de Dirichlet) est égale à 1 presque partout sur $[0, 1]$.

$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\right) \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

2.3 Fonctions Lebesgue-mesurables

Soit f une fonction définie sur un sous-espace E de $\mathbb{R}$ mesurable.

Définition

La fonction f est dite Lebesgue-mesurable si, $\forall a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) < a\}$ est un ensemble mesurable.

2.4 Fonctions étagées

Soit E un sous-espace mesurable de $\mathbb{R}$. On notera χ_E la fonction caractéristique de E, c'est à dire la fonction qui prend la valeur 1 sur tout élément de E et 0 sinon.

Définition

On appelle fonction étagée toute fonction de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \chi_{E_i}(x)$$

avec

- $n \in \mathbb{N} \quad (n < \infty)$
- *les y_i des réels*
- *les E_i des ensembles mesurables deux à deux disjoints.*

Remarque

- f ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes.
- Si les E_i sont des intervalles alors f est dite en escalier.

Exemples

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- la fonction de Dirichlet est réelle étagée.

2.5 Intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée positive

Définition

Soit f une fonction étagée positive (i.e. $y_i \in \mathbb{R}_+$). On appelle intégrale de Lebesgue le nombre :

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \mu(E_i)$$

avec les précisions suivantes :

- *si $y_i = 0$ et si la mesure de E_i est infinie, alors $y_i \, \mu(E_i) = 0$,*
- $\displaystyle\int f \, d\mu \geqslant 0$ *(mais peut être infinie).*

Proposition

L'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive étagée est finie si et seulement si $\mu\big(\{x / f(x) \neq 0\}\big)$ est finie.

Définition

Soit A un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, on définit l'intégrale de f sur A :

$$\int_A f \, d\mu = \int f \, \chi_A \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \mu(E_i \cap A)$$

Exemple

On considère f_D la fonction de Dirichlet. On peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_D(x) = 0\, \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} + 1\, \chi_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]}$$

Si on prend $A = [0,1]$ alors :

$$\int_A f_D \, d\mu = 0\, \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1] \cap A) + 1\, \mu((\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1] \cap A)$$

d'où

$$\int_A f_D \, d\mu = 1$$

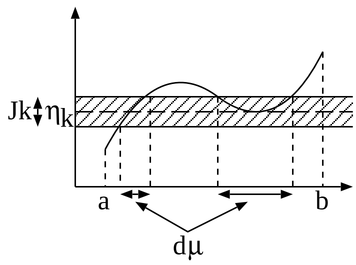
2.6 Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle positive

Soit f une fonction Lebesgue-mesurable positive, on définit $\Sigma(f)$ l'ensemble des fonctions étagées positives inférieures ou égales à f.

Définition

On appelle intégrale de Lebesgue de f le nombre, éventuellement infini, tel que :

$$\int f \, d\mu = \sup_{e \in \Sigma(f)} \int e \, d\mu$$



Définition

La fonction est dite sommable au sens de Lebesgue si $\int f \, d\mu$ est finie.

2.7 Intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle

Soit f une fonction à valeurs réelles. On peut définir deux fonctions auxiliaires f^+ etf^- par :

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f^-(x) &= \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors $f = f^+ - f^-$.

Définition

Une fonction à valeurs réelles f est sommable si et seulement si les deux fonctions f^+ et f^- sont sommables, et on pose alors :

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu$$

Remarques

- si $\int f^+\,d\mu = +\infty$ et $\int f^-\,d\mu = -\infty$ alors $\int f\,d\mu$ n'existe pas.
- si $\int f^+\,d\mu = +\infty$ (resp. f^-) et $\int f^-\,d\mu$ est finie (resp. f^+) alors $\int f\,d\mu = +\infty$ (resp. $-\infty$).
- $\int_A f\,d\mu = \int f\,\chi_A\,d\mu$

2.8 Intégrale de Lebesgue d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

D'après ce qui a été écrit précédemment, parler de l'intégrale de Lebesgue de la partie réelle de f et de la partie imaginaire de f a un sens, puisque ces deux fonctions sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où $Re(f)$ et $Im(f)$ sont sommables, on définit l'intégrale de f comme :

$$\int f\,d\mu = \int Re(f)\,d\mu + i\int Im(f)\,d\mu$$

2.9 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Proposition

1. *L'ensemble des fonctions sommables sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{L}^1(A)$, est un espace fonctionnel (i.e. un espace vectoriel dont les vecteurs sont de fonctions).*
   L'intégrale de Lebesgue est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{L}^1(A)$.
2. *Si E est un sous-espace de mesure nulle, alors l'intégrale d'une fonction f sur E est nulle.*
3. *Si f est nulle presque partout sur A, alors l'intégrale de f sur A est nulle.*
4. *Si deux fonctions sont presque partout égales sur un sous-espace A, alors leurs intégrales sont égales sur A.*
   On raisonne donc parmi des classes d'équivalence de fonctions presque partout égales sur un espace donné, et $L^1(A)$ est l'espace vectoriel formé de ces classes.
5. *Soit f une fonction mesurable positive sur A.*
   Si son intégrale est nulle sur A, alors la fonction f est nulle presque partout sur A.

6. *Soit f et g deux fonctions sommables, telles que $f \geqslant g$ presque partout sur A, alors*
$$\int_A f\,d\mu \geqslant \int_A g\,d\mu$$
7. *Si f est sommable sur $A \subset \mathbb{R}$, alors f est presque partout finie sur A.*
8. *Une fonction est sommable sur A si et seulement si son module est sommable sur A.*
9. *Si f est sommable sur A, alors on a :*
$$\left|\int_A f\,d\mu\right| \leqslant \int_A |f|\,d\mu$$
10. *Si g est positive et sommable sur A, et si $|f| \leqslant g$ presque partout sur A, alors f est sommable sur A et*
$$\left|\int_A f\,d\mu\right| \leqslant \int_A g\,d\mu$$

2.10 Lien Riemann-Lebesgue

Considérons tout d'abord l'intégrale de Riemann au sens strict (on verra plus bas le cas des intégrales impropres).

Proposition

Soit f une fonction bornée définie sur un intervalle borné $[a, b]$ (avec $b > a$). Si f est intégrable au sens de Riemann (pour cela il faut et il suffit que f soit presque partout continue), alors f est sommable et son intégrale de Lebesgue est égale à son intégrale de Riemann :

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu(x)}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Riemann}}$$

Proposition (changement de variable)

Si f est continue sur $[a, b]$ et si φ est monotone, continuement dérivable sur un domaine de définition dont l'image contient $[a, b]$ alors :

$$\boxed{\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu(x) = \int_{\varphi([a,b])} f\big(\varphi(t)\big)\,|\varphi'(t)|\,d\mu(t)}$$

Considérons maintenant les cas des intégrales impropres. On va étudier le cas d'une fonction bornée sur un intervalle infini (le cas d'une fonction non bornée sur un intervalle fini se traite de la même façon).

Proposition

Soit $f(x)$ une fonction continue sur tout intervalle fermé borné $[a, A]$ (avec a donné, et $A > a$).

1. *Si l'intégrale impropre de Riemann* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *est absolument convergente, alors la fonction* $f(x)$ *est sommable au sens de Lebesgue sur le sous-ensemble* $E = \{x \in \mathbb{R} / \, x \geqslant a\}$ *et on a :*

$$\underbrace{\int_E f(x)\,d\mu(x)}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{Riemann}}$$

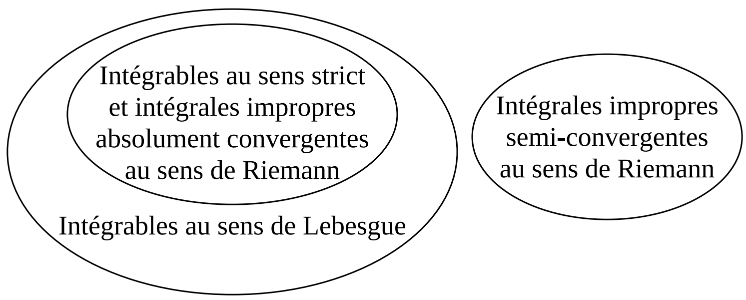
2. *Si l'intégrale impropre de Riemann* $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ *n'est que semi-convergente, alors la fonction* $f(x)$ *n'est pas sommable sur* E.

Exemple

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas absolument convergente au sens de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{A\to\infty} \int_0^A \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= +\infty \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est donc pas sommable sur $\mathbb{R}_+$ au sens de Lebesgue.



2.11 Théorème de convergence dominée

Théorème de convergence dominée

Soit A *un sous ensemble mesurable de* $\mathbb{R}$. *Soit* $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ *une suite de fonctions convergeant presque partout sur* A *vers une fonction* $f(x)$. *S'il existe une fonction* $g(x) \geqslant 0$, *sommable sur* A, *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| \leqslant g(x)$$

pour presque tout $x \in A$, *alors la fonction* f *est sommable sur* A *et on a :*

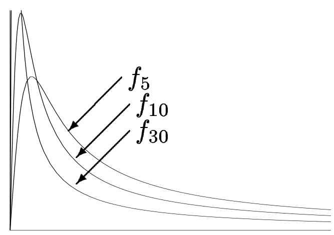
$$\int_A f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,d\mu(x)$$

Exemple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$$

La suite (f_n) converge vers 0 de façon non uniforme :



L'intégration selon Riemann ne permet pas de conclure.

On a :

$$\frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$$

(pour obtenir ce résultat il faut dériver par rapport à n et trouver le maximum)

La fonction majorante est sommable selon Lebesgue (intégrale impropre selon Riemann qui converge absolument), et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x) = 0$$

2.12 Fonctions définies par des intégrales

Soit $f(x,t)$ une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$ définie sur le produit cartésien $A\times I$ où A est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ et $I =]a,b[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Considérons la fonction de I dans $\mathbb{C}$ définie par une intégrale :

$$t \longmapsto \int_A f(x,t)\,d\mu(x)$$

Les théorèmes suivants concernent la continuité et la dérivabilité de la fonction ainsi définie.

Théorème de continuité

Si la fonction $f(x,t)$ est telle que

1. *pour tout $t\in I$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est mesurable*
2. *pour presque tout $x\in A$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue au point t_0*
3. *il existe une fonction $g(x)\geqslant 0$, sommable sur A, telle que :*

$$|f(x,t)| \leqslant g(x)$$

pour tout $t\in I$ et pour presque tout $x\in A$

alors la fonction $x \mapsto f(x,t)$ *est sommable sur* A *et la fonction*

$$t \longmapsto \int_A f(x,t)\, d\mu(x)$$

est continue au point t_0*, i.e. :*

$$\lim_{t\to t_0} \int_A f(x,t)\, d\mu(x) = \int_A f(x,t_0)\, d\mu(x)$$

Théorème de dérivabilité

Si la fonction $f(x,t)$ *est telle que*

1. *pour tout* $t \in I$*, la fonction* $x \mapsto f(x,t)$ *est sommable sur* A
2. *pour presque tout* $x \in A$*, la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est dérivable sur* $]a,b[$
3. *il existe une fonction* $g(x) \geqslant 0$*, sommable sur* A*, telle que :*

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\right| \leqslant g(x)$$

pour tout $t \in I$ *et pour presque tout* $x \in A$

alors la fonction

$$t \longmapsto \int_A f(x,t)\, d\mu(x)$$

est dérivable sur I*.*

En outre, pour tout $t \in I$*, la fonction* $x \mapsto \dfrac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ *est sommable sur* A *et on a :*

$$\frac{d}{dt}\int_A f(x,t)\, d\mu(x) = \int_A \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\, d\mu(x)$$

(dérivation sous le signe somme)

2.13 Espaces fonctionnels L^1 et L^2

Rappel

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie par :

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f = g \text{ presque partout sur } A$$

Alors : $L^1(A) = \mathcal{L}^1(A)/\mathcal{R}$

où $\mathcal{L}^1(A)$ est l'ensemble des fonctions définies sur A et à valeur dans $\mathbb{C}$ sommables.

On appelle donc $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$ sommables, *i.e. :*

$$\int |f(x)|\, d\mu(x) < \infty$$

deux fonctions égales presque partout sur $\mathbb{R}$ étant considérées comme identiques.

Définition

On appelle $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont le carré du module est sommable, i.e. :

$$\int |f(x)|^2 \, d\mu(x) < \infty$$

On définit alors $L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})/\mathcal{R}$ (deux fonctions égales presque partout sur $\mathbb{R}$ sont considérées comme identiques pour $L^2(\mathbb{R})$).

Remarque

Il n'existe pas de relation d'inclusion entre $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$. Par exemple :

$$\begin{aligned} x \longmapsto \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} \quad &\in \quad L^1(\mathbb{R}), \ \notin L^2(\mathbb{R}) \\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad &\in \quad L^2(\mathbb{R}), \ \notin L^1(\mathbb{R}) \\ x \longmapsto e^{-x^2} \quad &\in \quad L^1(\mathbb{R}), \ \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Proposition

Les espaces fonctionnels $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels (sur le corps des complexes) de dimension infinie.

On peut munir $L^1(\mathbb{R})$ de la norme suivante :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \longmapsto \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int |f(x)| \, d\mu(x)$$

De même, on peut munir $L^2(\mathbb{R})$ de la norme suivante :

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \longmapsto \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\int |f(x)|^2 \, d\mu(x)}$$

Théorème de Fisher-Riesz

Les espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ munis de leurs normes sont des espaces de Banach (i.e. des espaces vectoriels normés complets).

Remarque

La norme définie sur $L^2(\mathbb{R})$ dérive d'un produit scalaire :

$$< f, g >= \int_A \bar{f} \, g \, d\mu$$

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ forme ainsi un espace de Hilbert.

2.14 Intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$

Soient A et B deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$. Soit $f(x, y)$ une fonction mesurable définie sur le produit cartésien $A \times B$. Si elle existe, l'intégrale de Lebesgue de f sur $A \times B$ sera notée :

$$\int_{A \times B} f(x, y) \, d\mu(x) \, d\mu(y)$$

(pour la construction de l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$, voir par exemple N. Boccara, *Intégration*, Eyrolles 1995 ; cette construction requiert la définition d'une mesure de Lebesgue pour un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$).

La fonction f est dite sommable sur $A \times B$ si :

$$\left| \int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \right| < \infty$$

On montre que f est sommable si et seulement si son module $|f|$ est sommable et on a alors :

$$\left| \int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) \right| < \int_{A\times B} |f(x,y)|\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

Théorème de Fubini

Si $f(x,y)$ est sommable sur $A \times B$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) &= \int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y)\end{aligned}$$

Remarques

1. L'énoncé du théorème de Fubini renferme l'affirmation que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_B f(x,y)\, d\mu(y)$ (resp. $y \mapsto \int_A f(x,y)\, d\mu(x)$) est définie pour presque tout $x \in A$ (resp. $y \in B$).
2. Si $f(x,y)$ n'est pas sommable, il peut arriver que l'une des deux expressions

$$\int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

ait un sens sans que l'autre en ait un. Il peut même arriver que chacune ait un sens mais que les valeurs soient distinctes.

3. Il suffit que l'une des deux expressions

$$\int_A \left(\int_B |f(x,y)|\, d\mu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_B \left(\int_A |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

soit finie pour que la fonction $f(x,y)$ soit sommable sur $A \times B$.

4. Soit $f(x,y)$ une fonction de la forme

$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

(produit de fonctions dépendant d'une seule variable et dont aucune n'est presque partout nulle). Pour que f soit sommable il faut et il suffit que chacune des fonctions f_i $(i = 1, 2)$ soit sommable. On a alors :

$$\int_{A\times B} f(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \left(\int_A f_1(x)\, d\mu(x) \right) \left(\int_B f_2(y)\, d\mu(y) \right)$$

Exemple

$A = B = [0,1]$

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

Pour $f(0,0)$ on peut prendre n'importe quelle valeur car c'est un point de mesure nulle qui n'intervient pas dans l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int_A \left(\int_B f(x,y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) &= \frac{\pi}{4} \\ \int_B \left(\int_A f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

La fonction f n'est donc pas sommable sur $[0,1] \times [0,1]$.

Chapitre 3

Transformation de Fourier

3.1 Définition et premières propriétés

3.1.1 Définition

Définition

Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction de la variable $k \in \mathbb{R}$, notée F ou $\mathcal{F}[f]$, telle que :

$$\boxed{\mathcal{F}[f](k) = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{-ikx}\, d\mu(x)}$$

Cette définition peut différer d'une constante dans certains ouvrages.

Remarques

- Pour que cette expression ait un sens il faut que $f(x)\, e^{-ikx}$ soit sommable, ce qui est assuré par le fait que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
- Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telles que $f = g$ presque partout sur $\mathbb{R}$ alors $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[g]$

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a :

1. *$\mathcal{F}[f]$ est bornée*
2. *$\mathcal{F}[f]$ est continue*
3. $\lim\limits_{|k| \to +\infty} \mathcal{F}[f] = 0$

Exemples

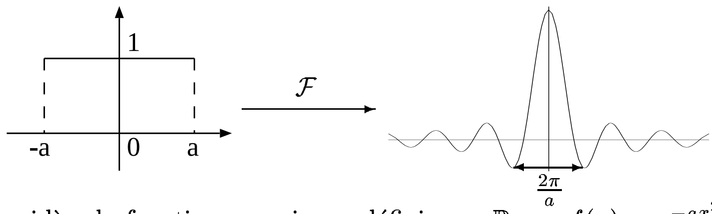
- On considère la fonction f définie par :

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-a, a[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad a > 0$$

Sa transformée de Fourier est définie pour tout k réel comme :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, e^{-ikx}\, d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx}\, dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a\, \frac{\sin ka}{ka}
\end{aligned}$$

Remarque : la transformée de Fourier n'appartient pas à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.



– On considère la fonction gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$, avec $a \in \mathbb{R}_+$. La transformée de Fourier de f est aussi une gaussienne, et s'exprime comme :

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

Si on considère la largeur du pic à $1/e$ du maximum, on trouve que le produit $\Delta x \Delta k$ est constant (cf principe d'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique).
Remarque : pour calculer la transformée de Fourier de f, on utilise souvent le théorème des résidus.

3.1.2 Propriétés

Linéarité

La transformée de Fourier est une application linéaire de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dans l'espace des fonctions :

$$\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{C} \quad \mathcal{F}[b_1 f_1 + b_2 f_2] = b_1\, \mathcal{F}[f_1] + b_2\, \mathcal{F}[f_2]$$

Parité et réalité

On a les résultats suivants :

f	$\mathcal{F}[f]$
paire	paire
impaire	impaire
réelle	à symétrie hermitique : $F(-k) = \overline{F(k)}$
imaginaire pure	à symétrie anti-hermitique : $F(-k) = -\overline{F(k)}$

Changement d'échelle et translation

Théorème de changement d'échelle
Soit f sommable, et $a \in \mathbb{R}^*$, alors on a :

$$\mathcal{F}[f(ax)](k) = \frac{1}{|a|}\,\mathcal{F}[f]\left(\frac{k}{a}\right)$$

Théorème de translation
Soit f sommable, et $b \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\mathcal{F}[f(x+b)](k) = e^{ikb}\,\mathcal{F}[f](k)$$

On dit que la transformée de Fourier a subit un déphasage.

3.2 Formules

3.2.1 Transformée de Fourier de la dérivée

Théorème
Soit f une fonction sommable et partout continue, dérivable presque partout et telle que f' soit sommable. Alors on a :

$$\mathcal{F}[f'](k) = ik\,\mathcal{F}[f](k)$$

Théorème : généralisation
Soit f telle que ses $m-1$ dérivées existent et soient sommables, partout continues, et telle que la dérivée d'ordre m de f existe presque partout et soit sommable. Alors :

$$\mathcal{F}\left[f^{(m)}\right](k) = (ik)^m\,\mathcal{F}[f](k)$$

De ces deux théorèmes, ont peut déduire un résultat concernant la vitesse de décroissance vers zéro de la transformée de Fourier de f en fonction de l'ordre maximal de dérivation de f. En effet, si f est telle que $f^{(m)}$ soit sommable et définie presque partout, alors sa transformée de Fourier est bornée :

$$\exists M > 0,\ \forall k \in \mathbb{R},\ |(ik)^m\,\mathcal{F}[f](k)| \leqslant M$$

Donc , si $k \neq 0$, on a :

$$|\mathcal{F}[f](k)| \leqslant \frac{M}{|k|^m}$$

On voit donc que si f est indéfiniment dérivable, et que toutes ses dérivées sont sommables, la transformée de Fourier de f décroît à l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{|k|}$, ce qui se vérifie aisément en prenant l'exemple d'une fonction gaussienne.

3.2.2 Transformée de Fourier de $x \mapsto xf(x)$

Théorème

Soit f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction définie par $x \mapsto xf(x)$, avec x réel, soit sommable sur $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{F}[f(x)](k)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\mathcal{F}[x\, f(x)](k) = i\, \frac{d}{dk} \mathcal{F}[f](k)$$

Théorème : généralisation

Soit f sommable sur $\mathbb{R}$, telle que la fonction $x \mapsto x^m f(x)$ soit sommable sur $\mathbb{R}$. Alors la transformée de Fourier de f est m fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\mathcal{F}\left[x^m f(x)\right](k) = i^m \frac{d^m}{dk^m} \mathcal{F}[f](k)$$

3.2.3 Produit de convolution

Définition du produit de convolution

Soient f et g deux fonctions sommables sur $\mathbb{R}$.
L'intégrale $\displaystyle\int f(x-x')\, g(x')\, d\mu(x')$ existe pour presque tout x, et définit une fonction appelée produit de convolution de f et gi et notée $f * g$:

$$\boxed{\big(f * g\big)(x) = \int f(x-x')\, g(x')\, d\mu(x')}$$

Proposition

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$$f * g = g * f$$

Proposition

Si les fonctions f et g sont deux fonctions sommables, alors leur produit de convolution est une fonction sommable.

Théorème

Soit f et g deux fonctions sommables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[f]\, \mathcal{F}[g]}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f](k)\,\mathcal{F}[g](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(X)\,e^{-ikX}\,d\mu(X)\int g(X')\,e^{-ikX'}\,d\mu(X') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint f(X)\,e^{-ikX}\,g(X')\,e^{-ikX'}\,d\mu(X)\,d\mu(X') \\
&\qquad \text{(en posant } x = X + X' \text{ et } x' = X'\text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\int f(x-x')\,g(x')\,e^{-ikx}\,d\mu(x)\,d\mu(x') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left(\int f(x-x')\,g(x')\,d\mu(x')\right)e^{-ikx}\,d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int (f*g)(x)\,e^{-ikx}\,d\mu(x) \\
&= \mathcal{F}[f*g](k)
\end{aligned}$$

3.2.4 Inversion de Fourier

Théorème d'inversion

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et soit F sa transformée de Fourier. Si F est sommable alors on a presque partout :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int F(k)\,e^{+ikx}\,d\mu(k)$$

Définition

Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On définit l'opérateur inverse $\mathcal{F}^-$ par :

$$\mathcal{F}^-[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(k)\,e^{+ikx}\,d\mu(k)$$

Proposition

Soit f une fonction sommable sur $\mathbb{R}$. Si sa transformée de Fourier F est sommable sur $\mathbb{R}$, alors presque partout on a :

$$f(x) = \mathcal{F}^-\big[\mathcal{F}[f]\big](x)$$

3.2.5 Application à la résolution d'une équation intégrale

On considère l'équation intégrale de type Fredholm, où f est une fonction sommable sur $\mathbb{R}$:

$$\int f(x-x')\,f(x')\,d\mu(x') = \frac{1}{x^2+1}$$

On reconnaît l'expression du produit de convolution de f par elle même, donc on a :

$$\sqrt{2\pi}\,\big(\mathcal{F}[f](k)\big)^2 = \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\pi\,e^{-|k|}$$

On a donc :

$$\mathcal{F}[f](k) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-|k|/2}$$

On applique maintenant l'opérateur inverse, et on obtient finalement :

$$f(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{4x^2+1}$$

3.2.6 Fonctions sommables, de carré sommable

Théorème de Plancherel

Soit f une fonction sommable et de carré sommable sur $\mathbb{R}$. Alors sa transformée de Fourier F est de carré sommable et on a la relation :

$$\int |f(x)|^2 \, d\mu(x) = \int |F(k)|^2 \, d\mu(k)$$

3.2.7 Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $\overrightarrow{k} = (k_1, ..., k_n)$. On définit un produit scalaire et une norme :

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{k} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, k_i \qquad \|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Définition

Avec ces notations, on considère f une fonction sommable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$. On définit la transformée de Fourier de f par :

$$F(\overrightarrow{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\overrightarrow{x}) \, e^{-i \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{x}} \, d\mu(\overrightarrow{x})$$

avec : $d\mu(\overrightarrow{x}) = d\mu(x_1) \ldots d\mu(x_n)$

Remarque

Soit $f(x_1, x_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$. Si $x_1 \, f(x_1, x_2) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ alors :

$$\frac{\partial}{\partial k_1} \mathcal{F}\big[f(x_1, x_2)\big](k_1, k_2) = -i \, \mathcal{F}\big[x_1 \, f(x_1, x_2)\big](k_1, k_2)$$

Proposition

Si f est radiale, c'est à dire ne dépend que de la norme du vecteur $\overrightarrow{x}$, alors sa transformée est radiale.

Exemple

Le potentiel de Yukawa est donné par :

$$f(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{x}\|} e^{\lambda \|\overrightarrow{x}\|}, \ \lambda > 0$$

C'est une fonction radiale. Sa transformée de Fourier est définie pour tout $\overrightarrow{k}$ par :

$$F(\overrightarrow{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\|\overrightarrow{x}\|} e^{-\lambda \|\overrightarrow{x}\|} \, e^{-i \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{x}} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

Pour $\overrightarrow{k}$ donné on passe en coordonnées sphériques avec le vecteur $\overrightarrow{x_3}$ suivant $\overrightarrow{k}$.

$$\begin{aligned}
F(\overrightarrow{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, e^{-\lambda r}\, e^{-i\,\|\overrightarrow{k}\|\, r\cos\theta}\, r^2\, \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, 2\pi \int_0^{+\infty} r\, e^{-\lambda r} \left(\int_0^{\pi} e^{-i\,\|\overrightarrow{k}\|\, r\cos\theta}\, \sin\theta\, d\theta \right) dr \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{\|\overrightarrow{k}\|^2 + \lambda^2}
\end{aligned}$$

F est bien une fonction radiale.

Chapitre 4

Transformation de Laplace

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est localement sommable si elle est sommable sur tout sous ensemble E de $\mathbb{R}$ de mesure finie.

4.1 Définition

Définition

Soit f localement sommable , nulle pour $t < 0$. On appelle transformée de Laplace l'application définie par :

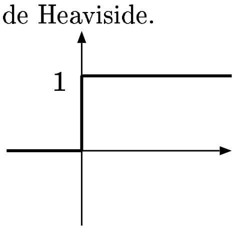
$$\mathcal{L}[f] : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ s & \longmapsto \quad \mathcal{L}[f](s) = \displaystyle\int f(t)\, e^{-st}\, d\mu(t) \end{cases}$$

Cette application existe sous réserve de sommabilité de la fonction $t \longmapsto f(t)\, e^{-st}$.

Exemples

– transformée de Laplace de l'échelon de Heaviside.

$$\mathrm{H(t)} = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



$$\int H(t)\, e^{-st}\, d\mu(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt$$

C'est une intégrale impropre de Riemann divergente pour $s \leqslant 0$ et convergente pour $s > 0$. La transformée de Laplace de H n'est définie que pour $s > 0$ et dans ce cas :

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}$$

– la transformée de Laplace de l'échelon de Heaviside H translaté de $a > 0$ est $\mathcal{L}(H_a)(s) = \dfrac{1}{s}\, e^{-sa},\ s > 0$

– Soit la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} e^{(a+ib)\,t} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s-(a+ib)} \quad \text{pour } s > a$$

4.2 Abscisse de sommabilité

Définition

Soit f une application sommable et nulle pour $t < 0$.
On peut montrer qu'il existe $s_0 \in \mathbb{R}$, appelée abscisse de sommabilité de la transformée de Laplace de f, telle que :
- *$\forall s > s_0$ la fonction $t \longmapsto f(t)\,e^{-st}$ est sommable (et donc la transformée de Laplace de f existe)*
- *$\forall s < s_0$ la fonction $t \longmapsto f(t)\,e^{-st}$ n'est pas sommable*

Pour $s = s_0$ il peut ou non y avoir sommabilité.

Remarque
- si $s_0 = -\infty$, la transformée de Laplace de f est définie sur tout $\mathbb{R}$
- si $s_0 = +\infty$, f n'admet pas de transformée de Laplace.

Proposition

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $f = 0$ sur $\mathbb{R}_-$ alors $s_0 \leqslant 0$.

Proposition

Si, pour tout t suffisamment grand,

$$|f(t)| \leqslant A\,e^{kt}, \quad A \in \mathbb{R}_+^*, \; k \in \mathbb{R}$$

alors

$$s_0 \leqslant k$$

4.3 Propriétés de la transformée de Laplace

4.3.1 Premières propriétés

Propriétés

1. *La transformée de Laplace est une application linéaire*
2. *Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On a :*

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a}\,\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right) \qquad s > a s_0$$

3. *Avec les mêmes hypothèses et $a \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\mathcal{L}[f(t-a)](s) = e^{-as}\,\mathcal{L}[f(t)](s) \qquad s > s_0$$

4. *Avec les mêmes hypothèses et* $b \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\mathcal{L}[e^{bt} f(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s-b) \qquad s > s_0 + b$$

5. $\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$

Théorème de la valeur initiale

Si quand t *tend vers* 0 f *admet une limite à droite notée* $f(0^+)$ *alors :*

$$\lim_{s \to +\infty} s\,\mathcal{L}[f](s) = f(0^+)$$

Théorème de la valeur finale

Si f *admet une limite en* $+\infty$, *notée* $f(+\infty)$, *alors* $s_0 \leqslant 0$ *et :*

$$\lim_{s \to 0} s\,\mathcal{L}[f](s) = f(+\infty)$$

4.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée

Proposition

Soit f *localement sommable, nulle pour* $t < 0$, *possédant sur* $\mathbb{R}_+^*$ *une dérivée continue, (ou continue par morceaux, localement sommable). De plus on suppose que pour* t *assez grand,*

$$|f(t)| \leqslant A\,e^{kt}, \ (A,k) \in \mathbb{R}^2$$

Alors :

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\,\mathcal{L}[f](s) - f(0^+) \qquad s > k$$

4.4 Produit de convolution

Proposition

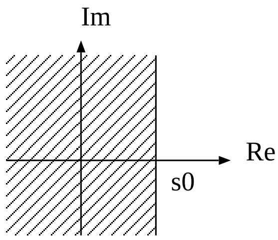
Soient f_1, f_2 *deux fonctions localement sommables, nulles pour* $t < 0$, *d'abscisses de sommabilité respectives* s_{01} *et* s_{02}.
On a alors, pour $s > s_0 = \max(s_{01}, s_{02})$

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2] = \mathcal{L}[f_1]\,\mathcal{L}[f_2]$$

4.5 Analycité de la transformée de Laplace

On considère maintenant la transformée de Laplace comme une fonction de la variable complexe :

$$\mathcal{L}[f] : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \quad \mathcal{L}[f](z) = \displaystyle\int f(t)\,e^{-zt}\,d\mu(t) \end{cases} \qquad \{z \in \mathbb{C} / Re(z) > s_0\}$$



Théorème

La transformée de Laplace est analytique sur le domaine de sommabilité $\{z \in \mathbb{C} / Re(z) > s_0\}$ et on a la formule :

$$\big(\mathcal{L}[f(t)](z)\big)^{(n)} = \mathcal{L}\big[(-t)^n f(t)\big](z)$$

4.6 Lien avec la transformée de Fourier

Proposition

Soit f localement sommable, nulle pour $t < 0$. On a, sur le domaine de sommabilité, en posant $z = x + iy$, et en raisonnant à $x > s_0$ fixé :

$$\mathcal{L}[f](z) = \int f(t)\, e^{-xt}\, e^{-iyt}\, d\mu(t) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}\big[f(t)\, e^{-xt}\big](y)$$

4.7 Inversion de la transformée de Laplace

Proposition : formule de Bromvitch

On suppose que pour $x > s_0$, la fonction $y \mapsto \mathcal{L}[f](x+iy)$ est une fonction sommable. D'après les résultats sur la transformée de Fourier, on a, pour presque tout t :

$$\sqrt{2\pi}\, f(t)\, e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathcal{L}[f](z)\, e^{iyt}\, d\mu(y) \qquad x > s_0$$

On a donc, presque partout, avec $V_x = \{z \in \mathbb{C} / Re(z) > s_0\}$:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{V_x} \mathcal{L}[f](z)\, e^{zt}\, dz = \frac{1}{2i\pi} \int \mathcal{L}[f](x+iy)\, e^{(x+iy)t}\, i d\mu(y)}$$

Exemple

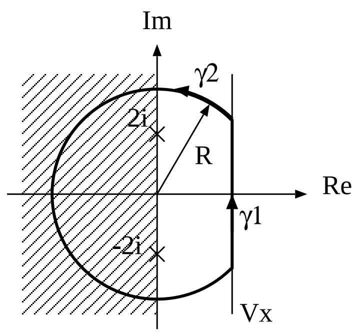
$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est nulle pour $t < 0$ et localement sommable. On a :

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{s^2+4} \qquad s > s_0 = 0$$

Transformée de Laplace inverse : $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{v_x} \frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}\, dz$ possède deux singularités en $\pm 2i$, avec :

$$\text{Res}\left(\frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}, 2i\right) = \frac{e^{2it}}{2} \qquad ; \qquad \text{Res}\left(\frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}, -2i\right) = \frac{e^{-2it}}{2}$$



$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}\, dz = i\pi \left(e^{2it} + e^{-2it}\right)$$

Puis, en utilisant les lemmes de Jordan :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{v_x} \frac{z}{z^2+4}\, e^{zt}\, dz = \cos 2t$$

Transformées de Laplace usuelles (avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et $t_0 > 0$)

$f(t)\ (t \geqslant 0)$	$\mathcal{L}[f](s)$	s_0
c	$\frac{c}{s}$	0
$c\, t^n$	$\frac{c\, n!}{s^{n+1}}$	0
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	0
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	0
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	a
$t^n\, e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	a
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\lvert a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\lvert a\rvert$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{a}{(s-a)^2+b^2}$	a
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	a
$t^{1/2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{s^3}\right)^{1/2}$	0
$t^{-1/2}$	$\left(\frac{\pi}{s}\right)^{1/2}$	0
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	0
$H(t-t_0)$	$\frac{e^{-st_0}}{s}$	0

Chapitre 5

Distributions

5.1 Espace fonctionnel

5.1.1 Définition

Définition

On appelle espace fonctionnel un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions ayant une structure d'espace vectoriel.

Exemple

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $L^1(\mathbb{R})$ forment des espaces fonctionnels.

5.1.2 Fonctionnelle

Définition

On appelle fonctionnelle T sur un espace fonctionnel $\mathcal{F}$ une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{C}$. On note :

$$T : \begin{cases} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & < T, f > \end{cases}$$

Exemple

$$T : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & < T, f > = \displaystyle\int f(x)\, d\mu(x) \end{cases}$$

Définition

L'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ est dit "topologique" si on a donné un sens à l'expression "la suite $\varphi_n(x)$ de fonctions de $\mathcal{F}$ converge pour $n \longrightarrow +\infty$ vers la fonction $\varphi(x) \in \mathcal{F}$".

Remarque

Si $\mathcal{F}$ est normé, on peut donner à l'expression "la suite $\varphi_n(x)$ de fonctions de $\mathcal{F}$ converge pour $n \longrightarrow +\infty$ vers la fonction $\varphi(x) \in \mathcal{F}$" le sens suivant :

$$\forall \varepsilon\ \exists N = N(\varepsilon) \text{ tel que } \quad n > N \Longrightarrow \|\varphi_n - \varphi\| \leqslant \varepsilon$$

Ce choix de convergence est appelé convergence en norme.

Définitions

La fonctionnelle T sur un espace fonctionnel topologique $\mathcal{F}$ est continue si pour toute suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{F}$ convergeant vers $\varphi \in \mathcal{F}$, la suite numérique $(< T, \varphi_n >)_n$ converge vers $< T, \varphi >$.
Elle est linéaire si pour tous complexes λ_1 et λ_2 et toutes fonctions φ_1 et φ_2 de $\mathcal{D}$ on a $< T, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 >= \lambda_1 < T, \varphi_1 > + \lambda_2 < T, \varphi_2 >$.

Définition

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces fonctionnels topologiques, chacun muni de sa propre notion de convergence. On dit que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$:
- *si $\forall \varphi \in \mathcal{F},\ \varphi \in \mathcal{G}$*
- *si une suite de $\mathcal{F}$ converge dans $\mathcal{F}$ au sens de la norme de $\mathcal{F}$, alors elle converge aussi dans $\mathcal{G}$ au sens de la norme de $\mathcal{G}$.*

Exemple

On prend $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$, muni de la topologie de la convergence uniforme et $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence simple. On a $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Définition Densité

Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ tels que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. On dit que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{G}$ si toute fonction de $\mathcal{G}$ est la limite au sens de la convergence de $\mathcal{G}$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{F}$.

Rappels

- *On appelle support d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ le plus petit fermé contenant $\{x \in \mathbb{R} / \varphi(x) \neq 0\}$.*
- *On peut normer l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R})$ des classes d'équivalences de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pour la classe d'équivalence "presque partout égale à", par :*

$$\| \ \|_{L^1(\mathbb{R})} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow \quad \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \displaystyle\int |f(x)|\, d\mu(x) \end{cases}$$

Notation

On note $\mathcal{C}_c^0\{\mathbb{R}\}$ l'ensemble des fonctions continues et à support borné.

Proposition

L'espace fonctionnel $\mathcal{C}_c^0\{\mathbb{R}\}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

5.1.3 Dual d'un espace fonctionnel topologique

Définition

Le dual $\mathcal{F}'$ d'un espace fonctionnel topologique $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathcal{F}$.

Proposition

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux espaces fonctionnels topologiques. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et si $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}' \subset \mathcal{F}'$.

5.1.4 Espace fonctionnel $\mathcal{D}$

Définition

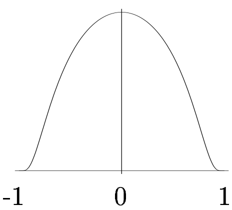
L'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infiniment dérivables et à supports bornés forme un espace fonctionnel noté $\mathcal{D}$ et appelé espace fonctionnel de Schwartz.
Les éléments de $\mathcal{D}$ sont appelés fonctions d'essai.

Exemple

La fonction de Schwartz définie par :

$$\zeta : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

C'est une fonction de classe C^∞ ayant pour support $[-1, 1]$.



$\zeta \in \mathcal{D}$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \zeta^{(n)}(-1) = \zeta^{(n)}(1) = 0$$

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et soit f sommable à support borné, alors le produit de convolution $\big(\varphi * f\big)(x) = \displaystyle\int \varphi(x - x')\, f(x')\, d\mu(x')$ appartient à $\mathcal{D}$.

5.1.5 Convergence dans $\mathcal{D}$

Définition

On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}$ au sens de $\mathcal{D}$ quand n tend vers l'infini si :
- *les supports de tous les φ_n sont contenus dans un même ensemble borné*
- *pour $p \in \mathbb{N}$ donné, la suite $\big(\varphi_n^{(p)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi^{(p)}$*

5.2 Distributions

5.2.1 Définition

Définition

On appelle distribution toute fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{D}$.

Remarques

- Les distributions sont les éléments de $\mathcal{D}'$.
- Une distribution est une application, et non une fonction.

Propriété

L'espace $\mathcal{D}'$ est un espace vectoriel avec les lois suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} & < T_1 + T_2, \varphi > & = & < T_1, \varphi > + < T_2, \varphi > \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} & < \lambda T, \varphi > & = & \lambda < T, \varphi > \end{array}$$

Remarques

- T est dite nulle si et seulement si $\forall \varphi \in \mathcal{D},\ < T, \varphi >= 0$
- $T_1 = T_2$ si $\forall \varphi \in \mathcal{D},\ < T_1, \varphi >=< T_2, \varphi >$

5.2.2 Distributions régulières

Définition

Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, localement sommable. L'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$T_f : \varphi \longmapsto < T_f, \varphi >= \int f(x)\, \varphi(x)\, d\mu(x)$$

est une distribution dite régulière. Toute distribution qui ne peut pas s'écrire sous cette forme est dite singulière.

Remarque

En physique on note souvent f la distribution régulière T_f.

Proposition

Soient f et g deux fonctions localement sommables. On a :

$$T_f = T_g \Longleftrightarrow f = g \textit{ presque partout}$$

Exemple

La fonction de Heaviside est localement sommable et on peut lui associer une distribution régulière notée T_H :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad < T_H, \varphi >= \int H(x)\, \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx$$

C'est la distribution de Heaviside.

5.2.3 Distribution de Dirac

Définition : distribution de Dirac

On définit une distribution δ, appelée distribution de Dirac, telle que :

$$\delta\ : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \quad < \delta, \varphi >= \varphi(0) \end{cases}$$

δ est une distribution singulière : il n'existe pas de fonction δ localement sommable telle que $\displaystyle\int \delta(x)\, \varphi(x)\, d\mu(x) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Remarque

De manière générale, le produit de deux distributions n'est pas défini.

Proposition (cas particulier)
Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *de classe* C^∞.
Soit T_ψ *la distribution régulière associée à* ψ. *Le produit* $T_\psi T$ *d'une distribution quelconque* $T \in \mathcal{D}'$ *par* T_ψ *est défini par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \boxed{< T_\psi T, \varphi > = < T, \varphi \psi >}$$

Distributions singulières découlant de δ

- soit $a \in \mathbb{R}$
$$\delta_{(a)} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(a) \end{cases}$$
$\delta_{(a)}$ est notée $\delta(x-a)$ en physique.
- soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$
$$\delta(\lambda\, x) : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \dfrac{1}{|\lambda|}\,\varphi(0) \end{cases}$$

5.2.4 Valeur principale de Cauchy

1. Soit f une fonction à valeurs réelles définie en tout point d'un intervalle fini $[a,b]$, à l'exception d'un point $c \in]a,b[$ au voisinage duquel elle n'est pas bornée. Il se peut que l'intégrale impropre de Riemann
$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{déf}{=} \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx$$
soit infinie, mais que la limite suivante :
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$
soit finie. Dans ce cas, cette limite est appelée <u>valeur principale de Cauchy</u> de f et on note
$$\mathrm{vp}\!\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{déf}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

2. Soit f une fonction à valeurs réelles dont l'intégrale de Riemann est finie sur tout intervalle fini de la forme $[a,b]$. Il se peut que l'intégrale impropre
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \stackrel{déf}{=} \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$
soit infinie, mais que la limite suivante :
$$\lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^b f(x)\,dx$$
soit finie. Dans ce cas, la deuxième intégrale est appelée valeur principale de Cauchy de f sur $\mathbb{R}$, et on note :
$$\mathrm{vp}\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \stackrel{déf}{=} \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^b f(x)\,dx$$

5.2.5 Distribution $P_f\,\dfrac{1}{x}$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas localement sommable. Cependant, l'expression

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right) = \mathrm{vp}\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

a un sens quelle que soit φ dans $\mathcal{D}$. En effet, par un changement de variable élémentaire, on a :

$$\mathrm{vp}\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx$$

Or au voisinage de l'origine, la fonction dans la deuxième intégrale est bornée car elle est l'expression du taux de variation de φ au voisinage de l'origine.

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(-x) - \varphi(0)}{-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 2\,\varphi'(0)$$

Donc

$$< P_f\,\frac{1}{x}, \varphi >= \mathrm{vp}\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Cette distribution est une distribution singulière.

Proposition

Dans $\mathcal{D}'$, on a $x\,P_f\,\dfrac{1}{x} = 1$, où x est la distribution associée à la fonction identité de $\mathcal{D}$, et 1 la distribution associée à la fonction unité de $\mathcal{D}$.

5.3 Transformée d'une distribution

5.3.1 Translation

On définit la fonction translation $\tau_a : x \mapsto x - a,\ a \in \mathbb{R}$. A partir de cette définition, on peut définir la translatée d'une distribution T, noté $T \circ \tau_a$.

Définition

$$< T \circ \tau_a, \varphi >=< T, \varphi \circ \tau_a^{-1} > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

5.3.2 Dilatation

Définition

On définit la fonction dilatation $d_\lambda : x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$. A partir de cette définition, on peut définir la "dilatée" d'une distribution T, notée $T \circ d_\lambda$:

$$< T \circ d_\lambda, \varphi >= \frac{1}{|\lambda|} < T, \varphi \circ d_\lambda^{-1} > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

On peut considérer le cas particulier où $\lambda = -1$, dont on peut tirer deux définitions :

1. T est dite paire si $T \circ d_{-1} = T$,
2. T est dite impaire si $T \circ d_{-1} = -T$.

Exemples

1. La distribution de Dirac est paire.
2. La distribution $P_f \, \frac{1}{x}$ est impaire.

5.4 Support d'une distribution

Définitions

1. *On dit qu'un distribution T est nulle sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ si $< T, \varphi >= 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ dont le support est contenu dans U.*
2. *On appelle support d'une distribution T le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ tel que T soit nul dans son complémentaire.*

Proposition

Soit f localement sommable. Soit T_f sa distribution associée.
Le support de T_f coïncide avec celui de f.

Exemple

On considère la fonction échelon de Heaviside H, ainsi que sa distribution T_H associée. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a :

$$< T_H, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} H(x)\, \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

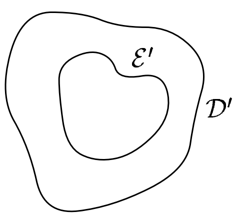
On a donc $\text{Supp}(T_H) = \mathbb{R}_+$.
De même, $\text{Supp}(\delta) = \{0\}$.

Définitions

Le support d'une distribution est dit limité à gauche (respectivement à droite) si il est inclus dans $\mathbb{R}_+$ (resp. si il est inclus dans $\mathbb{R}_-$).
L'ensemble des distributions à support limité à gauche (resp. à droite) est noté $\mathcal{D}'_+$ (resp. $\mathcal{D}'_-$).

Définition

On appelle $\mathcal{E}'$ l'ensemble des distributions à support borné.



5.5 Convergence dans $\mathcal{D}'$

5.5.1 Choix de la topologie

Définition

Soit une suite $(T_n)_n$ de distributions. On dit que $(T_n)_n$ converge vers $T \in \mathcal{D}'$ si la suite numérique $\big(< T_n, \varphi > \big)_n$ converge vers $< T, \varphi >$ quelle que soit la fonction φ prise dans $\mathcal{D}$.

Notation

On note : $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_n = T$.

Remarque

Soit $\{T_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ une famille de distributions dépendant d'un paramètre λ.
On dit que $\{T_\lambda\}$ converge vers T_{λ_0} quand λ tend vers λ_0 si l'expression $< T_\lambda, \varphi >$ tend vers $< T\lambda_0, \varphi >$ pour tout φ de $\mathcal{D}$.
On note alors :

$$\underset{\lambda\to\lambda_0}{\text{l.i.m}}\, T_\lambda = T_{\lambda_0}$$

5.5.2 Suites de Dirac

Définition

Soit f sommable telle que $\displaystyle\int f\, d\mu = 1$.
Soit $x \mapsto f_n(x) = n\, f(nx)$.
Pour tout n entier naturel, la fonction f_n est sommable et $\displaystyle\int f_n\, d\mu = 1$.
Soit T_{f_n} la distribution régulière associée à f_n.
La suite $\big(T_{f_n}\big)_n$ est appelée <u>suite de Dirac</u> associée à f.

Proposition

La suite de Dirac associée à f converge vers le distributions de Dirac δ :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_{f_n} = \delta$$

Exemples

1. Reprenons la fonction de Schwartz :

$$\zeta : \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Soit $\gamma(x) = \dfrac{\zeta(x)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(u)\, du}$ (fonction ζ dont l'aire est normalisée à 1).
   Soit (γ_n) la suite de Dirac associée à γ :

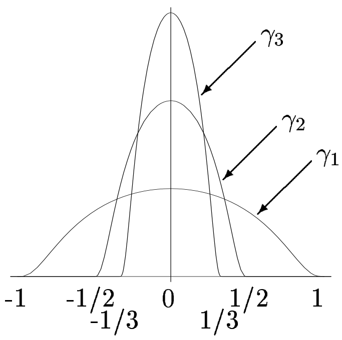
$$\gamma_n(x) = n\, \gamma(nx)$$

La suite (T_{γ_n}) converge vers δ :

$$\lim_{n\to\infty} \int n\,\gamma_n(nx)\,\varphi(x)\,d\mu(x) = \varphi(0)$$

soit encore, de façon équivalente :

$$\operatorname*{l.i.m}_{n\to\infty} T_{\gamma_n} = \delta$$



2. La suite de Dirac associée à $x \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ converge vers δ

5.6 Dérivée d'une distribution

Définition

Soit $T \in \mathcal{D}'$. On appelle dérivée de T, notée T', la distribution définie par :

$$< T', \varphi > = - < T, \varphi' > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Proposition

Toute distribution est indéfiniment dérivable, et

$$< T^{(n)}, \varphi > = (-1)^n \; < T, \varphi^{(n)} >$$

Exemple

On considère la distribution de Heaviside T_H. On a pour toute fonction φ appartenant à $\mathcal{D}$:

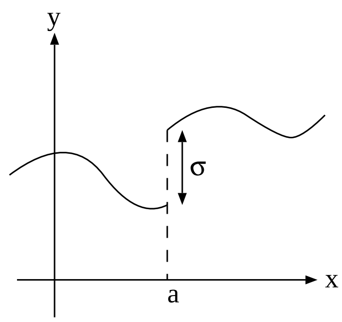
$$< T'_H, \varphi > = - < T_H, \varphi' > = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = < \delta, \varphi >$$

Donc la dérivée de T_H est la distribution de Dirac.

Proposition

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en $x = a$ où elle admet une discontinuité de première espèce.
En notant $\sigma = f(a^+) - f(a^-)$ (amplitude du saut en a), et en supposant $f'(a^+)$ et $f'(a^-)$ finis, on a :

$$\boxed{T'_f = T_{f'} + \sigma\delta_{(a)}}$$



Exemple

Cas de la distribution de Heaviside :

$$T'_H = T_{H'} + \sigma\,\delta = \delta$$

($T_{H'} = 0$ car H' est nulle presque partout et $\sigma = 1$)

Proposition

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$. Soit T_φ la distribution associée à φ.
La dérivée du produit $T_\varphi\, T$, avec T quelconque donne :

$$(T_\varphi\, T)' = T_\varphi\, T' + T'_\varphi\, T$$

5.7 Convergence de la suite des distributions dérivées

Proposition

Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions et soit T appartenant à $\mathcal{D}'$.
Si $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_n = T$, alors :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T'_n = T'$$

Exemple

Soit la fonction f définie par $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$.

f est sommable, de classe C^∞ et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

On considère la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = n\, f(nx)$.

D'après le résultat précédent, on a, avec les notations usuelles :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, \left(T_{f_n}\right)' = \delta'$$

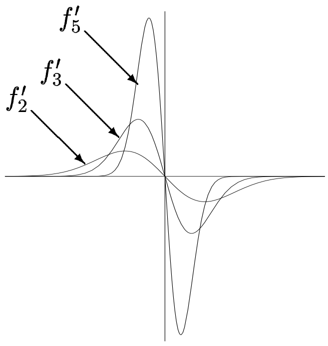
soit encore :

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} (T_{f'_n}) = \delta'$$

car f_n est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{n^3 x}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}\, \varphi(x)\,dx = -\varphi'(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$



5.8 Utilisation des distributions en mécanique

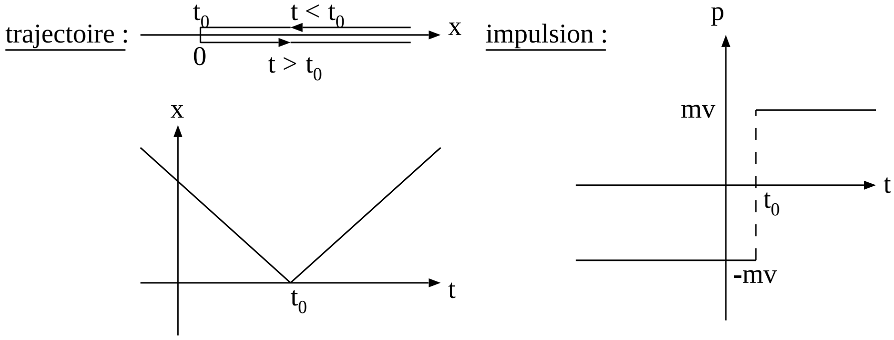
Nous allons appliquer la théorie des distributions à la dynamique du point matériel. En effet, les distributions sont recommandées par exemple dans les problèmes traitant des chocs de deux particules, car l'interaction est alors ponctuelle dans le temps, discontinue et non dérivable vis-à-vis des fonctions comme l'impulsion.
Soit une particule ponctuelle de masse m se déplaçant sur l'axe des x :

$$x(t) = v\,|t - t_0|, \quad v > 0,\; t_0 \in \mathbb{R}$$

Au temps $t = t_0$ la particule "heurte l'origine". On a donc :

$$p(x) = \begin{cases} -mv & \text{si } t < t_0, \\ mv & \text{si } t > t_0, \end{cases}$$

Au sens des fonctions, $\dfrac{dp}{dt} = 0$ presque partout.
On considère T_p la distribution associée à l'impulsion p. On a $T'_p = 2mv\,\delta_{(t_0)}$.
D'après le principe fondamental de la dynamique la force s'exerçant sur la particule durant le choc est donc une distribution singulière. En physique, on note : $F = 2mv\,\delta(t - t_0)$



Remarque

$\delta_{(t_0)}$ a pour dimension l'inverse d'un temps :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt &= 1\\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \varphi(t)\, dt &= \varphi(0)\end{aligned}$$

5.9 Produit de convolution

Soit $S \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$. Alors $< S_y, \varphi(x+y) >$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de x, la notation S_y signifiant que la distribution ne s'applique qu'à la variable y. On gardera ces notations tout au long de cette partie.

Définition

Soient T et S deux distributions. On appelle produit de convolution de T et S, noté $T * S$, la distribution définie, si elle existe, par :

$$T * S : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \quad < T_x, < S_y, \varphi(x+y) >> \end{cases}$$

Remarque

$S * T$ n'existe pas toujours : il faut que $< S_y, \varphi(x+y) >$ appartienne à $\mathcal{D}$ ce qui n'est pas assuré dans le cas général.

Proposition

Si $T * S$ existe , alors on a $T * S = S * T$.

Proposition : conditions suffisantes d'existence du produit

Soient T et $S \in \mathcal{D}'$.

1. *a) si T ou S est dans $\mathcal{E}'$, alors $T * S$ est défini*
   b) si T et S sont dans $\mathcal{E}'$, alors $T * S$ est défini et $T * S \in \mathcal{E}'$
2. *a) si T et S sont dans $\mathcal{D}'_+$, alors $T * S$ est défini et $T * S \in \mathcal{D}'_+$*
   b) si T et S sont dans $\mathcal{D}'_-$, alors $T * S$ est défini et $T * S \in \mathcal{D}'_-$

Proposition

Soit $T \in \mathcal{D}'$. On a :

1. *$\delta * T = T$*
2. *$\delta' * T = T'$*

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathcal{D}'$.

$$\begin{aligned}
< \delta * T, \varphi > &= < \delta_x, < T_y, \varphi(x+y) >> \\
&= < T_x, < \delta_y, \varphi(x+y) >> \\
&= < T_x, \varphi(x) > \\
&= < T, \varphi > \\
< \delta' * T, \varphi > &= < T_x, < \delta'_y, \varphi >> \\
&= < T_x, -\varphi'(x) > \\
&= - < T, \varphi' > \\
&= < T', \varphi >
\end{aligned}$$

Proposition

Si on considère la fonction translation définie par :

$$\tau_{(a)} = \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - a \end{cases}$$

Alors $\forall T \in \mathcal{D}'$*, on a :*

$$\delta_{(a)} * T = T \circ \tau_{(a)}$$

Cas particulier

Soient a et b deux réels.

$$\delta_{(a)} * \delta_{(b)} = \delta_{(a+b)}$$

Proposition

Soit T *et* $S \in \mathcal{D}'$*. Si* $T * S$ *existe, alors on a :*

$$(T * S)' = T' * S = T * S'$$

Remarque

Le produit de convolution n'est en général pas associatif :

$$(T_H * \delta') * 1 = \delta * 1 = 1$$
$$T_H * (\delta' * 1) = T_H * 0 = 0$$

5.10 Transformée de Fourier des distributions

5.10.1 Introduction

Le but de cette partie est que l'on puisse arriver à quelque chose du type :

$$< \mathcal{F}[T_f], \varphi >=< T_f, \mathcal{F}[\varphi] >$$

Avec $\mathcal{F}[\varphi] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int e^{-ikx}\, \varphi(x)\, d\mu(x)$.
Pour cela il faut que $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{D}$, ce qui n'est pas assuré : si $\varphi \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}[\varphi]$ n'est pas a support borné (sauf pour la fonction nulle).
On introduit donc un espace fonctionnel $\mathcal{S}$ tel que :

$$\varphi \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$$

5.10.2 Espace fonctionnel $\mathcal{S}$

Définition

On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et telles que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p\, \varphi^{(q)}(x)| < +\infty$$

Cet ensemble est appelé espace des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide (les fonctions de cet espace décroissent plus vite que n'importe quelle loi de puissance en x).

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3\, e^{-x^2}$ vérifie les conditions énoncées précédemment. Elle est donc dans $\mathcal{S}$ mais elle n'est pas dans $\mathcal{D}$ (elle n'est pas à support borné).

Proposition

1. $\varphi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \varphi' \in \mathcal{S}$
2. $\varphi \in \mathcal{S} \Longrightarrow x^p\, \varphi^q(x)$ *est sommable*
3. $\varphi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \mathcal{F}[\varphi]$ *et* $\mathcal{F}^-[\varphi]$ *existent et sont dans* $\mathcal{S}$.
   De plus on a : $\mathcal{F}\big[\mathcal{F}^-[\varphi]\big] = \mathcal{F}^-\big[\mathcal{F}[\varphi]\big]$

Définition (choix de convergence)

Soit (φ_n) une suite de fonctions de $\mathcal{S}$ et soit $\varphi \in \mathcal{S}$. On dit que (φ_n) converge vers φ si et seulement si pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, la suite $\left(x^p\, \varphi_n^{(q)}\right)_n$ converge vers $x^p\, \varphi^{(q)}$ de manière uniforme.

Proposition

$\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{S}$ pour ce choix de convergence.

Définition

On appelle $\mathcal{S}'$ le dual de $\mathcal{S}$ et on le nomme ensemble des distributions tempérées.
L'ensemble des distributions tempérées est inclus strictement dans $\mathcal{D}'$.

5.10.3 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Définition

Soit $T \in \mathcal{S}'$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a :

$$< \mathcal{F}[T], \varphi > = < T, \mathcal{F}[\varphi] >$$

Proposition

Si $T \in \mathcal{S}'$, alors $\mathcal{F}[T] \in \mathcal{S}'$.

Remarque

Les résultats présentés ici sont les mêmes si on considère la transformée inverse $\mathcal{F}^-$.

Exemple

On vérifie facilement que $\delta \in \mathcal{S}'$. En écrivant la définition de la transformée de Fourier de δ, on trouve sans aucun problème : Soit $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} < \mathcal{F}[\delta], \varphi > &= < \delta, \mathcal{F}[\varphi] > \\ &= < \delta, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} \varphi(x)\, d\mu(x) > \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

où $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est la distribution régulière associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
De même, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_{(a)}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iak} \qquad a \in \mathbb{R} \\ \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] &= \delta \\ \mathcal{F}^{-}[\delta] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \mathcal{F}[\delta'] &= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \\ \mathcal{F}\left[-\frac{ix}{\sqrt{2\pi}}\right] &= \delta' \end{aligned}$$

Remarque

En physique :

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, dx$$

On a donc :

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, dx$$

Cette expression n'a pas de sens au niveau mathématique car la fonction $x \longmapsto e^{ikx}$ n'est pas sommable.

Proposition

Soit (T_n) une suite de distributions de $\mathcal{S}'$, et soit $T \in \mathcal{S}'$.
Si $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, T_n = T$, alors $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}\, \mathcal{F}[T_n] = \mathcal{F}[T]$.

Proposition

On a :

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

(toute distribution à support borné est tempérée).

Proposition

Soit $T \in \mathcal{E}'$. On montre que $\mathcal{F}[T]$ est régulière et est associée à la fonction de classe C^∞ :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < T_x, e^{-ikx} > \end{cases}$$

5.10.4 Transformée de Fourier du produit de convolution

Proposition

Soient $S \in \mathcal{S}'$ et $T \in \mathcal{E}'$. On a :

$$\mathcal{F}[T * S] = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[T]\, \mathcal{F}[S]$$

(ce qui comprend l'existence des deux termes)