Cours de Mathématiques
E.S.P.C.I
Deuxième année

Elie Raphaël
Polycopié des élèves rédigé à partir du cours

Ce polycopié a été rédigé sous LaTeX2e par Julien Berthaud, Cyrille Boullier, Régis Schach et Antoine Vanhaverbeke élèves de la 117$^{\text{ème}}$ promotion et retouché par Sébastien Besson et Nicolas Champavert, élèves de la 119$^{\text{ème}}$ promotion.

Table des matières

Chapitre 1

Les probabilités

1.1 Eléments de théorie des ensembles

1.1.1 Rappels

Définition

Soit E un ensemble. On note β(E) l'ensemble des parties de E, c'est-à-dire :

$$\mathrm{A} \in \beta(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow \mathrm{A} \subset \mathrm{E}$$

Remarques

- $\mathrm{E} \in \beta(\mathrm{E})$
- $\varnothing \in \beta(\mathrm{E})$
- $w \in \mathrm{E} \Longrightarrow$ le singleton $\{w\} \in \beta(\mathrm{E})$

Cas particulier

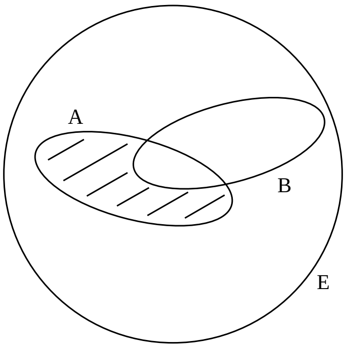
Si E est un ensemble fini $\mathrm{E}=(w_1, \ldots, w_n)$ alors Card E = n et Card $\beta(\mathrm{E})=2^n$

Exemple

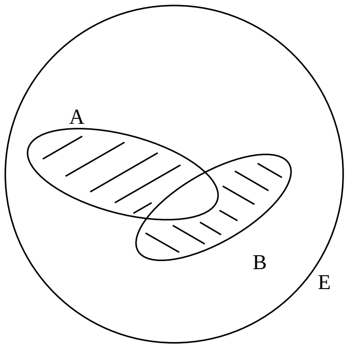
Soit l'ensemble $\mathrm{E}=\{w_1,w_2,w_3\}$
alors $\beta(\mathrm{E})=\{\varnothing, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_2, w_3\}\}$
et Card β(E)=8

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E, on peut alors définir :

- A^c : le complémentaire de A dans E
- $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$: l'union de A et de B
- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$: l'intersection de A et de B
- $\mathrm{A} \backslash \mathrm{B} = \{w \in \mathrm{E} / w \in \mathrm{A} \text{ et } w \notin \mathrm{B}\} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c$: la différence de A et de B
- $\mathrm{A} \triangle \mathrm{B} = (\mathrm{A} \backslash \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \backslash \mathrm{A})$: la différence symétrique de A et de B



Différence entre A et B



A Δ B

1.1.2 Tribu

Définition

Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\beta(E)$ ($\mathcal{F}$ est une famille de parties de E).

On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur E si :

1. *E appartient à $\mathcal{F}$*
2. $\mathrm{A} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathrm{A}^c \in \mathcal{F}$
3. *Toute réunion finie ou infinie dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$*

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}\\ \mathrm{A}_i \in \mathcal{F}\end{array}\right\} \quad \textit{alors} \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i \in \mathcal{F}$$

<u>Exemples</u>

Exemples de tribus sur $\mathrm{E} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

- $\beta(\mathrm{E})$
- $\{\varnothing, \mathrm{E}\}$
- $\{\varnothing, \mathrm{E}, \{x_1\}, \{x_2, x_3\}\}$: tribu engendrée par $\{x_1\}$

Proposition

Si $\mathcal{F}$ est une tribu alors

- $\varnothing \in \mathcal{F}$
- *Toute intersection finie ou infinie dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.*

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}\\ \mathrm{A}_i \in \mathcal{F}\end{array}\right\} \quad \textit{alors} \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i \in \mathcal{F}$$

Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu sur E, alors (E,$\mathcal{F}$) est appelé *espace mesurable*

<u>Exemples</u>

Soit E un ensemble quelconque.

- $\beta(\mathrm{E})$ est une tribu de E.

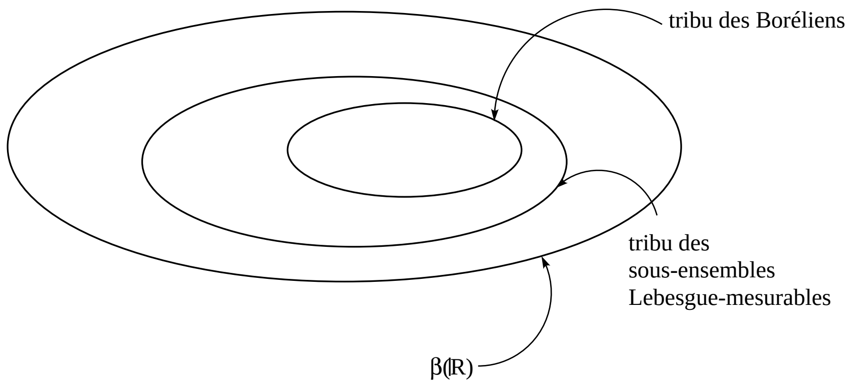
– $\{\varnothing, \mathrm{E}\}$ est une tribu. C'est la plus petite, elle est contenue dans toutes les autres.
– Soit A une partie de E ($\mathrm{A} \in \beta(\mathrm{E})$). Alors $\{\varnothing, \mathrm{E}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^c\}$ est une tribu, c'est la plus petite tribu contenant A, c'est la tribu engendrée par A.
– Soit G un sous-ensemble de $\beta(\mathrm{E})$, on appelle tribu engendrée par G l'intersection de toutes les tribus (sur E) contenant G ; c'est la plus petite tribu qui contienne G.

Cas particuliers

L'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ Lebesgue-mesurables, forme une tribu sur $\mathbb{R}$.

Soient E=$\mathbb{R}$, G la famille de tous les ouverts. G n'est pas une tribu sur $\mathbb{R}$. La tribu engendrée par G est appelée *tribu borélienne* sur $\mathbb{R}$, et notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont appelés boréliens de $\mathbb{R}$.

Tous les sous-ensembles usuels (intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts, ..., singleton, ensemble infini dénombrable de singletons) sont des boréliens.



1.1.3 Mesure positive sur une tribu

Soit (E,$\mathcal{F}$) un espace mesurable.

Définition

On appelle mesure positive sur (E,$\mathcal{F}$) une fonction m définie sur $\mathcal{F}$, à valeurs dans $[0, +\infty[$, *vérifiant :*

1. *$m(\varnothing)=0$*
2. *Pour toute famille finie ou infinie dénombrable $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'éléments de la tribu $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, on a :*

$$m\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \sum_{i\in\mathrm{I}} m(\mathrm{A}_i)$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ alors le nombre $m(\mathrm{A})$ (fini ou non) est appelé *mesure de A* et le triplet (E,$\mathcal{F}$,m) est appelé *espace mesuré*.

Mesure de Lebesgue-Stieltjes

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est un espace mesurable. Soit f une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$ non décroissante, et continue à droite en tout point de $x \in \mathbb{R}$ ($\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} f(x+\varepsilon) = f(x)$)

Proposition

Il existe une mesure unique définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout intervalle semi-ouvert borné $]\,a\,,\,b\,]$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ on ait :

$$m(]\,a\,,\,b\,]) = f(b) - f(a)$$

C'est la mesure de Lebesgue-Stieltjes *notée m_{LS} associée à f.*

Propositions

1. $m_{\mathrm{LS}}(]\,a\,,\,b\,[) = f(b^-) - f(a)$
2. $m_{\mathrm{LS}}([\,a\,,\,b\,[) = f(b^-) - f(a^-)$
3. $m_{\mathrm{LS}}([\,a\,,\,b\,]) = f(b) - f(a^-)$
4. $m_{\mathrm{LS}}(\{a\}) = f(a) - f(a^-)$

Si f est discontinue en a alors $m_{\mathrm{LS}}(\{a\}) \neq 0$.

Cas particulier

Soit la fonction f(x)=x, la mesure de LS associée à cette fonction est la mesure de Lebesgue, notée m_{leb}.
$m_{leb}(\{a\}) = 0$
$m_{leb}(]\,a\,,\,b\,]) = m_{leb}([\,a\,,\,b\,[) = m_{leb}([\,a\,,\,b\,]) = m_{leb}(]\,a\,,\,b\,[) = b - a$

Cas particulier

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.
La mesure associée à f est appelée *mesure de Dirac* concentrée à l'origine et notée m_{D}.
Soit E un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; alors $m_{\mathrm{D}}(\mathrm{E}) = \begin{cases} 1 \text{ si E contient l'origine} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1.1.4 Epreuves

Définition

On appelle épreuve une expérience susceptible d'être répétée dans des conditions a priori identiques et dont l'issue est soumise au hasard.

Le résultat d'une épreuve est imprévisible, mais appartient à un ensemble bien déterminé : l'ensemble de tous les résultats possibles, appelé espace fondamental et noté Ω.

Exemples

1. $\mathcal{E}_1$ on lance un dé (non pipé) et on considère le nombre obtenu.
   $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\} = [\![1\,,\,6]\!]$
2. $\mathcal{E}_2$ on lance deux dés, un rouge et un vert ; on note (x,y) le résultat avec x le nombre affiché sur le dé rouge et y le nombre affiché sur le dé vert.
   $\Omega_2 = \{(x,y)/1 \leqslant x \leqslant 6 \textit{ et } 1 \leqslant y \leqslant 6\} = [\![1\,,\,6]\!]^2$.

1.1.5 Evénements

Définition

Etant donné une épreuve $\mathcal{E}$ et son espace fondamental Ω, on appelle événement associé à $\mathcal{E}$ (ou tout simplement événement) un fait dont on peut dire, pour chaque résultat de l'épreuve, s'il est réalisé ou non.

De façon générale, on identifie un événement avec le sous-ensemble de résultats pour lequel il est réalisé.

Exemples

1. $\mathcal{E}_1$: on lance un dé non pipé et on considère le nombre obtenu.
   $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\} = [\![1\,,\,6]\!]$
   événement A : "on obtient un nombre pair"
   $$\mathrm{A} = \{2,4,6\}$$
2. $\mathcal{E}_2$: on lance deux dés non pipés et on considère le couple de nombres obtenu.
   $\Omega_2 = [\![1\,,\,6]\!]^2$.
   événement A : "la somme des numéros fait trois"
   événement A'="le produit des numéros est 2"
   $$\mathrm{A} = \mathrm{A}' = \{(1,2),(2,1)\}$$

•L'ensemble Ω est un événement appelé événement certain.

Exemple
Pour $\mathcal{E}_1$ avec $\Omega_1 = [\![1\,,\,6]\!]$ on a :
l'événement "on obtient un entier" est l'événement certain.

•La partie vide $\varnothing$ est un événement appelé événement impossible.

Exemple
Pour $\mathcal{E}_1$ avec $\Omega_1 = [\![1\,,\,6]\!]$ on a :
l'événement "on obtient un 7" est l'événement impossible.

•Soit $\omega \in \Omega$. Le singleton $\{\omega\}$ est un événement appelé événement élémentaire.

•Si A est un événement alors A^c est l'événement contraire. Si A est l'événement "on obtient un nombre pair" alors A^c est l'événement "on obtient un nombre impair".

•Si $A \subset B$ alors A entraîne B. Lorsque A est réalisé, B l'est aussi.

•$A \cup B$ est l'événement "A ou B".

•$A \cap B$ est l'événement "A et B".

•Si $A \cap B = \varnothing$ alors les événements A et B sont dits *incompatibles.*

1.1.6 Mesure de probabilité

Soient $\mathcal{E}$ et Ω. On a vu que les événements sont des éléments de $\beta(\Omega)$.
On cherche à attribuer une certaine "probabilité" aux événements associés à $\mathcal{E}$.

Remarque

Si Ω est fini ou infini dénombrable, l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements que l'on va étudier pour construire un ensemble probabilisé est $\beta(\Omega)$ en entier.

Si Ω n'est ni fini, ni infini dénombrable, il se trouve que, pour des raisons mathématiques, l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements étudiés est seulement inclus dans $\beta(\Omega)$. On impose que $\mathcal{A}$ ait *la structure de tribu* sur Ω.

Exemple

Si $\Omega = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Définition

Le couple $(\Omega,\mathcal{A})$ *formé de l'ensemble fondamental* Ω *et de la tribu* $\mathcal{A}$ *des événements forme un* espace probabilisable.

Définition

Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ *un espace probabilisable. On appelle mesure de probabilité (ou simplement probabilité) sur* $(\Omega,\mathcal{A})$ *une mesure positive (notée* P*).*

P *est donc une application qui associe à tout événement* A *de* $\mathcal{A}$ *un nombre* P(A)*, appelé probabilité de A, et qui satisfait aux axiomes suivants :*

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $(A_i)_{i\in I}$ *est un ensemble fini ou infini dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$*, 2 à 2 incompatibles* $(A_i \cap A_j = \varnothing \quad si\ i \neq j)$*.*

$$P\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *est appelé* espace probabilisé.

Propositions

1. $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$
2. $\mathrm{P}(\mathrm{A}^c) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$
3. *Si* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ *alors* $\mathrm{P}(\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})$
4. $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B})$
5. $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup ... \cup \mathrm{A}_n) \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2)...\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$

Remarques

- Si A et B sont disjoints alors $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$=P(A)+P(B)
- On appelle événement quasi-impossible un événement A tel que P(A)=0 .
- Un événement quasi-impossible n'est pas forcément égal à $\varnothing$.
- On appelle événement quasi-certain un événement A tel que P(A)=1.

1.1.7 Mesure de probabilité sur un ensemble fini

Soit $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ un ensemble fini. Toute mesure de probabilité sur $(\Omega,\ \beta(\Omega))$ est parfaitement déterminée par la donnée des $p_i = \mathrm{P}(\{w_i\})$ pour $i = 1..n$ avec $p_i \geqslant 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}} p_i = 1$.

Exemple

Soit $\mathcal{E}$ l'épreuve : "lancer d'un dé non équilibré".
On a : $\Omega = [\![1\ ,\ 6]\!]$ et $\mathcal{A} = \beta(\Omega)$.
On note $\mathrm{P}(\{a\}) = p_a$.
$p_1 = 1/9 \quad p_2 = 1/9 \quad p_3 = 1/9$
$p_4 = 2/9 \quad p_5 = 2/9 \quad p_6 = 2/9$

Soit A : "obtenir un nombre pair". On a $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{5}{9}$.

1.1.8 Cas particulier : probabilité uniforme (Ω fini)

Si $p_i = \dfrac{1}{\mathrm{N}} = \dfrac{1}{\text{Card } \Omega}$ pour $i \in [\![1\ ,\ n]\!]$, alors p est la probabilité uniforme.

On a : $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{Card A}}{\text{Card } \Omega} = \sum_{\omega_i \in \mathrm{A}} \mathrm{P}(\{\omega_i\})$ pour tout événement $\mathrm{A} \in \beta(\Omega)$.

Application : Problème des anniversaires

Soient M personnes en présence.

On cherche la probabilité pour que deux personnes aient leur anniversaire le même jour. Si $\mathrm{M} > 365$ alors $\mathrm{P_M} = 1$. On supposera donc que $2 \leqslant \mathrm{M} \leqslant 365$.

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathrm{P})$ un espace probabilisé avec $\Omega = \{(x_1,\ldots,x_n)/x_i \in [\![1\,,365]\!]\}$ et $\mathcal{A} = \beta(\Omega)$.
P : mesure de probabilité uniforme.
Soit $\mathrm{P_M}$ la probabilité de l'événement A = "deux personnes parmi les M personnes présentes sont nées le même jour de l'année".
Il est plus simple d'étudier l'événement B : "les anniversaires des M personnes tombent tous des jours différents".
On a alors $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \Omega$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ d'où P(A)=1-P(B).
$\mathrm{P(B)} = \dfrac{\mathrm{Card\ B}}{\mathrm{Card}\ \Omega}$ avec $\mathrm{Card}\ \Omega = 365^{\mathrm{N}}$ et $\mathrm{Card\ B} = \dfrac{365!}{(365-\mathrm{N})!}$.
Ainsi $\mathrm{P_N} = 1 - \dfrac{365 \times \ldots \times (365 - \mathrm{N} + 1)}{365^{\mathrm{N}}}$.

N	2	10	15	22	23	32	35	41
$\mathrm{P_N}$	0.003	0.12	0.25	0.48	0.51	0.75	0.81	0.90

On remarque que $\mathrm{P_N}$ devient inférieur à 0.5 dès que $\mathrm{N} \geqslant 23$.

1.1.9 Suite d'événements

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathrm{P})$ un espace probabilisé, considérons une suite d'événements $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots$ (éléments de $\mathcal{A}$).

σ-additivité

Si (A_n) est une suite d'événements de $\mathcal{A}$, 2 à 2 incompatibles alors :

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_n \mathrm{A}_n\Big) = \sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$$

Cette propriété est appelé la σ-additivité.

Définition

1. *la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante si :* $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$
2. *la suite est dite décroissante si* $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n\ \forall n \in \mathbb{N}$

Proposition

1. *Si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)$
2. *Si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) = \mathrm{P}(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)$

<u>Démonstration</u>

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Soit la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n \backslash \mathrm{A}_{n-1}$.

Les B_n sont deux à deux incompatibles.

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n)$$

enfin $\sum\limits_{m=0}^{n} P(B_m) = P(A_n)$. En passant à la limite on alors $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} P(B_m) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$

Exemple

On lance un dé indéfiniment. Quel est la probabilité de ne pas obtenir d'as au cours des n premiers lancers ?

A_n : événement "ne pas obtenir d'as au cours des n premiers lancers"
$P(A_n) = \dfrac{\text{nb de suites } (u_1, \dots, u_n) \text{ ne contenant pas d'as}}{\text{nb de suites } (u_1, \dots, u_n)} = \dfrac{5^n}{6^n}$
L'événement "ne jamais obtenir d'as" est $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc on peut appliquer la proposition ci-dessus.
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$
"Ne jamais obtenir d'as" est donc un événement quasi-impossible.

1.2 Mesure de probabilité uniforme sur une partie de $\mathbb{R}$

Problème

Si on choisit un nombre au hasard entre zéro et un. Quelle est la probabilité qu'il appartienne à $[0.27\,,\,0.32\,[$? Quelle est la probabilité que le nombre soit rationnel ?

Définition

Soit Ω un borélien de $\mathbb{R}$, on munit Ω de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ et on considère la mesure de Lebesgue m_{leb} sur $(\Omega,\, \mathcal{B}(\Omega))$. Si $0 < m_{leb}(\Omega) < +\infty$, on appelle mesure de probabilité uniforme sur $(\Omega,\, \mathcal{B}(\Omega))$ la mesure de probabilité définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ par :

$$\boxed{P(A) = \frac{m_{leb}(A)}{m_{leb}(\Omega)}}$$

L'expression "choisir au hasard un nombre dans Ω" signifie que l'on utilise le triplet $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)$, mesure de probabilité uniforme).

Réponses au problème

A "appartient" à $[0.27\,,\,0.32\,[$ avec $P(A) = \dfrac{0.05}{1} = 0.05$

A "appartient" aux rationnels avec $P(A) = \dfrac{m_{leb}([0\,,\,1] \cap \mathbb{Q})}{m_{leb}(\Omega)} = 0$

1.3 Probabilités conditionnelles

1.3.1 Introduction

Considérons un dé non pipé avec les faces paires colorées en blanc et les faces impaires colorées en noir. On jette le dé et on observe de loin que c'est noir. Quelle est alors la probabilité d'obtenir un cinq ?
$A = \{5\}, B = \{1,3,5\}, \Omega = [\![1\,,\,6]\!], \mathcal{A} = \beta(\Omega)$. P mesure de probabilité uniforme sur $(\Omega, \beta(\Omega))$
$P(A|B)$: "probabilité de A sachant B".
$P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ et $P(B) = \dfrac{1}{2}$ soit encore $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$. D'où la définition suivante.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $B \in \mathcal{A}$ un événement de probabilité non nulle. Etant donné un événement $A \in \mathcal{A}$, la probabilité de "A sachant B" est le nombre :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) > 0$, alors l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto P(A|B) \end{aligned}$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée probabilité conditionnelle relative à B.

1.3.2 Indépendance de deux événements

Définition

Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Soient trois événements A, B et C, ils sont mutuellement indépendants si

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Si on a uniquement les trois premières conditions, on dit que les événements sont deux à deux indépendants.

Exemple

On lance deux dés : un rouge et l'autre bleu, on a alors $\Omega = [\![1\,,\,6]\!]^2$, $\mathcal{A} = \beta(\Omega)$ et P uniforme.

Soient les trois événements :
A "le dé rouge amène un numéro pair".
B "le dé bleu amène un numéro pair".
C "la somme des numéros est paire".

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P(B)} = \mathrm{P(C)} = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{P(A \cap B)} = \mathrm{P(A \cap C)} = \mathrm{P(B \cap C)} = \frac{1}{4}$$
$$\mathrm{P(A \cap B \cap C)} = \frac{1}{4} \neq \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

1.3.3 Système complet d'événements. Formule des probabiltés totales et formule de Bayes

Définition

Soit $\{\mathrm{H}_k / k = 1, 2, ...\}$ *une famille finie ou infinie dénombrable d'événements deux à deux incompatibles telle que* $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{H}_k = \Omega$. *Une telle famille est appelée système complet d'événements.*

Proposition

Soit $\{\mathrm{H}_k / k = 1, 2, ...\}$ *un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Alors, on a :*

$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A},\ \mathrm{P(A)} = \sum_k \mathrm{P}(\mathrm{H}_k)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_k)}$$

Cette formule est dite "formule des probabilités totales".

Si de plus $\mathrm{P(A)} > 0$, *on a :*

$$\boxed{\forall k,\ \mathrm{P}(\mathrm{H}_k|\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{H}_k)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_k)}{\sum_j \mathrm{P}(\mathrm{H}_j)\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{H}_j)}}$$

Cette formule est dite "formule de Bayes".

Application de la formule de Bayes

On tire au hasard un individu d'une population où un homme sur 10^4 est malade. On dispose d'un test : le test est fiable pour une personne malade dans 99% des cas, et 0,1% des personnes saines (non malades) ont un test positif.

Sachant que la réaction de l'individu au test est positive, quelle est la probabilité qu'il soit réellement malade ?

Soit l'épreuve E "On tire au hasard un individu dans la population".
H_1 : "l'individu est malade".
H_2 : "l'individu n'est pas malade".
$\mathrm{H}_2 = \mathrm{H}_1^c$ donc $\{\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2\}$ forme un système complet d'événements.

A : "l'individu tiré au hasard présente une réaction positive au test".

On cherche $P(H_1|A)$.

On sait déjà que $P(H_1) = 10^{-4}$, $P(H_2) = 0.9999$, $P(A|H_1) = 0.99$ et que $P(A|H_2) = 0.001$ d'où :

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} \simeq 0.09$$

Le fait que $P(H_1|A)$ soit faible provient du fait que la maladie est rare.

1.4 Généralités sur les variables aléatoires

1.4.1 Variable aléatoire réelle (v.a.r.)

On considère une épreuve $\mathcal{E}$ et l'espace probabilisé associé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Attention : Une v.a.r. n'est pas une "variable", c'est un nombre qui dépend du résultat de l'épreuve : c'est donc une fonction à valeurs réelles du résultat.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On appelle v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

Remarque

L'ensemble $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}$ est souvent noté $\{X \in B\}$.

1.4.2 Loi de probabilité d'une v.a.r.

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
La probabilité de $X^{-1}(B)$ est donnée par $P(X^{-1}(B))$. Cette probabilité se lit "probabilité que X soit dans B" et on la note $P(\{X \in B\})$.

Proposition

Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors l'application :

$$\begin{array}{rccl} P_X : & \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & [0,1] \\ & B & \longmapsto & P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \end{array}$$

est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

La mesure P_X est appelée loi de probabilité de la v.a.r. X. On dit aussi que X suit la loi de probabilité P_X.

Exemple

On considère l'épreuve $\mathcal{E}_2$ définie au paragraphe 1.1.4 et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec $\Omega = [\![1\,,\,6]\!]^2$, $\mathcal{A} = \beta(\Omega)$ et P est la mesure de probabilité uniforme.

Soit X l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} : \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \mapsto \mathrm{X}(\omega) = \text{nombre de fois qu'on obtient un as quand } \omega \text{ se réalise} \end{aligned}$$

X est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et $\mathrm{X}(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On a alors :

$\mathrm{P_X}(\{0\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\{0\})) = 25/36$
$\mathrm{P_X}(\{1\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\{1\})) = 10/36$
$\mathrm{P_X}(\{2\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\{2\})) = 1/36$

1.4.3 Fonction de répartition d'une v.a.r.

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* X *une v.a.r. définie sur cet espace. On appelle fonction de répartition de X la fonction* $\mathrm{F_X}$ *définie par :*

$$\begin{aligned} \mathrm{F_X} : \quad & \mathbb{R} \to [0,1] \\ & x \mapsto \mathrm{F_X}(x) &&= \mathrm{P_X}(]-\infty, x]) \\ & &&= \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(]-\infty, x])) \\ & &&= \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega / \mathrm{X}(\omega) \in]-\infty, x]\}) \end{aligned}$$

Propositions

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \mathrm{F_X}(x) \leqslant 1.$
2. $\mathrm{F_X}$ *est une fonction croissante de X.*
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F_X}$ *est continue à droite et admet une limite à gauche.*
4. $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{F_X}(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F_X}(x) = 1.$

Remarque

$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F_X}(x) - \mathrm{F_X}(x^-) = \mathrm{F_X}(x^+) - \mathrm{F_X}(x^-) = \mathrm{P_X}(\{x\}) = \mathrm{P_X}(\{x\}).$

Proposition

Pour toute fonction $\mathrm{F_X}$ *vérifiant les propriétés 1 à 4 citées ci-dessus, il existe une et une seule mesure de probabilité* $\mathrm{P_X}$ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *vérifiant pour tout couple* $(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b$ *:*

$$\mathrm{P_X}(]a, b]) = \mathrm{F_X}(b) - \mathrm{F_X}(a)$$

$\mathrm{P_X}$ *est la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à* $\mathrm{F_X}$*.*
Donc deux v.a.r. ayant même fonction de répartition ont même loi de probabilité.

Proposition

Soient X une v.a.r., $\mathrm{P_X}$ *sa loi de probabilité,* $\mathrm{F_X}$ *sa fonction de répartition. Alors, pour tout couple* $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$*, on a :*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P_X}(]-\infty, a]) &= \mathrm{F_X}(a) \\
\mathrm{P_X}(]-\infty, a[) &= \mathrm{F_X}(a^-) = \mathrm{F_X}(a) \\
\mathrm{P_X}([a, +\infty[) &= 1 - \mathrm{F_X}(a) \\
\mathrm{P_X}(]a, +\infty[) &= 1 - \mathrm{F_X}(a^+) = 1 - \mathrm{F_X}(a) \\
\mathrm{P_X}(]a, b]) &= \mathrm{F_X}(b) - \mathrm{F_X}(a)
\end{aligned}
$$

1.5 Variables aléatoires réelles discrètes

1.5.1 Définition

Une v.a.r. X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, est dite discrète si l'ensemble image $\mathrm{X}(\Omega) = \{\mathrm{X}(\omega)/\omega \in \Omega\}$ est fini ou infini dénombrable.

Cas particulier

Si $\mathrm{X}(\Omega)$ est fini, la v.a.r. discrète X est dite simple.

Proposition

Soit $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ *une application d'ensemble image* $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_k/k \in \mathrm{K}\}$ *(K est un sous-ensemble de* $\mathbb{N}$*), fini ou infini dénombrable. Alors,* X *est une v.a.r. discrète si et seulement si* $\forall k \in \mathrm{K},\ \mathrm{X}^{-1}(\{x_k\}) \in \mathcal{A}$*.*

Remarque

Si Ω est fini ou infini dénombrable, alors toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ est une v.a.r. discrète.

1.5.2 Loi de probabilité d'une v.a.r. discrète

Définition

La loi de probabilité $\mathrm{P_X}$ *d'une v.a.r. discrète d'ensemble image* $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_k/k \in \mathrm{K}\}$ *est définie par la donnée* $\forall k \in \mathrm{K}$ *de la probabilité de l'événement* $\mathrm{X}^{-1}(\{x_k\})$ *:*

$$\mathbb{P}_\mathrm{X}(\{x_k\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\{x_k\}))$$

Notation

Dans toute la suite, pour simplifier l'écriture, on notera :

$$\mathrm{P_X}(\{x_k\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

Remarque

$\sum_{k \in \mathrm{K}} \mathrm{P_X}(\{x_k\}) = 1$ car l'ensemble des événements $\mathrm{X}^{-1}(x_k)$ forme un système complet d'événements.

Proposition

Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
On a alors :

$$\mathrm{P_X(B)} = \sum_{k \in \mathrm{K}, x_k \in \mathcal{B}} \mathrm{P_X}(\{x_k\})$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{B}) = \ & \{\omega \in \Omega / \mathrm{X}(\omega) \in \mathcal{B}\} \\ = \ & \textstyle\bigcup_{k \in \mathrm{K}, x_k \in \mathcal{B}} \{\omega \in \Omega / \mathrm{X}(\omega) = x_k\} \ \textit{union disjointe} \\ = \ & \textstyle\bigcup_{k \in \mathrm{K}, x_k \in \mathcal{B}} \mathrm{X}^{-1}(\{x_k\}) \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{B})) = \textstyle\sum_{k \in \mathrm{K}, x_k \in \mathcal{B}} \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\{x_k\}))$$

et par suite

$$\mathrm{P_X(B)} = \textstyle\sum_{k \in \mathrm{K}, x_k \in \mathcal{B}} \mathrm{P_X}(\{x_k\})$$

Exemple

On considère l'épreuve $\mathcal{E}_2$ qui consiste à lancer deux dés non pipés. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ l'espace probabilisé associé. On a $\Omega = [\![1 , 6]\!]^2$, $\mathcal{A} = \beta(\Omega)$ et P la mesure de probabilité uniforme.
On considère le nombre X d'as obtenus lors du lancer. On a :

$$\mathrm{P_X}(0) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = \frac{25}{36} \qquad \mathrm{P_X}(1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \frac{10}{36} \qquad \mathrm{P_X}(2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \frac{1}{36}$$

La probabilité pour que X soit pair est $\mathrm{P_X(B)} = \sum_{k \in \mathrm{K}, x_k \in \mathrm{B}} \mathrm{P_X}(x_k)$ avec $\mathrm{B} = \{2m, m \in \mathbb{N}\}$.
On a alors $\mathrm{P_X(B)} = \dfrac{13}{18}$.

1.5.3 Fonction d'une v.a.r. discrète

Soit X une v.a.r. discrète, $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_k / k \in \mathrm{K}\}$ et φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout point de $\mathrm{X}(\Omega)$ par :

$$\varphi(\mathrm{X}) : \quad \begin{aligned} \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto \varphi(\mathrm{X}(\omega)) \end{aligned}$$

Proposition

$\mathrm{Y} = \varphi(x)$ *est une v.a.r. discrète avec* $\mathrm{Y}(\Omega) = \{\varphi(x_k)/k \in \mathrm{K}\}$. *De plus :*

$$\forall y \in \mathrm{Y}(\Omega), \ \mathrm{P_Y}(y) = \sum_{k \in \mathrm{K}, \varphi(x_k) = y} \mathrm{P_X}(x_k)$$

Exemple

Soit X une v.a.r. discrète simple. $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1\}$ avec :

$$P(X = -2) = P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = 1/4$$

Soit $Y = X^2$ une v.a.r. On a alors $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ avec :

$$P(Y = 0) = 1/4 \qquad P(Y = 1) = 1/2 \qquad P(Y = 4) = 1/4$$

1.5.4 Exemples de lois discrètes usuelles

Loi binomiale

On appelle v.a.r. binomiale de paramètre n et p ($n \in \mathbb{N}^*, p \in [0\,,\,1]$) une v.a.r. discrète simple X qui peut prendre les valeurs {0,1,...,n} (i.e. $X(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!]$) et dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!],\ P_X(\{k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

La loi binomiale correspond au cas d'un tirage avec remise.

Cas particulier (n=1)

On dit alors que X est une v.a.r. de Bernoulli. L'épreuve $\mathcal{E}$ de Bernoulli est caractérisée par $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ avec ω_1 la probabilité d'avoir un échec et ω_2 la probabilité d'avoir un succès. On a $P(\{\omega_1\}) = 1 - p$ et $P(\{\omega_2\}) = p$. Comme $X(\{\omega_1\}) = 0$ et $X(\{\omega_2\}) = 1$, on a :

$$P(X = 0) = P(\omega_1) = 1 - p \qquad P(X = 1) = P(\omega_2) = p$$

Loi de Poisson

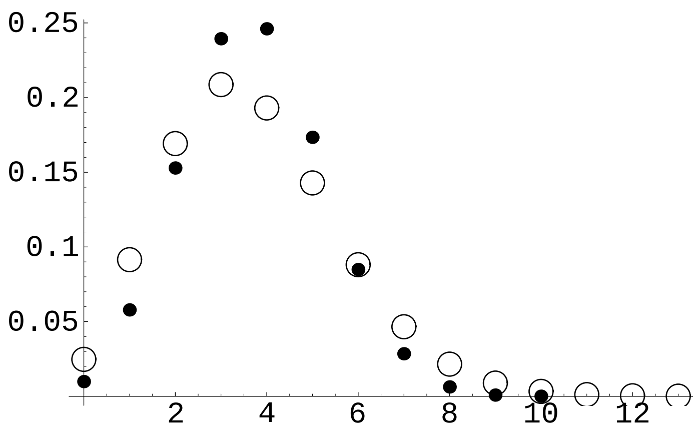
On appelle v.a.r. de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ une v.a.r. discrète X qui prend les valeurs $\{0, 1, \dots\}$ et dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

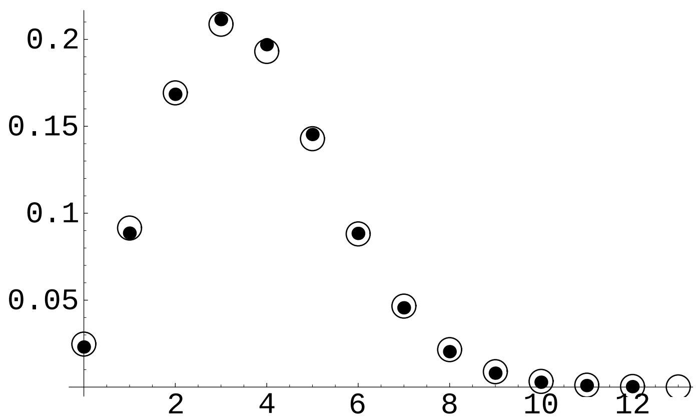
Retour sur la loi binomiale

Considérons la limite $n \to +\infty$, $p \to 0$ et le produit $np = \lambda$ une constante positive. Alors,

$$\begin{aligned} P(X = k) = &\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ = &\ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$



Points noirs : loi binomiale avec n = 10 et p = 0.37
Cercle blancs : loi de Poisson avec lamda = 3.7



Points noirs : loi binomiale avec n = 100 et p = 0.037
Cercle blancs : loi de Poisson avec lamda = 3.7

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}p^k &\sim \frac{n^k}{k!}p^k \sim \frac{\lambda^k}{k!} \\ (1-p)^{n-k} &\sim e^{-np} \sim e^{-\lambda} \end{aligned}$$

On retrouve, dans cette limite, une loi de Poisson de paramètre λ (voir schémas).

Loi géométrique

On appelle v.a.r. géométrique de paramètre $p \in [0\,,\,1]$ une v.a.r. discrète X avec $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Exemple

On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à jeter indéfiniment une pièce. Soit p la probabilité d'obtenir pile. $\Omega = \{(u_1, u_2, \dots)/u_i = \text{pile ou face}\}$. Soit la v.a.r. X définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} :\ \ \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \text{numéro du premier lancer donnant pile} \end{aligned}$$

On a alors $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^{+*}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \mathrm{P}(\{w \in \Omega/\mathrm{X}(\omega) = k\}) = (1-p)^{k-1}p$$

1.5.5 Fonction de répartition d'une v.a.r. discrète

Proposition

Soit X une v.a.r. discrète, $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_k/k \in \mathrm{K}\}$*. Sa fonction de répartition* $\mathrm{F_X}$ *est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F_X}(x) = \mathrm{P_X}(]-\infty, x]) = \sum_{k \in \mathrm{K}, x_k \leqslant x} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_k)$$

N.B. : $\mathrm{F_X}$ *est constante par morceaux.*

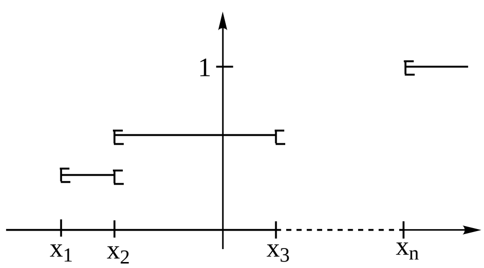


FIG. 1.1: Exemple de fonction de répartition d'une v.a.r. simple

1.5.6 Espérance mathématique, moments

Soit X une v.a.r. discrète, $X(\Omega) = \{x_k / k \in K\}$.

Espérance mathématique

L'espérance mathématique de X (notée $E[X]$*) est définie par :*

$$E[X] = \sum_{k \in K} x_k P(X = x_k)$$

(sous réserve que cette série converge absolument).

Moments

Les définitions suivantes sont vraies sous réserve de la convergence des séries mises en jeu.

Soit $r \in \mathbb{N}$*. On appelle le moment d'ordre r la série :*

$$\sum_{k \in K} x_k^r P(X = x_k) = E(X^r)$$

On appelle le moment centré d'ordre r la série :

$$\sum_{k \in K} (x_k - E[X])^r P(X = x_k) = E[(X - E[X])^r]$$

On appelle variance de la v.a.r. X le moment centré d'ordre 2 :

$$var[X] = \sum_{k \in K} (x_k - E[X])^2 P(X = x_k)$$

Remarques

- $var[X] \geqslant 0$
- $var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Ecart-type

Si la v.a.r. discrète X *admet une variance, on définit l'écart-type par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{var[X]}$$

Définition

La v.a.r. discrète X *est dite centrée si* $E[X] = 0$*, réduite si* $var[X] = 1$*.*

Soit Y une v.a.r. discrète telle que la série $\sum_{k \in K} y_k P(Y = y_k)$ converge absolument. Y admet alors une espérance mathématique, une variance et un écart-type.

La v.a.r $\dfrac{\mathrm{Y}-\mathrm{E}[\mathrm{Y}]}{\sigma(\mathrm{Y})}$ est la v.a.r. centrée-réduite associée à Y.

Exemples

- Loi binomiale de paramètres n et p.
$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np$$
Un calcul similaire donne $var[\mathrm{X}] = np(1-p)$.
- Loi de Poisson de paramètre λ.
$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = var[\mathrm{X}] = \lambda$$
- Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \frac{1}{p} \qquad var[\mathrm{X}] = \frac{1-p}{p^2}$$
- Soit X une v.a.r. discrète. $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P_X}(k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Cette v.a.r. discrète n'admet pas d'espérance mathématique.

1.5.7 Couple de v.a.r. discrètes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé associé à une épreuve $\mathcal{E}$. Soient X et Y deux v.a.r. discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_i / i \in \mathrm{I}\}$ et $\mathrm{Y}(\Omega) = \{y_j / j \in \mathrm{J}\}$.

Loi conjointe

Définir la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) *, c'est donner la probabilité notée* p_{ij} *de l'événement :*

$$\mathrm{X}^{-1}(\{x_i\}) \cap \mathrm{Y}^{-1}(\{y_j\}) = \{\omega \in \Omega / \mathrm{X}(\{\omega\}) = x_i \quad et \quad \mathrm{Y}(\{\omega\}) = y_j\}$$

On note la probabilité :

$$p_{ij} = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i \ et \ \mathrm{Y} = y_j)$$

Lois marginales

$$\mathrm{P}_{marg}(\mathrm{X} = x_i) = \sum_{j \in \mathrm{J}} p_{ij}$$

Ceci est vrai car $\{\mathrm{Y}^{-1}(\{y_j\}) / j \in \mathrm{J}\}$ est un système complet d'événements. On a de même :

$$\mathrm{P}_{marg}(\mathrm{Y} = y_j) = \sum_{i \in \mathrm{I}} p_{ij}$$

Lois conditionnelles

On note la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé : P(A|B). On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i|\mathrm{Y}=y_j) &= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i \; et \; \mathrm{Y}=y_j)}{\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y_j)} \\ &= \frac{p_{ij}}{\sum_{i\in\mathrm{I}} p_{ij}} \end{aligned}$$

On a de même :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=y_j|\mathrm{X}=x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum_{j\in\mathrm{J}} p_{ij}}$$

Remarque

$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} p_{ij} = 1$

Espérance mathématique conditionnelle

On appelle espérance mathématique conditionnelle de la v.a.r. X sachant que $\mathrm{Y} = y_j$ le nombre :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathrm{Y}=y_j] &= \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i \mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i|\mathrm{Y}=y_j) \\ &= \sum_{i\in\mathrm{I}} x_i \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i,\mathrm{Y}=y_j)}{\sum_k \mathrm{P}(\mathrm{X}=x_k,\mathrm{Y}=y_j)} \end{aligned}$$

Fonction de répartition conjointe du couple

Soit un couple (X,Y) de v.a.r. discrètes. On appelle fonction de répartition conjointe du couple la fonction définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\; \mathrm{F}_{\mathrm{X,Y}}(x,y) = \mathrm{P}(\mathrm{X}\in\,]-\infty\,,\,x]\;\; et \;\; \mathrm{Y}\in\,]-\infty\,,\,y])$$

Fonctions de répartition marginales

On appelle fonction de répartition marginale de X, la fonction définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) = \sum_{i\in\mathrm{I}, x_i\leqslant x} \mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$$

De même, pour Y :

$$\forall y\in\mathbb{R}, \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y) = \sum_{j\in\mathrm{J}, y_j\leqslant y} \mathrm{P}(\mathrm{Y}=y_i)$$

Exemple

On considère l'épreuve qui consiste à choisir un entier dans l'intervalle $[\![1\,,\,n]\!]$, puis à choisir un entier inférieur ou égal au premier obtenu. L'espace fondamental est simplement :

$$\Omega = \{(k,l)\in [\![1\,,\,n]\!]^2 / l\leqslant k\}$$

On définit alors les deux v.a.r. suivantes :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{X}: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (k,l) & \longmapsto & k \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Y}: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (k,l) & \longmapsto & l \end{array}$$

- Loi marginale de X

$$\forall k \in [\![1\,,\, n]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \frac{1}{n}$$

- Loi conjointe du couple (X,Y)

$$\forall (k,l) \in \Omega,\ l \leqslant k,\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=k \ et\ \mathrm{Y}=l) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=k)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{Y}=l|\mathrm{X}=k) = \frac{1}{nk}$$

$$\mathrm{S}i\ l > k,\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=k \ et\ \mathrm{Y}=l) = 0$$

- Loi marginale de Y

$$\forall l \in [\![1\,,\, n]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{Y}=l) = \sum_{k=l}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k \ et\ \mathrm{Y}=l) = \sum_{k=l}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n}(\frac{1}{l}+\ldots+\frac{1}{n})$$

Cas particulier n=3

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \frac{1}{3}$

Loi conjointe :

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3 \ et\ \mathrm{Y}=1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=3 \ et\ \mathrm{Y}=2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=3 \ et\ \mathrm{Y}=3) = \frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2 \ et\ \mathrm{Y}=2) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=2 \ et\ \mathrm{Y}=1) = \frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1 \ et\ \mathrm{Y}=1) = \frac{1}{3}$

Loi marginale de Y :

$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) = \frac{11}{18}$ $\quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}=2) = \frac{5}{18}$ $\quad \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) = \frac{2}{18}$

Définition

Soient X *et* Y *deux v.a.r. discrètes (définies sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
Elles sont indépendantes si :

$$\forall x_i \in \mathrm{X}(\Omega)\ et\ \forall y_j \in \mathrm{Y}(\Omega),\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i \ et\ \mathrm{Y}=y_j) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{Y}=y_j)$$

Si X *et* Y *indépendantes alors :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{F}_{\mathrm{X,Y}}(x,y) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x)\cdot \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(y)$$

Somme de deux v.a.r. discrètes indépendantes

Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. discrètes indépendantes telles que $X_1(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Proposition

La somme $S = X_1 + X_2$ *est une v.a.r. discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(S = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = k - i)$$

Exemples

- X_1 et X_2 v.a.r. de Poisson indépendantes de paramètres λ_1 et λ_2. $S = X_1 + X_2$.
  $$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ P(S = k) &= \textstyle\sum_{i=0}^{k} \left(e^{-\lambda_1}\dfrac{\lambda_1^i}{i!}\right)\left(e^{-\lambda_2}\dfrac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\right) \\ &= \dfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \textstyle\sum_{i=0}^{k} \dfrac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\ &= \dfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1 + \lambda_2)^k\end{aligned}$$
  On obtient pour S une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
- X_1 et X_2 v.a.r. de Bernoulli de même paramètre $p \in [0\ ,\ 1]$. $X_1(\Omega) = 0, 1$.
  $$P(X = 0) = 1 - p \qquad P(X = 1) = p$$
  Soit $S = X_1 + X_2$. Alors $S(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et
  $$P(S = 0) = (1 - p)^2 = C_2^0 p^0 (1 - p)^{2-0}$$
  $$P(S = 1) = 2p(1 - p) = C_2^1 p^1 (1 - p)^{2-1}$$
  $$P(S = 2) = p^2 = C_2^2 p^2 (1 - p)^{2-2}$$
  S est une v.a.r. binomiale de paramètres $n = 2$ et p.

Généralisation

$X_1, X_2, \ldots, X_N$ N v.a.r. de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre p. Alors, la v.a.r. $S = X_1 + \ldots + X_N$ est une v.a. binomiale de paramètres $n = N$ et p.

1.5.8 Covariance et coefficient de corrélation linéaire

Soit X et Y deux v.a.r. discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant chacune une espérance mathématique. On appelle covariance de X et de Y le nombre :

$$cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

sous réserve que la v.a. XY admet une espérance mathématique.

Définition

Si $cov(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$, *on dit que* X *et* Y *ne sont pas corrélées.*

Remarque
Si X et Y sont indépendantes, alors, elles ne sont pas corrélées (la réciproque est en général fausse).

Exemple
Soit X une v.a.r. telle que $\mathrm{X}(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, et telle que :
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = -1) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) \;=\; 1/3$.
Soit la v.a.r. $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$. On a alors $\mathrm{Y}(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0) = 1/3$ et $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = 1) = 2/3$.
On a alors : $cov(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$, alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition

Coefficient de corrélation linéaire :

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \frac{cov(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}{\sqrt{var[\mathrm{X}]var[\mathrm{Y}]}} = \frac{cov(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}{\sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})}$$

*sous réserve que var(*X*)>0 et var(*Y*)>0.*

Proposition

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$. *Alors :*

$$f(\mathrm{X}, a\mathrm{X} + b) = \begin{cases} 1 & si\ a > 0 \\ -1 & si\ a < 0 \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\begin{cases} f(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = 1 \\ f(\mathrm{X}, -\mathrm{X}) = -1 \end{cases}$$

Proposition

Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y satisfait la relation $|f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})| \leqslant 1$.

Remarque
L'égalité $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \pm 1$ est obtenue si et seulement si X et Y sont liées par une relation affine (Y=aX+b avec (a,b) $\in \mathbb{R}^2$).

1.5.9 Inégalité de Bienaymé - Tchebitchev

théorème

Soit X *une v.a.r. discrète admettant une espérance mathématique et une variance. Alors :*

$$\forall l > 0,\ \mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{E}[\mathrm{X}]| \geqslant l) \leqslant \frac{var[\mathrm{X}]}{l^2}$$

Note : $\mathrm{P}(\{|\mathrm{X} - \mathrm{E}[\mathrm{X}]| \geqslant l\})$ *désigne ici la quantité* $\mathrm{P_X}(]-\infty, \mathrm{E}[\mathrm{X}] - l] \bigcup [\mathrm{E}[\mathrm{X}] + l, +\infty[)$

1.5.10 Fonctions génératrices

Définition

Soit X *une v.a.r. discrète, à valeurs dans* $\mathbb{N}$. *On appelle fonction génératrice de la distribution de probabilité de* X *(ou simplement fonction génératrice de* X*) la fonction* G_X *définie par :*

$$G_X(s) = \sum_{k \in K} P(X = k)s^k \text{ avec } K \subset \mathbb{N}$$

Remarque
$G_X(s) = E[s^X]$ avec $s^X = e^{X \ln(s)}$

Proposition

Le rayon de convergence de la série $\sum_{k \in K} P(X = k)s^k$ *est au moins égal à 1.*

Exemples

- Soit X une v.a.r. de Bernoulli, de paramètre p.
$$G_X(s) = P(X = 0)s^0 + P(X = 1)s^1 = 1 - p + ps$$
- Soit X une v.a.r. binomiale de paramètres n et p.
$$\begin{aligned} G_X(s) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)s^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} s^k \\ &= (1 - p + ps)^n \end{aligned}$$
- Soit X une v.a.r. de Poisson de paramètre λ.
$$\begin{aligned} G_X(s) &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)s^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} s^k \\ &= e^{\lambda(s-1)} \end{aligned}$$

Proposition

Soit X *une v.a.r. discrète, à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
- *Si* X *admet une espérance,* G_X *est dérivable en* $s = 1$ *et* $G'_X(s = 1) = E[X]$.
- *Si* X *admet une variance et une espérance, alors* G_X *admet une dérivée seconde en* $s = 1$ *et :*
$$G''_X(s = 1) + G'_X(s = 1) - (G'_X(s = 1))^2 = var[X]$$

Proposition

Soient X *et* Y *deux v.a.r. discrètes indépendantes, à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

Démonstration
$G_{X+Y}(s) = E[s^{X+Y}] = E[s^X s^Y] = E[s^X]E[s^Y]$

Généralisation

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a :

$$G_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(s) = G_{X_1}(s)\ldots G_{X_n}(s)$$

Exemple

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n v.a.r. indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.

$$G_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(s) = (1-p+ps)\ldots(1-p+ps) = (1-p+ps)^n$$

On retrouve en fait la fonction génératrice d'une loi binomiale. Or, on admet que si deux v.a.r. ont même fonction génératrice alors elles suivent la même loi de probabilité donc $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale.

1.6 Variables aléatoires réelles absolument continues (a.c.)

1.6.1 Définition

Soit X une v.a.r. dont la fonction de répartition F_X est de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \in]-\infty\,,\,x\,]) = \int_{]-\infty,x]} f_X(v)d\mu(v)$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et où la fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que :

1. $f_X \geqslant 0$
2. f_X est sommable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\int f_X(v)d\mu(v) = 1$

Alors, on dit que X est une v.a.r. absolument continue (a.c.) et la fonction f_X est la densité de probabilité de X.

Exemples de lois de probabilité absolument continues

1. Loi uniforme sur $[a, b]$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$) :

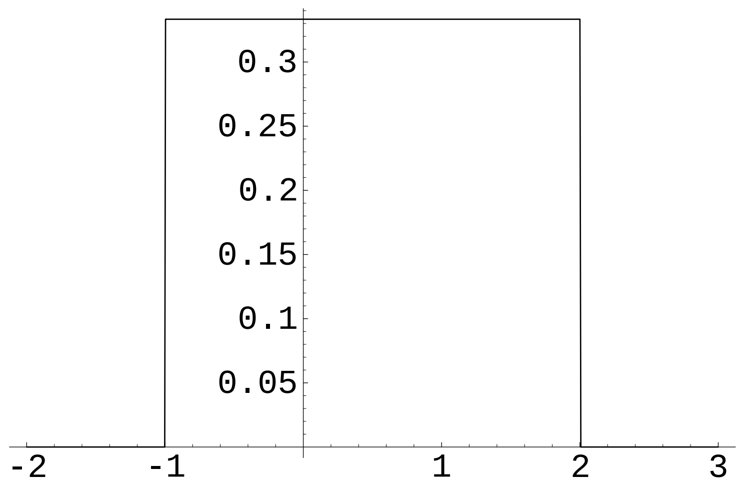
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Loi normale (Gaussienne) :

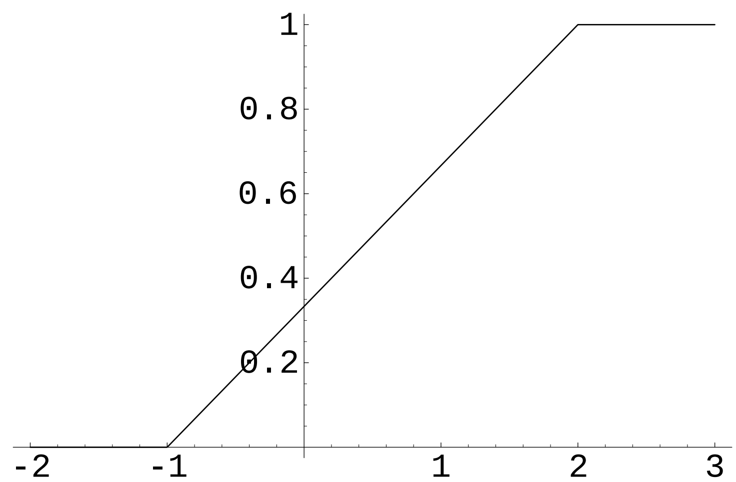
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, la loi normale est dite centrée-réduite. On a :

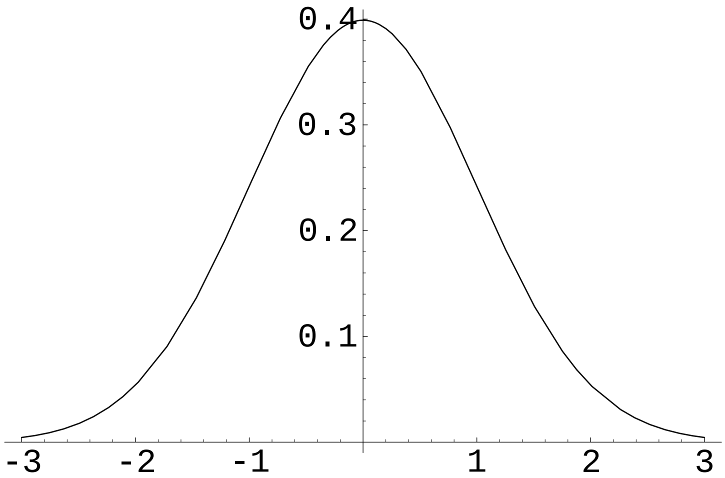
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \pi\left(\mathrm{E}rf(\frac{x}{\sqrt{2}}) + 1\right)$$



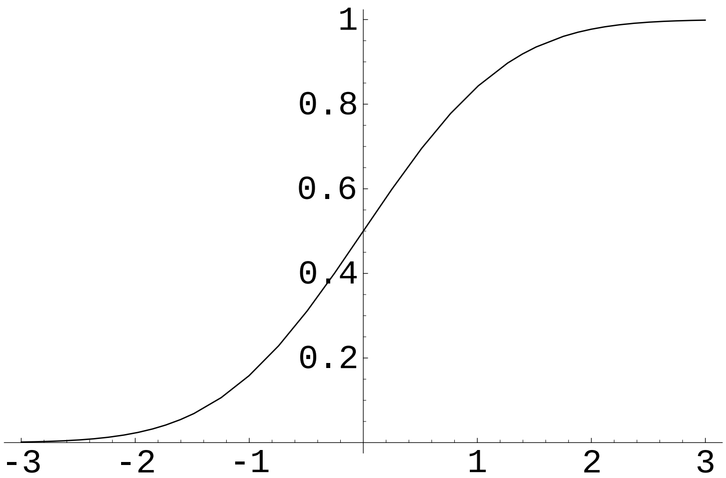
Densité de probabilité pour la loi uniforme Havec a = - 1 et b = 2L



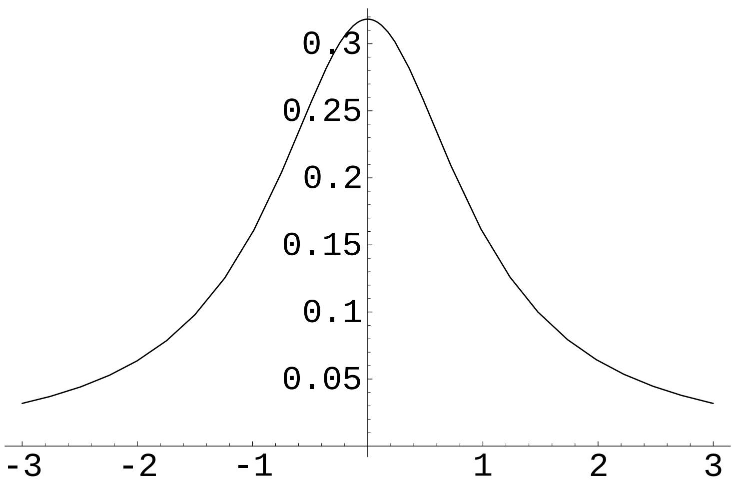
Fonction de répartition pour la loi uniforme Havec a = - 1 et b = 2L



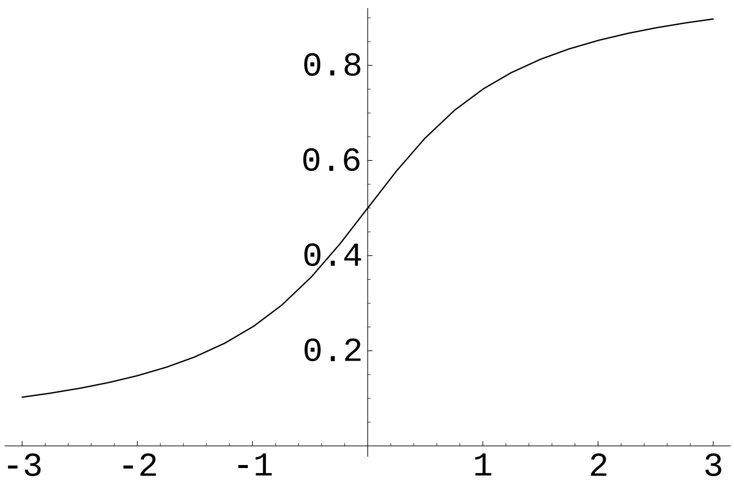
Densité de probabilité pour la loi normale
Havec m = 1 et sigma = 2L



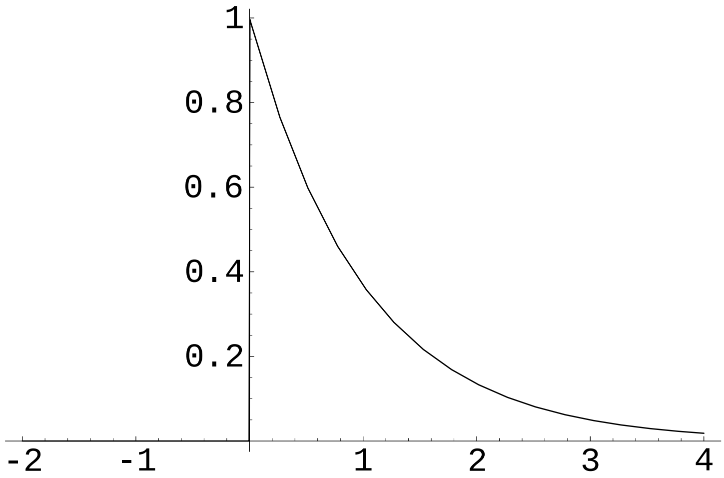
Fonction de répartition pour la loi normale
Havec m = 1 et sigma = 2L



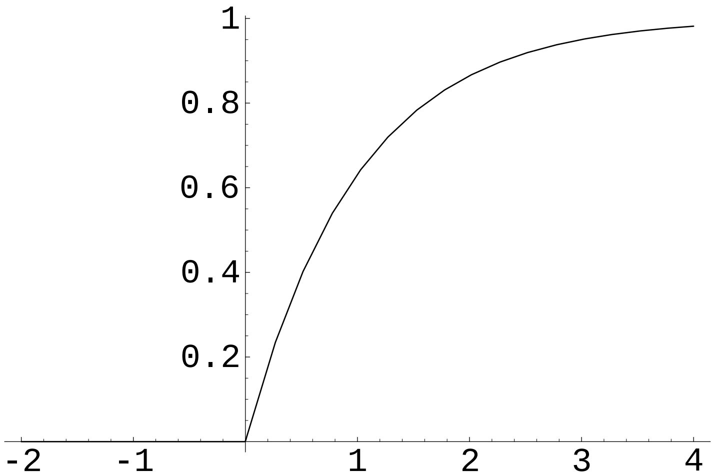
Densité de probabilité pour la loi de Cauchy
Havec a = 1L



Fonction de répartition pour la loi de Cauchy
Havec a = - 1 L



Densité de probabilité pour la loi exponentielle
Havec alpha = 1L



Fonction de répartition pour la loi exponentielle
Havec alpha = 1L

3. Loi de Cauchy
$$f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}, \forall x \in \mathbb{R}, a > 0$$
4. Loi exponentielle
$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \alpha > 0$$

Proposition

Si X *est une v.a.r. absolument continue de densité* f_X *:*
- F_X *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et en tout point où* f_X *est continue,* $F'_X(x) = f_X(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ P_X(\{x\}) = 0$. *En effet, pour un intervalle* $[a,b] \in \mathbb{R}$, *on a :*
$$P_X([a,b]) = \int_{[a,b]} f(v)d\mu(v)$$
Si l'intervalle se réduit à un singleton, la valeur de l'intégrale est nulle.

Remarque

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$; alors
$$P_X([x_0, x_0+h]) = \int_{[x_0,x_0+h]} f_X(v)d\mu(v)$$
Si f_X est continue en x_0, on a alors :
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{[x_0,x_0+h]} f_X(v)d\mu(v) = f_X(x_0)$$
d'où l'on déduit :
$$P_X([x_0, x_0+dx]) \simeq f_X(x_0)dx$$

Exemple

Soit X une v.a.r. absolument continue de densité de probabilité $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Quelle est la probabilité que $\sin X > 0$?

Notons $P\{\sin X > 0\}$ cette probabilité. On a l'événement :
$$X^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[\right) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[\}$$
$$\begin{aligned} P(X^{-1}(\textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[)) &= P_X((\textstyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[)) \\ &= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_X(]2k\pi, (2k+1)\pi[) \\ &= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x}dx \\ &= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (1-e^{-\pi})e^{-2k\pi} \\ &= (1-e^{-\pi}) \textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-2k\pi} \end{aligned}$$
$$P\{\sin X > 0\} = \frac{1-e^{-\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \frac{1}{1+e^{-\pi}} \simeq 0.959$$

1.6.2 Espérance, variance

Définition

Soit X *une v.a.r. absolument continue. On appelle espérance mathématique de* X *le nombre :*

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \int_{\mathbb{R}} x f_{\mathrm{X}}(x) d\mu(x)$$

sous réserve que la fonction $x f_{\mathrm{X}}$ *soit sommable au sens de Lebesgue.*

La variance est définie par :

$$var[\mathrm{X}] = \mathrm{E}[(\mathrm{X} - \mathrm{E}[\mathrm{X}])^2]$$

Les expressions des espérances mathématiques et des variances sont données dans le tableau suivant pour différentes lois de probabilités absolument continues.

	E[X]	var[X]
loi uniforme sur $[a\,,\,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
loi normale m,σ	m	σ^2
loi de cauchy, α	pas d'espérance	pas de variance
loi exponentielle	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$

1.6.3 Couple de v.a.r. absolument continues

Loi conjointe

Soient X *et* Y *deux v.a.r.* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. *On appelle fonction de répartition conjointe du couple* (X, Y) *la fonction* $\mathrm{F}_{\mathrm{X,Y}}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $[0\,,\,1]$ *:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{F}_{\mathrm{X,Y}}(x,y) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \in \,]-\infty\,,\,x]\ \textit{et}\ \mathrm{Y} \in \,]-\infty\,,\,y])$$

Définition

Si $\mathrm{F}_{\mathrm{X,Y}}$ *est telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{F}_{\mathrm{X,Y}}(x,y) = \int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f_{\mathrm{X,Y}}(u,v) d\mu(u) d\mu(v)$$

avec

1. $f_{\mathrm{X,Y}} \geqslant 0$
2. $f_{\mathrm{X,Y}}$ *est sommable au sens de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^2$ *et son intégrale vaut 1.*

Alors le couple (X, Y) *est dit absolument continu et* $f_{\mathrm{X,Y}}$ *est appelée la densité de probabilité conjointe du couple* (X, Y).

Remarques

- On parle aussi de vecteur au lieu de couple.

- Soient X et Y deux v.a.r. absolument continues. Il se peut que le couple (X,Y) ne soit pas absolument continu.
- Si (X,Y) est un couple a.c., alors X et Y sont des v.a.r.a.c.

Exemple

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. tel que $\mathrm{F}_{\mathrm{X},\mathrm{Y}} = \displaystyle\int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2-uv+v^2)} d\mu(u)d\mu(v)$.

On vérifie que le couple (X,Y) est un couple absolument continu de densité de probabilité $f_{\mathrm{X},\mathrm{Y}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2-uv+v^2)} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int f_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(u,v)d\mu(u)d\mu(v) = 1$.

Loi marginale

Proposition

Soit (X,Y) *un couple de v.a.r. absolument continues, de densité* $f_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}$. *Alors* X *est une v.a.r. absolument continue admettant pour densité de probabilité la fonction (appelée densité marginale de* X*) définie par :*

$$\begin{aligned} f_{marg\mathrm{X}} :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & u \longmapsto f_{marg\mathrm{X}}(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(u,v)d\mu(v) \end{aligned}$$

Avec l'exemple précédent, on obtient :

$$f_{marg\mathrm{X}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{3}{8}u^2}$$

$$f_{marg\mathrm{Y}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{3}{8}v^2}$$

On obtient des lois normales avec les paramètres $m = 0$ et $\sigma = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Définition

Soit (X,Y) *un couple de v.a.r. absolument continues de densité* $f_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}$. *On dit que* X *et* Y *sont indépendantes si* $f_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}(x,y) = f_{marg\mathrm{X}}(x).f_{marg\mathrm{Y}}(y)$ *pour presque tout (x,y).*

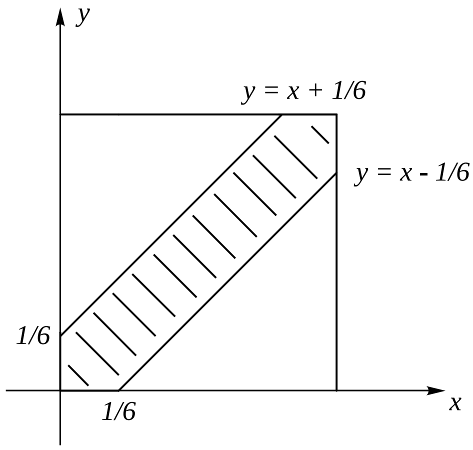
Exemple

Roméo et Juliette projettent de se rencontrer devant les arènes entre minuit et une heure du matin et d'attendre chacun dix minutes.

Quelle est la probabilité de rencontre ?

On note respectivement t_r et t_j les heures d'arrivée de Roméo et de Juliette. On travaille dans $\Omega = \{(t_r,t_j)/t_r \in [0\,,1] \text{ et } t_j \in [0\,,1]\} = [0\,,1]^2$. On définit deux variables aléatoires :

$$\begin{aligned} \mathrm{X} :\ & \Omega \longrightarrow [0\,,1] \\ & (t_r,t_j) \longmapsto t_r \end{aligned}$$



$$\begin{array}{llll} Y : & \Omega & \longrightarrow [0\,,\,1] \\ & (t_r, t_j) & \longmapsto t_j \end{array}$$

- Loi marginale de X : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

  On a alors $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} I_{[0\,,\,1]}(u)du$ avec $I_{[0\,,\,1]}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[0\,,\,1]$.
  De même pour Y, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(y) = P_Y(]-\infty\,,\,y]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{y} I_{[0\,,\,1]}(v)dv$.
- Loi conjointe du couple

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F_{X,Y}(x, y) = P_X(]-\infty\,,\,x]).P_Y(]-\infty\,,\,y]) = \int_{\substack{0 \leqslant u \leqslant x \\ 0 \leqslant v \leqslant y}} I_{[0,1]}(u) I_{[0,1]}(v)dudv$$

  Le couple (X, Y) est absolument continu et sa densité de probabilité est simplement donnée par :

$$f_{X,Y}(u, v) = I_{[0,1]}(u) I_{[0,1]}(v)$$

  A : événement Roméo et Juliette se rencontrent. Cet événement correspond à l'ensemble :

$$\{(t_r, t_j) \in \Omega \text{ tel que } |t_r - t_j| \leqslant \frac{1}{6}\}$$

  La probabilité de A est alors donnée par :

$$P(A) = \int_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ |u-v| \leqslant 1/6}} dudv = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

Exemple : l'aiguille de Buffon (1786)

On trace sur le sol un réseau de droites équidistantes (d). On jette une aiguille de longueur $l < d$. Quelle est la probabilité pour que l'aiguille coupe une droite ?

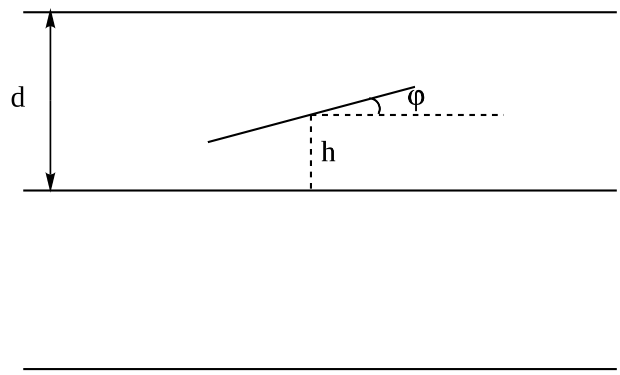


FIG. 1.2: Aiguille de Buffon

On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à jeter l'aiguille. On mesure h et φ, les coordonnées de l'aiguille. On a $\Omega = \{(h,\varphi)/h \in [0,d/2], \varphi \in [0,\pi]\}$

On considère les variables aléatoires suivantes :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{X}: & \Omega & \longrightarrow & [0,1/2] \\ & (h,\varphi) & \longmapsto & h/d \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Y}: & \Omega & \longrightarrow & [0,\pi[\\ & (h,\varphi) & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

Le couple (X,Y) est absolument continu et de densité conjointe :

$$f_{\mathrm{X,Y}}(x,y) = \frac{1}{1/2}\mathrm{I}_{[0,1/2]}(x).\frac{1}{\pi}\mathrm{I}_{[0,\pi[}(y)$$

Soit A l'événement "l'aiguille coupe une droite".

$$\mathrm{A} = \{(h,\varphi) \in \Omega/0 \leqslant h \leqslant (l/2)\sin\varphi\}$$

$$\mathrm{P(A)} = \int_{\substack{(x,\,y)\,\in\,[0,\,1/2]\,\times\,[0,\,\pi[\\ 0\,\leqslant\,x\,\leqslant\,(l/2d)\,\sin\,y}} f_{\mathrm{X,Y}}(x,y)dxdy$$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{2}{\pi}\int_{\substack{(x,\,y)\,\in\,[0,\,1/2]\,\times\,[0,\,\pi[\\ 0\,\leqslant\,x\,\leqslant\,(l/2d)\,\sin\,y}} dxdy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\frac{l}{d}\sin t dt = \frac{2l}{\pi d}$$

Pour une détermination de π à partir de ce résultat, on pourra consulter le site : http ://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html

Loi conditionnelle de X sachant que Y = y

$$h > 0 \quad \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x | \mathrm{Y} \in [y-h,y+h]) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x \text{ et } \mathrm{Y} \in [y-h,y+h])}{\mathrm{P}(\mathrm{Y} \in [y-h,y+h])}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x \text{ et } \mathrm{Y} \in [y-h,y+h]) = \int_{]\infty,x]\times[y-h,y+h]} f_{\mathrm{X,Y}}(u,v)d\mu(u)d\mu(v)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} \in [y-h, y+h]) = \int_{[y-h,y+h]} f_{marg\mathrm{Y}}(v) d\mu(v)$$

On multiplie et on divise par $\frac{1}{2h}$. On a alors, quand h tend vers zéro :

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x | \mathrm{Y} \in [y-h, y+h]) = \frac{\displaystyle\int_{]-\infty,x]} f_{\mathrm{X,Y}}(u,y) d\lambda(u)}{f_{marg\mathrm{Y}}(y)}$$

Définition

Soit (X, Y) *un couple de v.a.r. absolument continu de densité* $f_{\mathrm{X,Y}}$. *La fonction de répartition conditionnelle de* X *sachant que* $\mathrm{Y} = y$ *est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}=y}(x) = \frac{\displaystyle\int_{]-\infty,x]} f_{\mathrm{X,Y}}(u,y) d\mu(u)}{f_{marg\mathrm{Y}}(y)}$$

et donc la densité de probabilité conditionnelle est donnée par :

$$f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}=y} = \frac{f_{\mathrm{X,Y}}(x,y)}{f_{marg\mathrm{Y}}(y)}$$

Définitions

Soit (X, Y) *un couple de v.a.r. absolument continu de densité* $f_{\mathrm{X,Y}}$.
On appelle espérance mathématique de X *:*

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \int u f_{\mathrm{X,Y}}(u,v) d\mu(u) d\mu(v)$$

On appelle espérance conditionnelle de X *sachant* $\mathrm{Y} = y$ *:*

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}|\mathrm{Y}=y] = \int u f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}=y}(u,y) d\mu(u)$$

Exemple

On choisit au hasard un nombre entre $]\,0\,,\,1\,[$ puis un second entre $]\,0$, premier nombre obtenu $[$.
On a $\Omega = \,]\,0\,,\,1\,[^2$. On définit les variables aléatoires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{X} : & \Omega & \longrightarrow \,]\,0\,,\,1\,[\\ & (x,y) & \longmapsto x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Y} : & \Omega & \longrightarrow \,]\,0\,,\,1\,[\\ & (x,y) & \longmapsto y \end{array}$$

$$f_{marg\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \,]\,0\,,\,1\,[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{\mathrm{Y}|\mathrm{X}=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad y \in \,]\,0\,,\,x\,[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– Loi conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{margX}(x).f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– Loi marginale de Y

$$f_{margY}(y) = \int f_{X,Y}(x,y)d\mu(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^1 \frac{dx}{x} = -lny & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– Espérance mathématique de X et de Y

$$\mathrm{E}[X] = \int x f_{X,Y}(x,y)dxdy = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}[Y] = \int y f_{X,Y}(x,y)dxdy = \frac{1}{4}$$

<u>*Attention*</u> : $f_{X,Y}(x,y) \neq f_{margX}(x).f_{margY}(y)$

(X et Y ne sont donc pas indépendantes.)

– Espérance mathématique conditionnelle de Y sachant que X = x :

$$\mathrm{E}[Y|X=x] = \int y f_{Y|X=x}(y)dy = \frac{x}{2}$$

Proposition

Soit (X, Y) *un couple de v.a.r. absolument continu de densité* $f_{X,Y}$. *Alors, la somme* $S = X + Y$ *est une v.a.r. absolument continue admettant pour densité de probabilité :*

$$f_S(s) = \int f_{X,Y}(u, s-u)d\mu(u) = \int f_{X,Y}(s-v, v)d\mu(v)$$

Cas particulier : *si* X *et* Y *sont indépendantes alors*

$$f_S(s) = \int f_{margX}(u) f_{margY}(s-u)d\mu(u)$$

<u>Exemple</u>

Soit X une v.a. normale centrée-réduite.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = P_X(]-\infty\,,\,x\,]) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$

Quelle est la loi de probabilité de la v.a.r. $Y = X^2$?

$$\forall y > 0 \quad F_Y(y) = P_Y(]-\infty\,,\,y\,]) = P_X([-\sqrt{y}\,,\,\sqrt{y}]) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du = 2\int_0^y \frac{e^{-\frac{v}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

donc

$$f_Y(v) = \begin{cases} 0 \text{ si } v \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{v}{2}}}{\sqrt{2\pi v}} \quad \text{si} \quad v > 0 \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv$$

Loi du χ^2 à un degré de liberté.

1.6.4 Fonctions caractéristiques

Définition

Soit X *une v.a.r. absolument continue de densité* f_X. *On appelle fonction caractéristique de* X *la fonction définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \varphi_X : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \int f_X(x)e^{itx}d\mu(x) \end{array}$$

Remarque

$\varphi_X(t) = E[e^{itx}]$. Cette définition permet de définir φ_X pour les v.a.r. discrètes.

Exemples

- Soit X une v.a. de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,,\,1]$.

$$\varphi_X(t) = G_X(s = e^{it}) = 1 - p + pe^{it}$$

- Soit X une v.a. binomiale de paramètres n,p.

$$\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$$

Proposition

Deux v.a.r. ayant même fonction caractéristique ont même loi de probabilité.

Exemples

- Soit X une v.a.r. absolument continue de densité $f_X(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$ avec $a > 0$ (variable aléatoire de Cauchy). Alors,

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} e^{itx}dx = e^{-a|t|} \quad \text{(cf. méthode des résidus)}$$

- Soit X une v.a.r. normale centrée-réduite.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Proposition

Soit $\varphi_{\mathrm{X}}(t)$ la fonction caractéristique d'une v.a.r. X :

1. $\varphi_{\mathrm{X}}(t=0)=1$
2. $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\varphi_{\mathrm{X}}(t)| \leqslant 1$
3. *$\varphi_{\mathrm{X}}(t)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$*
4. *Si le moment d'ordre n de X existe :*

$$\varphi_{\mathrm{X}}^{(n)}(t=0)=i^n\mathrm{E}[\mathrm{X}^n]$$

Proposition

La fonction caractéristique d'une somme de v.a.r est le produit de leurs fonctions caractéristiques.

1.7 Suite de variables aléatoires

Préliminaire

Soit $q \in \mathbb{R}$, on appelle variable aléatoire certaine q une variable aléatoire discrète qui ne prend qu'une seule valeur, q, avec une probabilité de 1.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.7.1 Introduction - théorème de Moivre-Laplace

Soit $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ une suite de v.a. de Bernoulli, indépendantes, de même paramètre $p \in [0\,,\,1]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X_n prend les valeurs 0 et 1. De plus :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=0)=1-p \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}_n=1)=p$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}_n]=p \qquad var[\mathrm{X}_n]=p(1-p) \qquad \sigma(\mathrm{X}_n)=\sqrt{p(1-p)}$$

On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{S}_n=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\ldots+\mathrm{X}_n$. S_n est une v.a. discrète prenant les valeurs $k \in [\![0\,,\,n]\!]$. On a $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ et :

$$\mathrm{E}[\mathrm{S}_n]=np \qquad var[\mathrm{S}_n]=np(1-p) \qquad \sigma(\mathrm{S}_n)=\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}$$

Soit S_n^* la v.a.r. discrète définie par :

$$\mathrm{S}_n^*=\frac{\mathrm{S}_n-np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}$$

S_n^* prend ses valeurs dans $\{\frac{k-np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} | k \in [0\,,\,n]\}$. On a :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{S}_n^*=\frac{k-np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}\right)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}_{\mathrm{S}_n^*}(x) = \mathrm{P}_{\mathrm{S}_n^*}(]-\infty\,,\,x\,]) = \sum_{\substack{k\,\in\,[0,\,n] \\ \frac{k-np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}\,\leqslant\,x}} \mathrm{P}\left(\mathrm{S}_n^* = \frac{k-np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

$$= \sum_{\substack{k\,\in\,[0,\,n] \\ k\,\leqslant\,\lfloor x\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}+np\rfloor}} \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor = \text{le plus grand entier inférieur à } x$$

Remarque

Si $x < \dfrac{-np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}$ alors $\mathrm{F}_{\mathrm{S}_n^*}(x) = 0$ et si $x > \dfrac{n-np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}$ alors $\mathrm{F}_{\mathrm{S}_n^*}(x) = 1$

Proposition

Quand n tend vers l'infini, avec p fixé, on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{S}_n^*}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{\frac{-u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$

C'est le théorème de Moivre-Laplace. La limite de $\mathrm{F}_{\mathrm{S}_n^*}(x)$ pour $n \to \infty$ est la fonction de répartition d'une v.a.r. normale centrée réduite (voir figure 1.3).

Considérons la v.a.r. $\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} = \dfrac{\mathrm{X}_1 + ... + \mathrm{X}_n}{n}$. Cette v.a.r. prend les valeurs k/n pour $k \in [\![1\,,\,n]\!]$. On a :

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}_{\frac{\mathrm{S}_n}{n}}(x) = \sum_{\substack{k\,\in\,[\![1\,,\,n]\!] \\ k\,\leqslant\,\lfloor xn\rfloor}} \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{cases} x < 0 & \mathrm{F}_{\frac{\mathrm{S}_n}{n}}(x) = 0 \\ x > 1 & \mathrm{F}_{\frac{\mathrm{S}_n}{n}}(x) = 1 \end{cases}$$

Proposition

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{F}_{\frac{\mathrm{S}_n}{n}(x)} = \begin{cases} 1 & si \quad x \geqslant p \\ 0 & sinon \end{cases}$$

La limite est la fonction de répartition de la variable aléatoire certaine p (v.a.r. discrète ne prenant qu'une valeur, à savoir p, avec une probabilité égale à 1) (voir figure 1.4).

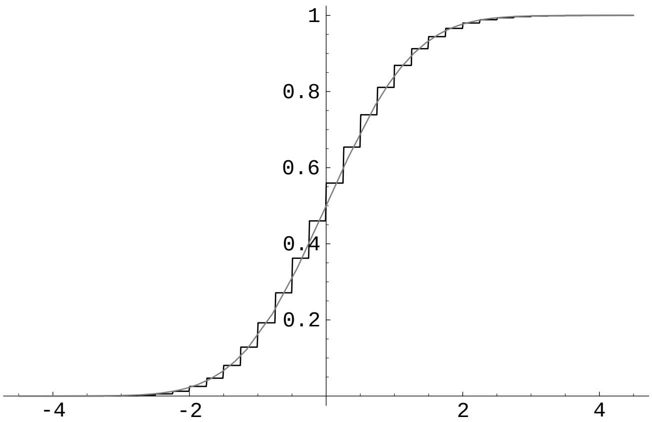


FIG. 1.3: $F_{S_n*}(x)$ avec n=100 et p=0.2

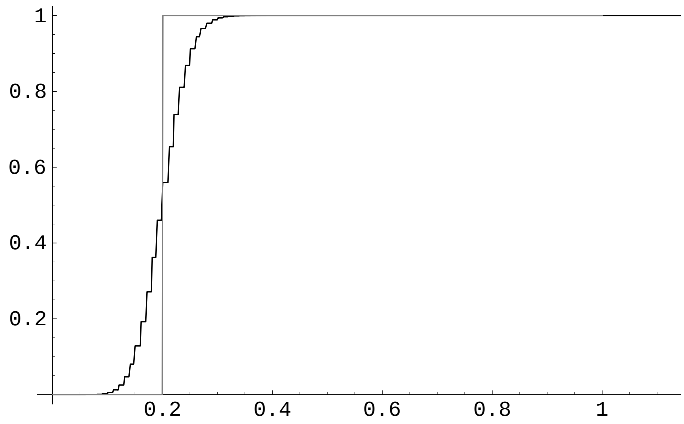


FIG. 1.4: $F_{S_n/n}(x)$ avec n=100 et p=0.2

1.7.2 Convergence en loi - théorème "central limit”

Définition

Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ *une suite de v.a.r. On dit que lorsque* $n \to \infty$, Y_n *converge en loi vers la v.a.r.* Y *si pour tout* y *où la fonction de répartition* F_Y *est continue, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = F_Y(y)$$

Remarque
Soit φ_{Y_n} et φ_Y les fonctions caractéristiques de Y_n et Y. La suite de v.a.r. Y_n converge en loi vers la v.a.r. Y si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $\varphi_{Y_n}(t)$ converge vers $\varphi_Y(t)$.

Théorème "central limit”

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi de probabilité, admettant chacune une espérance m et une variance σ^2 (i.e. $E[X_n] = m$ et $var[X_n] = \sigma^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Posons $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
(Rappel : $E[S_n] = nm$ et $var[S_n] = n\sigma^2$).

Alors, lorsque n tend vers l'infini, la v.a.r. $\dfrac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ converge en loi vers une v.a.r. normale centrée réduite.

Avec les mêmes hypothèses, la v.a.r. S_n/n converge en loi quand n tend vers l'infini vers la variable aléatoire certaine m (Loi des grands nombres).

Chapitre 2

Calcul des variations

2.1 Préliminaire : Multiplicateurs de Lagrange

Pour comprendre l'intérêt des multiplicateurs de Lagrange, considérons une fonction f :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathrm{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. f est continue et admettant des dérivées premières et secondes continues sur U.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \overrightarrow{grad}\ f.\overrightarrow{dr}$$

Si en (x_0, y_0), on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ alors (x_0, y_0) est un point stationnaire de f. La nature du point stationnaire dépend des dérivées d'ordre supérieur.

Que se passe-t-il si (x, y) au lieu de parcourir tout U, le point se déplace sur une trajectoire $g(x, y) = cste$ $(c \in \mathbb{R})$ et g une fonction de classe C^2 sur U ?

<u>Exemple</u>
$\mathrm{U} = \mathbb{R}^2$ et $g(x, y) = x^2 + y^2$

1ère**méthode** Par substitution.
On exprime une variable par rapport à l'autre (ex : $y = \sqrt{1 - x^2}$) et on résoud $\dfrac{df}{dx} = 0$.
Cette méthode se révèle peu praticable pour les fonctions de plus de 2 variables.

2ème**méthode** On utilise les multiplicateurs de Lagrange. Partons de :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Si dx et dy sont indépendants, alors

$$df = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Mais ici, ce n'est pas le cas puisque dx et dy sont reliés par la relation $g(x, y) = cste$.

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}dx = -\frac{\partial g}{\partial y}dy$$

Donc, en supposant que $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0$, on a :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)} \right) dx$$

On cherche les points (x, y) de la trajectoire autorisée (c'est-à-dire $g(x, y) = cste$) pour lesquels $df = 0$.

$$\begin{aligned} df = 0 \quad &\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)} \right) \\ &\Longrightarrow \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)} = \lambda \quad \text{(en supposant que} = \ \frac{\partial g}{\partial x} \neq 0) \end{aligned}$$

Au point recherché, $\overrightarrow{\nabla f}$ et $\overrightarrow{\nabla g}$ doivent être colinéaires pour que f soit stationnaire sur le chemin défini par g.

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

Ce système donne (x, y) en fonction de λ. En réinjectant $x(\lambda)$ et $y(\lambda)$ dans $g(x, y) = cste$, on trouve les valeurs possibles de λ et les éventuelles solutions du problème.

Remarques

- (2.1) et (2.2) $\Longleftrightarrow$ la fonction $f - \lambda g$ est stationnaire en l'absence de toute contrainte sur (x, y).
- λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

<u>Exemple</u>

$$f(x, y) = xy \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \implies y - 2\lambda x = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \implies x - 2\lambda y = 0 \tag{2.4}$$

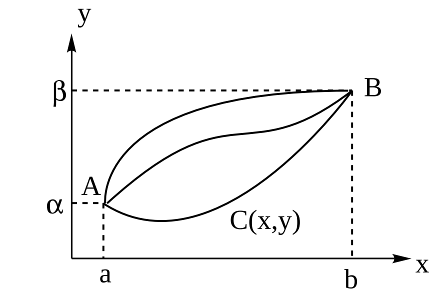
$$(2.3) + (2.4) \Longrightarrow (x+y)(1-2\lambda) = 0$$

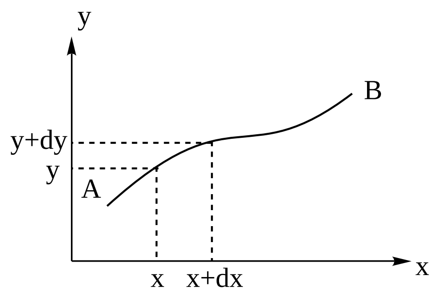
$$(2.3) - (2.4) \Longrightarrow (x-y)(1+2\lambda) = 0$$

- Pour $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$, on a $x = 0$ et $y = 0$: ces solutions ne satisfont pas $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$
- Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = y \Longrightarrow (x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ou$(x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
- Pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, $x = -y \Longrightarrow (x,y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ou$(x,y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

2.2 Equation d'Euler-Lagrange

2.2.1 Introduction





On considère un signal qui se propage dans un milieu inhomogène avec une vitesse C(x,y). Quel est le trajet entre A et B qui rende le temps de parcours minimal ?

Supposons le trajet sous la forme $y = y(x)$, on a $y(x=a) = \alpha$ et $y(x=b) = \beta$.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

Le temps de parcours à minimiser vaut :

$$\int_a^b dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\mathrm{C}(x,y)}$$

2.2.2 Formulation générale du problème

Soit L une fonction de classe C^2 :

$$\begin{array}{llll} L : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u_1, u_2, u_3) & \longmapsto & L(u_1, u_2, u_3) \end{array}$$

Considérons la fonctionnelle I, qui, à toute fonction f ($f : x \longmapsto f(x)$) de l'intervalle borné $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^2, associe le nombre :

$$I[f] = \int_a^b L(f(x), f'(x), x)dx$$

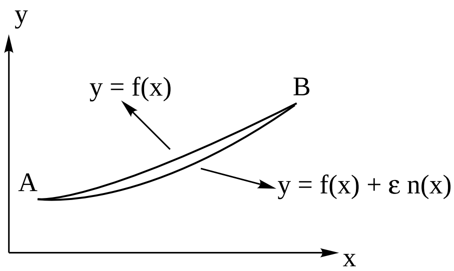
<u>Problème</u> Trouver la fonction qui rende $I(f)$ extrémale tout en satisfaisant :

$$f(a) = \alpha \qquad f(b) = \beta \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Soit f la solution recherchée. On considère la fonction :

$$x \longmapsto f(x) + \varepsilon\eta(x)$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$ petit et $\eta(x)$ arbitraire, C^1 sur $[\,a\,,\,b\,]$, satisfaisant $\eta(a) = 0$ et $\eta(b) = 0$.



La fonctionnelle I sera stationnaire pour f si $I[f] = I[f + \varepsilon\eta]$ à l'ordre 1 en ε.

$$I[f + \varepsilon\eta] - I[f] = o\,(\varepsilon)$$

$$I[f + \varepsilon\eta] = \int_a^b L(f(x) + \varepsilon\eta(x), f'(x) + \varepsilon\eta'(x), x)dx$$

$$L(f(x) + \varepsilon\eta(x), f'(x) + \varepsilon\eta'(x), x) = L + \frac{\partial L}{\partial f}\varepsilon\eta + \frac{\partial L}{\partial f'}\varepsilon\eta' + o\,(\varepsilon)$$

où on utilise les notations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial f} &= \frac{\partial L(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial L}{\partial f'} &= \frac{\partial L(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_2} \end{aligned}$$

avec $u_2 = f'(x) \quad u_1 = f(x) \quad u_3 = x$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}[f+\varepsilon\eta] &= \mathrm{I}[f]+\varepsilon\int_a^b \{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}\eta+\frac{\partial l}{\partial f'}\eta'\}dx+\mathrm{o}\,(\varepsilon)\\
&= \mathrm{I}[f]+\mathrm{o}\,(\varepsilon)\\
\Longrightarrow \int_a^b \{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}\eta+\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\eta'\}dx &= 0
\end{aligned}$$

Par intégation par partie (IPP) :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\eta' dx &= \left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\eta\right]_a^b-\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)\eta dx\\
&= -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)\eta dx \text{ car } \quad \eta(a)=\eta(b)=0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b \eta(x)\{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)\}=0$$

La fonction $\eta(x)$ étant arbitraire, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)=0}$$

C'est l'**équation d'Euler-Lagrange**.

Toute solution de cette équation rend stationnaire la fonctionnelle $\mathrm{I}[f]=\int_a^b \mathrm{L}(f(x),f'(x),x)dx$.

Remarques

- L'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle du second ordre pour f.
- $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}$ est bien une fonction de x uniquement.
  En effet, $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}=\dfrac{\partial \mathrm{L}(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_2}$ avec $u_1=f(x)$, $u_2=f'(x)$, $u_3=x$.

2.2.3 Cas particuliers

(i) L ne dépend pas explicitement de f

$\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f}=0$ donc, d'après l'équation d'Euler-Lagrange, $\boxed{\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}=cste}$ c'est-à-dire ne dépend pas de x.

<u>Exemple</u>

$\mathrm{I}[f]=\int_a^b \sqrt{1+f'^2}dx$

Soit $\mathrm{L}(u_1,u_2,u_3)=\sqrt{1+u_2^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} &= \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_2} = \frac{2u_2}{2\sqrt{1+u_2^2}} \\
&= \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = cste \\
\Longrightarrow f(x) &= \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha
\end{aligned}$$

La trajectoire $f(x)$ est le chemin le plus court entre $\mathrm{A}(a,\alpha)$ et $\mathrm{B}(b,\beta)$.

(ii) L ne dépend pas explicitement de x

$\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3)$ est indépendant de u_3.

$$\frac{d\mathrm{L}}{dx} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} f' + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} f'' + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} (=0)$$

Comme f est solution de l'équation d'E.L, on a :

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)$$

Donc,

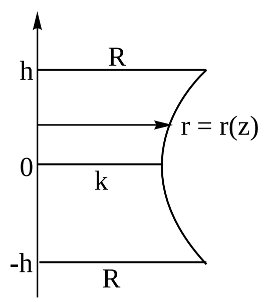
$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{L}}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right) f' + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} f'' \\
&= \frac{d}{dx}\left(f' \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{L} - f' \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} = cste}$$

Il s'agit ici d'une intégrale première.

<u>Exemple</u>

Quelle est la surface d'aire minimale qui relie deux cercles de même rayon parallèles et centrés sur le même axe ?



L'aire latérale de la surface vaut :

$$\mathrm{I}[r] = \int_{-h}^{+h} 2\pi r(z)\sqrt{1+(r'(z))^2}dz$$

Soit

$$\mathrm{L}(u_1, u_2, u_3) = 2\pi u_1\sqrt{1+u_2^2}$$

Cela donne donc d'après le (ii) :

$$\begin{aligned} \mathrm{L} - r'\frac{\partial \mathrm{L}}{r'} &= 2\pi k \\ &= 2\pi r\sqrt{1+r'^2} - 2\pi r'.r\frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} \end{aligned}$$

Au final on obtient l'équation de la surface, qui est une caténoïde :

$$\frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} = k$$

En intégrant,

$$r(z) = k\,\mathrm{ch}\,(\frac{z}{k})$$

on obtient k par la condition au limite $\mathrm{R} = k\,\mathrm{ch}\,(\frac{h}{k})$

Remarques

- Si on pose $\tilde{k} = \frac{h}{k}$ alors $\frac{\mathrm{R}}{h}\frac{1}{\tilde{k}} = \mathrm{ch}\,(\frac{1}{\tilde{k}})$

  On peut donc déterminer numériquement $\tilde{k}$ en fonction de $\frac{\mathrm{R}}{h}$ en traçant les courbes $x \longmapsto \frac{\mathrm{R}}{h}x$ et $x \longmapsto \mathrm{ch}\,(x)$.
- Lorsque cette équation n'admet plus de solution, notamment si $\frac{h}{\mathrm{R}}$ est "trop grand", c'est qu'il y a rupture de la surface.
- La résolution de l'équation d'E.L donne un extremum et pas forcément un minimum.

Exemple

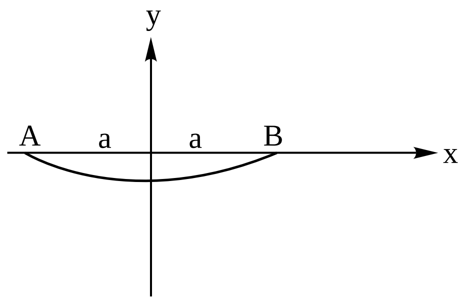
$\mathrm{R} = 1$, $h = \frac{1}{2}$ donne $k = 0.235$ et $k = 0.848$ qui constitue en fait le vrai minimum.

2.2.4 Variations contraintes

Exemple

On attache une corde entre deux points A et B, sa longueur l_0 étant supérieure à $2a$.

L'équation de la corde $y(x)$ est telle que $y(a) = y(-a) = 0$.



En considérant que la corde est non-extensible, on obtient $y(x)$ en minimisant l'énergie potentielle.

$$\mathrm{I}[y] = \int_{-a}^{a} dx(\mu g(\sqrt{1+y'^2})y(x))$$

La longueur de la corde étant fixe, on a une contrainte supplémentaire :

$$l_0 = \int_{-a}^{a} dx\sqrt{1+y'^2}$$

On introduit donc le multiplicateur de Lagrange λ et on doit maintenant rendre stationnaire la fonctionnelle :

$$\int_{-a}^{a} dx(\mu g y(x) - \lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

La fonction $(\mu g y(x) - \lambda)\sqrt{1-y'^2}$ ne dépend pas explicitement de x donc d'après le paragraphe 2.2.3 :

$$(\mu g y(x) - \lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'((\mu g y(x) - \lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = k \;\; (k \in \mathbb{R})$$

D'où :

$$\mu g y(x) - \lambda = k\sqrt{1+y'^2}$$

Donc :

$$y(x) = \frac{k}{\mu g}\,\mathrm{ch}\,(\frac{\mu g}{k}(x+\mathrm{C})) + \frac{\lambda}{\mu g}$$

Cette équation a trois inconnues : k,λ, et C et nous avons trois équations supplémentaires :

- La contrainte l_0
- $y(a) = 0$
- $y(-a) = 0$

Le résultat définitif est donc :

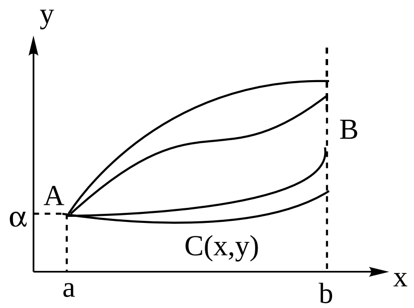
$$y(x) = \frac{k}{\mu g}\{\mathrm{ch}\,(\frac{\mu g x}{k}) - \mathrm{ch}\,(\frac{\mu g a}{k})\}$$

avec

$$\mathrm{sh}\,(\frac{\mu g a}{k}) = \frac{\mu g l_0}{2k}$$

2.2.5 Extrémité libre

On reprend l'exemple de chapitre 2.2.2, mais l'ordonnée du point B n'est plus imposée.



$$\mathrm{I}[f] = \int_a^b \mathrm{L}(f(x), f'(x), x)dx$$

$$f(x=a) = \alpha \quad \text{et} \quad \eta(x=a) = 0$$

On veut encore rendre la fonctionnelle I stationnaire :

$$\mathrm{I}[f+\varepsilon\eta] - \mathrm{I}[f] = \varepsilon \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}(x=b)\eta(x=b) + \varepsilon \int_a^b \eta \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)\right) dx + \mathrm{o}\left(\varepsilon\right)$$

Cette relation doit être vraie pout tout η ; on a donc

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}(x=b) = 0$$

en plus de la relation d'Euler-Lagrange : $\dfrac{d\mathrm{L}}{df} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}\right)$.

<u>Exemple</u>

Pour un milieu homogène, on a $\mathrm{L} = \sqrt{1+f'^2}$. L ne dépend pas de f donc :

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} = cste$$

$\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'}(x=b) = 0$ impose que $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial f'} = 0$ et donc $f' = 0$
La bonne solution est donc logiquement la ligne droite.

2.2.6 Mécanique classique et "principe de moindre action"

Soit un point matériel de massse m se déplaçant sur l'axe des x dans un potentiel $\mathrm{V}(x)$.
Soit x_A, la position de la particule en $t = t_\mathrm{A}$ et x_B, la position de la particule en $t = t_\mathrm{B}$
Quelle va être la trajectoire $x(t)$ de cette particule ?
On considère la fonctionnelle S, l'**Action** qui associe à une trajectoire $x(t)$ le nombre

$$\mathrm{S} = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \mathrm{V}(x)\right)dt$$

La quantité $\mathrm{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \mathrm{V}(x)$ est appelée **Lagrangien**.

La trajectoire effectivement suivie est celle qui minimise l'action. Par l'équation d'Euler-Lagrange on a donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} \\
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} &= -\frac{d\mathrm{V}(x)}{dx}
\end{aligned}$$

On retrouve donc la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\ddot{x} = -\frac{d\mathrm{V}(x)}{dx}$$

Remarques

- L ne dépend pas explicitement du temps donc $\dot{x}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}} - \mathrm{L}$ est indépendant du temps. Cela implique que $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathrm{V}(x)$ est indépendant du temps : c'est la conservation de l'énergie.
- On peut aussi exprimer certains problèmes de mécanique quantique sous forme variationnelle.

Chapitre 3

Equations aux dérivées partielles

3.1 Qu'est-ce qu'une EDP ?

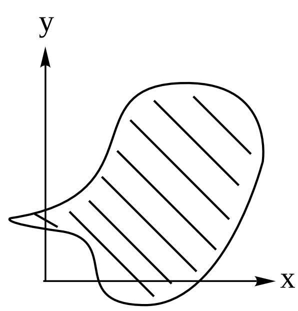
Soit $u = u(x, y, ...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes (on a un nombre fini de variables).

Une EDP pour la fonction u, c'est une relation qui lie :

- les variables indépendantes $(x, y, ...)$.
- la fonction "inconnue" u (variable dépendante).
- un nombre fini de dérivées partielles de u.

$$\Rightarrow \mathrm{F}(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ...) = 0 \tag{3.1}$$

u est solution de l'EDP, si après subsitution, la relation $\mathrm{F}(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, ...) = 0$ est satisfaite pour $x, y, ...$ appartenant à une certaine région Ω de l'espace des variables indépendantes.



Remarque

Sauf mention contraire, on exige que la fonction u et les dérivées partielles intervenant dans l'EDP soient continues sur Ω.

Les EDP interviennent très souvent dans les problèmes physiques : en électromagnétisme (équations de Maxwell), en mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes), en mécanique quantique (équation de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t) + \mathrm{V}(x)\Psi(x,t)$), ...

Exemple

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x,y)$ (équation de diffusion)

  $u_1(x,y) = 2x + y^2$ solution dans tout $\mathbb{R}^2$.

  $u_2(x,y) = e^{-x}\sin(y)$ solution dans $\mathbb{R}^2$.

  $u_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi x}}e^{-\frac{y^2}{4x}}$ solution dans $\Omega \begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

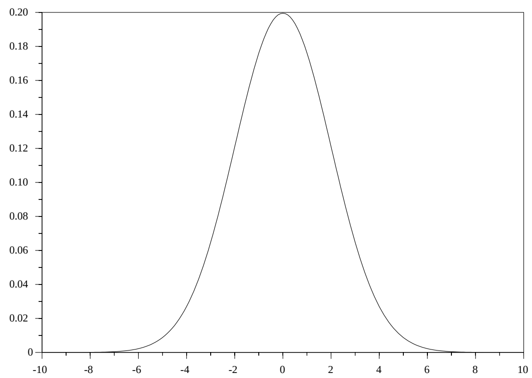


FIG. 3.1: $u_3(x,y)$ avec $x = 2$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u_3(x,y)\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{\sqrt{4\pi x}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4x}}\,\mathrm{d}y \quad \text{on pose} \quad u = \frac{y}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 1
\end{aligned}$$

Remarque

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
\mathrm{I}^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \iint e^{-\left(u^2+v^2\right)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to 0^+} u_3(x,y)$?
$\to$ c'est la distribution de Dirac.

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ où $u = u(x,y)$
  La fonction $u : (x,y) \longrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ est solution dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

<u>*Rq :*</u> Considérons $\left\{\begin{array}{l} r \\ \theta \end{array}\right.$ coordonnées polaires
$\tilde{u}(r,\theta) = u(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}$
On cherche une solution $\tilde{u}$ radiale, c'est-à-dire indépendante de θ.

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}(r) = \alpha \ln(r) + \beta \qquad (\beta \in \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \alpha \ln\left(x^2+y^2\right) + \beta$$

Remarque

Signification du Laplacien.
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x,y)$

Soit $\varepsilon > 0$
$$u(x-\varepsilon,y) = u(x,y) - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

$$u(x+\varepsilon,y)=u(x,y)+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u(x-\varepsilon,y)-2u(x,y)+u(x+\varepsilon,y)}{\varepsilon^2}+\mathrm{O}\left(\varepsilon\right)$$

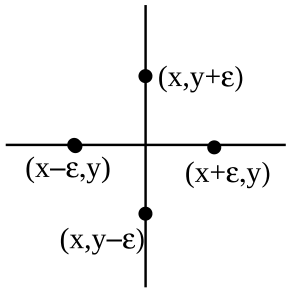
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u(x,y-\varepsilon)-2u(x,y)+u(x,y+\varepsilon)}{\varepsilon^2}+\mathrm{O}\left(\varepsilon\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{u(x-\varepsilon,y)+u(x+\varepsilon,y)+u(x,y-\varepsilon)+u(x,y+\varepsilon)-4u(x,y)}{\varepsilon^2}+\mathrm{O}\left(\varepsilon\right)$$

Si u est solution de $\Delta u=0$, alors :

$$u(x,y)=\frac{1}{4}\Big[u(x-\varepsilon,y)+u(x+\varepsilon,y)+u(x,y-\varepsilon)+u(x,y+\varepsilon)\Big]$$

$\Delta u=0$ signifie que la valeur de u en un point est égale à la valeur moyenne de u sur les quatre plus proches voisins (voir schéma).



- u ne peut pas être extremum en (x,y).
- u est solution de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ dans Ω.
- Plus généralement, sur un ouvert connexe :

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{R}}\int_{\mathrm{C_R}(x_0,y_0)}u(x,y)\mathrm{d}l=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)d\theta$$

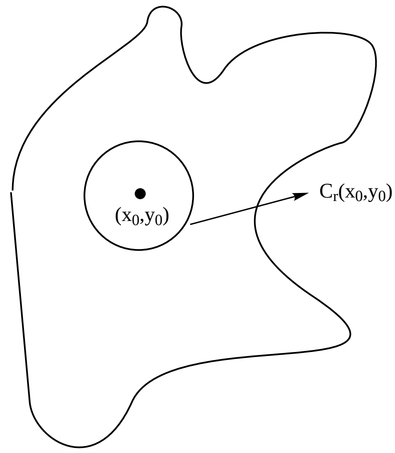
Principe du Maximum

Soit $u(x,y)$, une fonction solution de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ dans un ouvert borné connexe Ω de $\mathbb{R}^2$.

On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω.

On suppose de plus u continue dans $\Omega\cup\partial\Omega$ qui est une région fermée du plan.

Si u n'est pas une fonction constante sur $\Omega\cup\partial\Omega$ alors la valeur maximale de u et la valeur minimale de u sont atteintes uniquement sur $\partial\Omega$.



Remarque

$\Delta u = 0 \Rightarrow ?$

$$u : (x, y, z) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ est solution de } \Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$$

On peut considérer ici l'analogie avec une charge à l'origine.

3.2 Généralités sur les EDP

Définition

On appelle ordre d'une EDP l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé qui intervient dans l'EDP.

Exemple

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad 1^{\text{er}}$ ordre.

Définition

Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "à la puissance 1" dans l'EDP, celle-ci est dite linéaire.

Exemple

$u = u(x, y)$

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad 1^{\text{er}}$ ordre linéaire.
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0 \qquad 1^{\text{er}}$ ordre non-linéaire.
- $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 2^{\text{ème}}$ ordre non-linéaire.

Remarque

$\cos\left(xy^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = \tan\left(x^2+y^2\right)$ 1$^{\text{er}}$ ordre, linéaire, inhomogéne.

• Pour une EDP linéaire homogéne :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \text{ solution} \\ u_2 \text{ solution} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda u_1 + \mu u_2 \text{ est solution.}$$

3.3 EDP linéaires du 1$^{\text{er}}$ ordre

$$\mathrm{A}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{B}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{C}(x,y)u = \mathrm{D}(x,y)$$

est la forme la plus générale pour une EDP $\left\{\begin{array}{l} \text{linéaire} \\ 1^{\text{er}}\text{ordre} \end{array}\right.$

Exemple

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

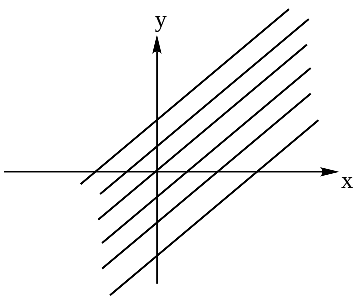
$\mathrm{d}u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \dfrac{\partial u}{\partial y}(\,\mathrm{d}y - \,\mathrm{d}x$

Si $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont reliés par $\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$, alors $\mathrm{d}u = 0$

Sur chacune des courbes de la famille $y - x = \xi \quad (\xi \in \mathbb{R})$, la fonction u est constante. u ne dépend de que ξ.

Donc $\boxed{u(x,y) = f(\xi) = f(x-y)}$ où f est une fonction arbitraire d'une seule variable, de classe $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$

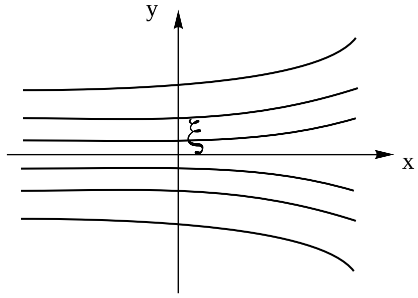
Les droites $y - x = \xi$ sont les caractéristiques de l'EDP considérée.



(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ avec $u = u(x,y)$, est une EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre, linéaire, homogène.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\ &= (-y\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y)\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Si $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}x$ sont reliés par $-y\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$, alors $\underline{\mathrm{d}u = 0}$.
u est constante le long des courbes $y = \xi e^{x}$.



Conclusion

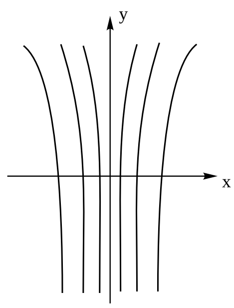
La solution générale de $\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ est de la forme :

$$u(x,y) = f\left(()\, ye^{-x}\right) \text{ où f est } \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$$

(3) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(2u - x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}y\right) + u\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ sont reliés par $\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}y = 0$, alors $\underline{\mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}y}$.

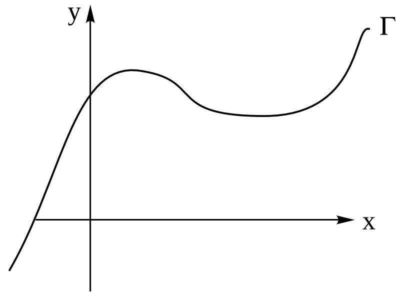


$x = \xi e^{\frac{y}{2}}$. Sur chacune de ces courbes, $u = cste.e^{y}$

Conclusion : La solution générale est de la forme : $\boxed{u(x,y) = e^{y} f\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)}$

Proposition

Si on impose les valeurs de u sur une courbe Γ qui n'est pas une caractéristique de l'EDP, alors on peut identifier la fonction f.

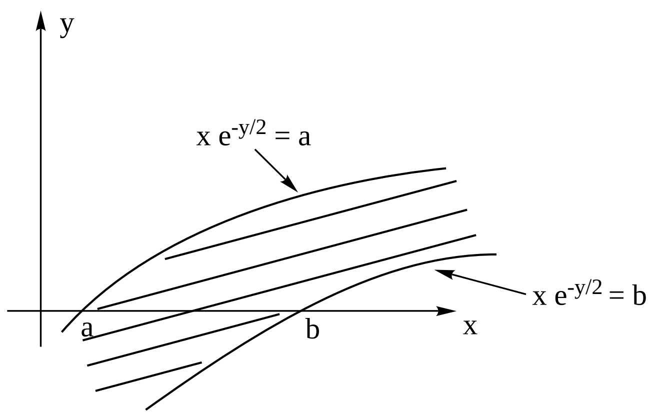


Si on impose : $u(x, y = 0) = \varphi(x)$ (φ est donnée)
alors il vient : $u(x, y = 0) = f(x) = \varphi(x) (\forall x \in \mathbb{R})$
et par suite :
$f \equiv \varphi$ et $u(x, y) = e^y.\varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$
d'où :
$$\boxed{u\left(x, y\right) = e^y.\varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)}$$

Remarque

Si on impose $u(x, y = 0) = \varphi(x)$ uniquement sur $x \in [\,a\,,\,b\,]$ alors :

$\forall x \in$ à la zone hachurée, $u(x, y) = e^y.\varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$ En dehors de la zone hachurée, la solution est de la forme $u(x, y) = e^y f(xe^{\frac{-y}{2}})$ avec f indéterminée (comme on exige u continue, il faut que :
$\lim\limits_{x \to a^-} f\left(x\right) = \varphi\left(a\right)$
$\lim\limits_{x \to b^+} f\left(x\right) = \varphi\left(b\right)$



3.4 Classification des EDP linéaires du 2^{nd} ordre, à coefficients constants

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathrm{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}+\mathrm{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathrm{D}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{F}u+\mathrm{G}=0$$

Les trois premiers termes correspondent à la partie principale. A,B,...,G sont des constantes. Le type de l'EDP dépend du signe de $\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}$.

Classification :

Si $\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}>0$, alors l'EDP est dite hyperbolique.

Si $\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=0$, alors l'EDP est dite parabolique.

Si $\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}<0$, alors l'EDP est dite elliptique.

Exemple

(i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ avec $\mathrm{C}>0$
$\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=4\mathrm{C}^2>0$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t}-d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ avec $d>0$
$\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=0$. Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.

(iii) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
$\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=-4<0$. Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

(iv) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$: Equation de Tricomi.

- $y>0 \Rightarrow$ l'EDP est hyperbolique.
- $y=0 \Rightarrow$ l'EDP est parabolique.
- $y<0 \Rightarrow$ l'EDP est elliptique.

3.5 Conditions aux frontières et problème "bien posé"

Soient $u=u(x,y)$ et une EDP valide dans Ω domaine (ouvert connexe).

Trois types de conditions aux frontières existent :

1. On impose la valeur de u sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Dirichlet.
2. On impose la valeur de $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\left(\overrightarrow{\text{grad}}\ u\right).\overrightarrow{n}$. C'est la condition de Neumann.
3. On impose ces deux conditions sur $\partial\Omega$. C'est la condition de Cauchy.

Remarque

Si l'EDP est valide dans tout l'espace, il n'y a pas de frontière. (On impose alors souvent des conditions à l'infini.)

Problème "bien posé"

Soit une EDP valide dans Ω, munie de conditions aux frontières. Le problème est bien posé si :

1. il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions frontières (existence).
2. la solution doit être unique (unicité).
3. la solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).

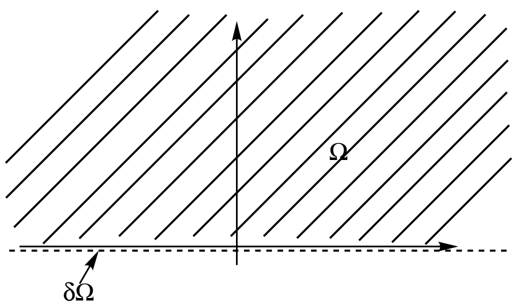
Exemple

Equation de Laplace en deux dimensions :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ avec } \Omega = \{-\infty < x < +\infty ; y > 0\}$$

Conditions aux frontières : (Cauchy)

- $u(x, y = 0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Remarque

Si $f = g = 0 \Rightarrow u \equiv 0$

On consière (i) $\begin{cases} g \equiv 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{n} \cos(nx) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^\star$

Alors $u(x, y) = \dfrac{1}{n} \cos(nx) \operatorname{ch}(ny)$

Lorsque n est grand, la condition $u(x, y = 0) = \dfrac{1}{n} \cos(nx)$ diffère peu de la condition $u(x, y = 0) = 0$.

La solution, elle, diffère beaucoup à cause du cosinus hyperbolique, le problème n'est pas stable et donc il est "mal posé".

Tableau récapitulatif
Pour une EDP du second ordre linéaire à coefficient constants, on a bien un problème bien posé dans les cas suivants (conditions suffisantes) :

Type	Frontière	Conditions
Hyperbolique	ouverte	Cauchy
Parabolique	ouverte	Dirichlet ou Neumann
Elliptique	fermée	Dirichlet ou Neumann

3.6 Equation des ondes

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Solution générale : $\left\{ \begin{array}{l} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{array} \right.$

$\mathrm{U}(\xi,\eta) = u(x,t)$ ainsi $\boxed{\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \xi \partial \eta} = 0}$: forme canonique.

$\Rightarrow \mathrm{U}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ f, g sont des fonctions arbitraires de classe $\mathrm{C}^2(\mathrm{R})$

$$\boxed{u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)}$$

Toute partie principale d'une solution d'une équation hyperbolique peut être mise sous cette forme.

On impose les conditions aux limites :
- $u(x,0) = \phi(x)$, avec ϕ de classe $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$
- $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, avec ψ de classe $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$

Solution de d'Alembert :

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x - ct) + \phi(x + ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds}$$

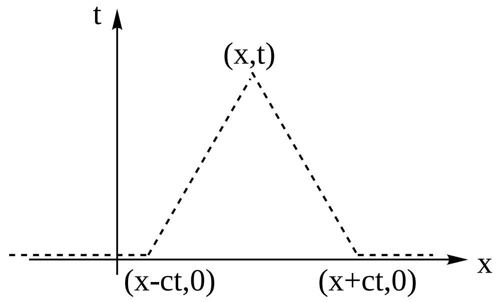
En un point (x,t) avec $t > 0$, la valeur de $u(x,t)$ dépend uniquement des valeurs de ϕ en $x - ct$ et $x + ct$ et des valeurs de ψ dans l'intervalle $[x - ct, x + ct]$. L'intervalle [x-ct,x+ct] est dit être l'intervalle de dépendance du point (x,t).

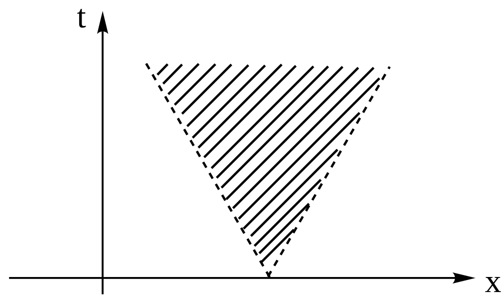
D'un point de vue inverse : les valeurs de u et de $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ en $(x = x_0, t = 0)$ n'influent sur $u(x,t)$ que si (x,t) appartient à la zone hachurée.

3.7 Equation de diffusion

3.7.1 Equation de diffusion sur l'ensemble de la droite $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\mathrm{D} > 0)$$





Condition initiale : $u(x,0) = \phi(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$, ϕ étant continue et bornée.
On va montrer que la solution est :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D} t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mathrm{D}t}} \, \mathrm{d}y$$

Proposition

$$u(x,t) \textit{ ci-dessus est } \mathrm{C}^\infty \textit{ sur } \{-\infty < x < +\infty, t > 0\}$$

On définit :

$$\mathrm{G}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D} t}} e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}} \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0$$

G est la solution fondamentale ou "fonction de Green" pour l'équation de Diffusion.
On a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(x,t) \, \mathrm{d}x = 1$, pour t>0.

On peut alors écrire :

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \mathrm{G}(x-y,t) \, \mathrm{d}y}$$

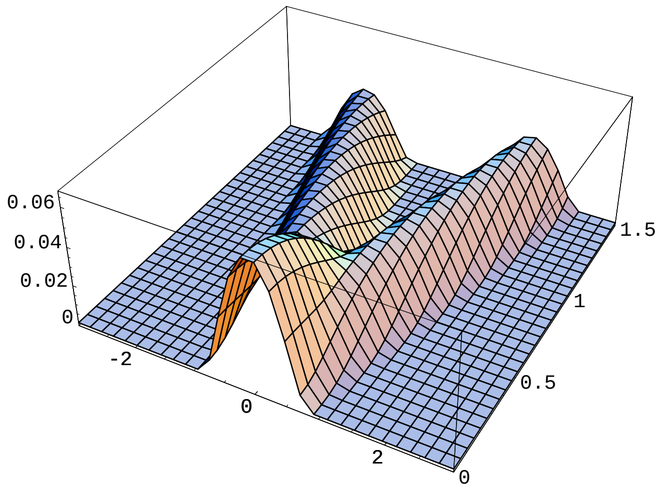


FIG. 3.2: Solution de d'Alembert à l'équation des ondes (x en horizontal, ct en profondeur) dans le cas où $\phi = \exp(\frac{-1}{1-x^2})$ si $|x| < 1$ et 0 sinon

Remarques

- Il s'agit d'un produit de convolution.

- La "vraie" fonction de Green est :

$$g(x,t) = \mathrm{H}(t)\frac{e^{\frac{-x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \quad \text{définie sur } \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R}^*$$

 (g se réduit à G sur $\mathbb{R}$ x $\mathbb{R}^{+*}$).

Démonstration

On utilise la transformée de Fourier :

$$\hat{u}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

En prenant la transformée de Fourier,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \implies \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \mathrm{D}(ik)^2\hat{u} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\mathrm{D}k^2\hat{u} \implies \hat{u}(k,t) = \hat{u}(k,0)e^{-\mathrm{D}k^2 t}$$

Or, en notant $\hat{\phi}$ la transformée de Fourier de ϕ, $\hat{u}(k,0) = \hat{\phi}(k)$ donc $\hat{u}(k,t) = \hat{\phi}(k)e^{-\mathrm{D}k^2 t}$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}(k)e^{-\mathrm{D}k^2 t}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \phi(y)\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{D}t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mathrm{D}t}}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

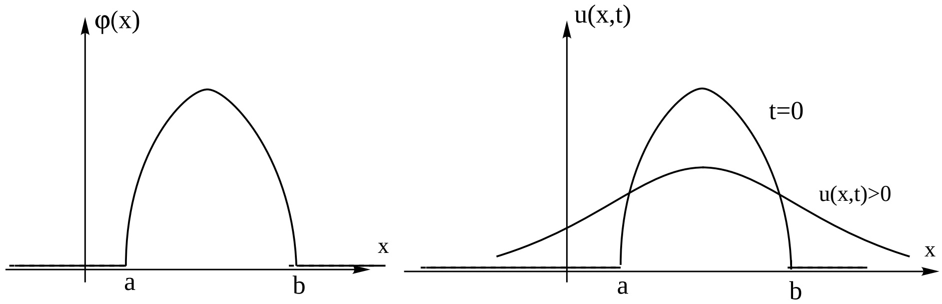
Rappel

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\mathrm{D}k^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{D}t}}e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}$$

Remarques

- Cette démonstration par la TF suppose que $\phi \in \mathcal{L}^1$, mais le résultat reste vrai si ϕ n'est que continue et bornée.

- Si $\phi(x)$ est continue par morceaux et bornée alors la fonction $u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi\mathrm{D}t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mathrm{D}t}}\mathrm{d}y$ est solution de l'équation : $\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.
 Mais quand $t \to 0^+$, la fonction $u(x,t) \to \frac{1}{2}(\phi(x^-) + \phi(x^+))$, quand x est un point de discontinuité de ϕ.
 $u(x,t)$ reste C^∞ sur $\{-\infty < x < +\infty, t > 0\}$.



– Si $\phi(x) = \begin{cases} > 0 \text{ sur } [a,b] \\ 0 \text{ en dehors de } [a,b] \end{cases}$ alors $u(x,t) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $(t > 0)$
Cela correspond à une "vitesse de propagation infinie".

Cas particulier :
$\phi(x) = \begin{cases} 1 \ si \ |x| < 1 \\ 0 \ si \ |x| > 1 \end{cases}$
On a alors (pour tout $t > 0$)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{erf\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) - erf\left(\frac{-(1-x)}{2\sqrt{t}}\right)\right\}$$

(voir figure 3.3) où $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta$ est la fonction erreur.

Remarque :

$$\lim_{t \to 0+} u(x=1,t) = \frac{1}{2} \qquad \lim_{t \to 0+} u(x=-1,t) = \frac{1}{2}$$

3.7.2 Equation de diffusion avec un terme source

On cherche à résoudre le problème de diffusion en incluant un terme source $f(x,t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, f \text{ continue} \\ u(x,0) = \phi(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par linéarité, on peut séparer la problème en deux :

Problème A $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Problème B $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \ \ , f \text{ continue} \\ u(x,0) = 0 \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Problème A : $u(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\mathrm{G}(x-y,t)\,\mathrm{d}y$

Untitled-4 1

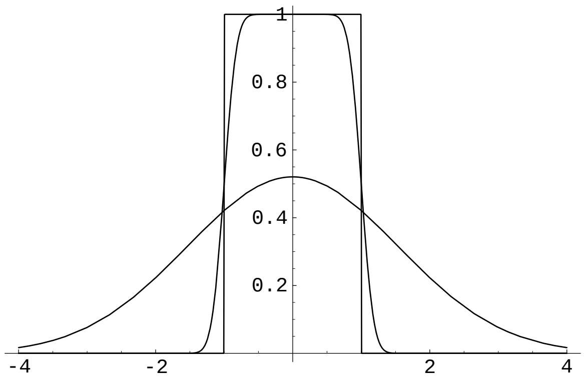


FIG. 3.3: Solution de l'équation de diffusion à $t = 0, 0.01$ et 1 dans le cas $\phi(x) = 1$ *si* $|x| < 1$ *et* 0 *si* $|x| > 1$

Problème B : On remplace le terme source par une condition initiale.
$v(x,t)$ est solution de l'équation de diffusion.

Problème B' $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \ x \in \mathbb{R}, t > \tau \\ v(x, t = \tau) = f(x, t = \tau) \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Soit $v(x,t;\tau)$ la solution du problème B'.

$$v(x,t;\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(x-y, t-\tau) f(y,\tau)\, \mathrm{d}y$$

Proposition

(Principe de Duhamel)

La fonction u définie par $u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau) d\tau$ *est solution du problème B.*

Solution du problème initial

$$\boxed{u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) \mathrm{G}(x-y,t)\, \mathrm{d}y + \int_0^t \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(x-y, t-\tau) f(y,\tau)\, \mathrm{d}y \Big) d\tau}$$

3.7.3 Solution élémentaire (fonction de Green) de l'opérateur de diffusion

Distribution dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

On appelle $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et à support borné.

Exemple
(n=3)

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow \zeta(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1-r^2}\right) \text{ si } r < 1 \\ 0 \text{ si } r \geqslant 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

Définition

On appelle distribution de $\mathbb{R}^n$ un élément de l'ensemble des fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Exemple
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, localement sommable. On peut lui associer une distribution régulière T_f telle que :

$$\langle \mathrm{T}_f, \varphi \rangle = \int f(x_1, ..., x_n) \varphi(x_1, ..., x_n) d\mu(x_1) ... d\mu(x_n) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Distribution de Dirac :
$\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$
$\varphi(x_1, ..., x_n) \longmapsto \varphi(0, ..., 0)$

Dérivées partielles dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *(l'ensemble des distributions sur* $\mathbb{R}^n$*). Alors,*

$$\langle \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle \mathrm{T}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

C'est la dérivée partielle de la distribution.

Remarques

- Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathrm{T} * \delta = \mathrm{T}$

- Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\mathrm{T} * \mathrm{S}$ existe. Alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{T} * \mathrm{S}) = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i} * \mathrm{S} = \mathrm{T} * \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_i}$$

Définition

Soit L *un opérateur différentiel linéaire, d'ordre* n $(n \in \mathbb{N})$*, à coefficients constants. Une distribution* E *de* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *satisfaisant à :*

$$\mathrm{LE} = \delta$$

est dite solution fondamentale de l'opérateur L.

Remarque
Si E est une solution fondamentale de L et si $\mathrm{E}_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est tel que $\mathrm{LE}_0 = 0$, alors $\mathrm{E} + \mathrm{E}_0$ est aussi solution fondamentale pour L.

Proposition

Tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$*).*

Proposition

Soit L *un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre* n*. Soit* E *une solution fondamentale de* L $(\mathrm{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)/\mathrm{LE} = \delta)$*. Soit* $\mathrm{F} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\mathrm{E} * \mathrm{F}$ *existe dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *alors la distribution* $\mathrm{U} = \mathrm{E} * \mathrm{F}$ *est solution de* $\mathrm{LU} = \mathrm{F}$.

3.7.4 Solution fondamentale de l'opérateur de diffusion

$$\mathrm{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$$

Considérons la fonction :

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{H}(t)}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} e^{\frac{-x^2}{4\mathrm{D}t}} \end{array}$$

H(t) est la fonction de Heavyside.

La fonction $g(x,t)$ étant localement sommable sur $\mathbb{R}^2$, on peut lui asssocier une distribution régulière notée T_g.

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{T}_g, \varphi\rangle &= \iint g(x,t)\varphi(x,t)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(t) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ &= \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{t\in[0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Calculons $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathrm{T}_g$:

$$\begin{aligned} \langle \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathrm{T}_g, \varphi\rangle &= -\langle \mathrm{T}_g, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\rangle \\ &= -\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{t\in[0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x\in\mathbb{R}}\int_{t\in[0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{I}_\varepsilon \end{aligned}$$

Par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{16\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{t\in[0,+\infty[}\left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

De même,

$$\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{t\in[0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{J}_\varepsilon$$

Après deux intégrations par parties (variable x),

$$\mathrm{J}_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{16\pi}}\int_{x\in\mathbb{R}}\int_{t\in[0,+\infty[}\left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}t}}\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{I}_\varepsilon + \mathrm{J}_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\langle\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathrm{T}_g,\varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{I}_\varepsilon+\mathrm{J}_\varepsilon \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} -\frac{e^{-\frac{x^2}{4\mathrm{D}\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\mathrm{D}\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x \quad \text{on pose } y^2=\frac{x^2}{4\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\frac{\varphi(2\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}y \\
&= \varphi(0,0)
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathrm{T}_g=\delta} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

où δ est la distribution de Dirac : $<\delta,\varphi>=\varphi(0,0)$, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$
T_g est donc une solution élémentaire de l'opérateur de diffusion.

Remarque
Soit $\mathrm{F}\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ dont le produit de convolution avec T_g existe, alors $\mathrm{F}*\mathrm{T}_g$ satisfait $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{F}*\mathrm{T}_g=\mathrm{F}$.

Cas particulier :
F est une distribution régulière, notée T_f, associée à une fonction f de $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}$ localement sommable.

$$\mathrm{F}*\mathrm{T}_g=\mathrm{T}_f*\mathrm{T}_g=\mathrm{T}_{f*g}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathrm{T}_{f*g}=\mathrm{T}_f$$

On peut alors dire que :

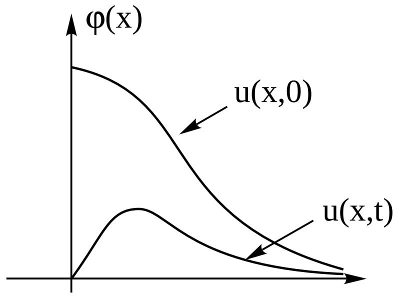
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(f*g)(x,t)=f(x,t)\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

3.7.5 Equation de diffusion sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad \text{avec } x\in\mathbb{R}^{+*},\quad t\in\mathbb{R}^{+*}$$

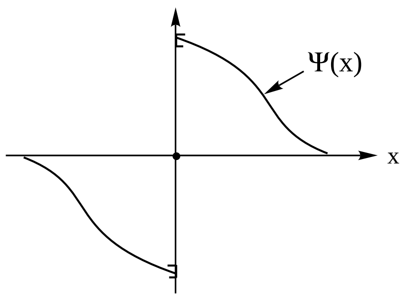
On impose $u(x=0,t)=0$, quand $t>0$. La condition initiale est : $u(x,0)=\phi(x)$, $x>0$
On définit :

$$\psi(x)\begin{cases}\phi(x) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -\phi(-x) & \text{si } x<0\end{cases}$$

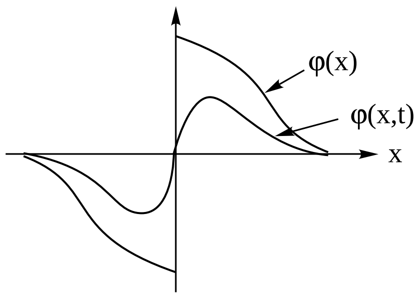


Remarque

$\psi(0) = \frac{1}{2}[\psi(0^+) + \psi(0^-)] = 0$



$v(x,t)$ est solution de $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x,0) = \psi(x) \ , \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$



$$\begin{cases} v(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y,t)\psi(y)\,\mathrm{d}y \\ v(x=0,t>0) = 0 \end{cases}$$

$\lim_{t\to 0^+} v(x,t) = \psi(x)$

La restriction de $v(x,t)$ à $x > 0$ est bien la fonction $u(x,t)$ recherchée.

Pour t>0, x>0 :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y,t)\psi(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} (g(x-y,t) - g(x+y,t))\phi(y)\,\mathrm{d}y$$

Donc,

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathrm{D}t}} \int_0^{+\infty} (e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mathrm{D}t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4\mathrm{D}t}})\phi(y)\,\mathrm{d}y}$$

Cas particulier

$\phi(x) = 1$ pour $x > 0$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}} e^{-r^2} dr \\ &= \mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}) \end{aligned}$$

où $\mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-r^2} dr$ est la fonction erreur.

3.8 Equation de diffusion sur un domaine spatial borné

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < l,\ t > 0$$

- $u(x = 0, t) = 0,\ t > 0$
- $u(x = l, t) = 0,\ t > 0$
- $u(x, 0) = \varphi(x)$ pour $0 < x < l$

On utilise la méthode de séparation des variables en posant $u(x,t) = f(x)g(t)$.
L'équation de diffusion devient donc :

$$f(x)g'(t) - \mathrm{D}f''(x)y(t) = 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{D}}\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = cste = -\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Soit $\begin{cases} g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \\ f''(x) = -\lambda f(x) \end{cases}$

On se ramène donc à des équations différentielles ordinaires.
$x = 0 \Longrightarrow f(0)g(t) = 0$
$x = l \Longrightarrow f(l)g(t) = 0$
On ne retient que la solution $f(0) = f(l) = 0$, en rejetant la solution $g(t) = 0$.

Fonction f(x)

La fonction f est solution du problème $\begin{cases} f''(x) = -\lambda f(x) \\ f(x = 0) = 0 \;\; f(x = l) = 0 \end{cases}$

Il s'agit d'un cas particulier d'un problème plus général : le problème de *Sturm-Liouville*. Les valeurs de λ pour lesquelles il existe une solution non nulle sont dites valeurs propres. Les fonctions f associées sont dites fonctions propres.

Erf.nb 1

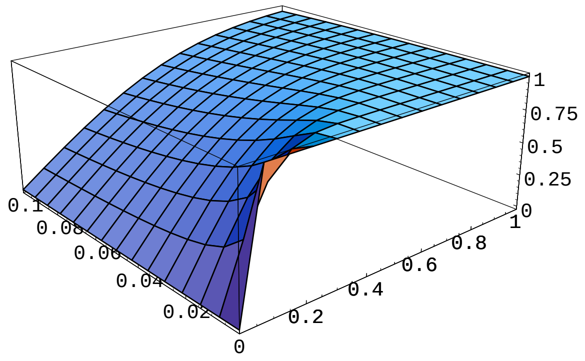


FIG. 3.4: Fonction erf $\left(\frac{x}{\sqrt{4\mathrm{D}t}}\right)$ en fonction de x et Dt

- Si $\lambda = 0$: $f(x) = ax + b$
  $f(0) = f(l) = 0 \Longrightarrow a = b = 0$
  $\lambda = 0$ n'est donc pas valeur propre.
- Si $\lambda < 0$: $\lambda = -k^2$
  $f(x) = ae^{kx} + be^{-kx}$
  $f(0) = f(l) = 0 \Longrightarrow a = b = 0$
  $\lambda < 0$ n'est donc pas valeur propre.
- Si $\lambda > 0$: $\lambda = +k^2$
  $f(x) = a\cos kx + b\sin kx$
  $f(0) = f(l) = 0 \Longrightarrow a = 0$ et $b\sin kl = 0$ donc $k = k_n = \dfrac{n\pi}{l}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$
  On a donc $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
  Les fonctions propres sont donc $\boxed{f = f_n = b\sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction g(t)

$g'(t) = -\mathrm{D}\lambda g(t) \Longrightarrow g(t) = cste * e^{-\lambda \mathrm{D}t}$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g(t) = g_n(t) = c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t}$

Solution générale

$$\boxed{u = u_n(x,t) = c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Afin de déterminer les c_n, on utilise la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$.
Comme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Il vient,

$$u(x,t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \varphi(x)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left(\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \delta_{n,m} \\
&= \frac{l}{2}c_m
\end{aligned}$$

Donc $c_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$: il s'agit des coefficients de Fourier de φ.
La solution recherchée est donc :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x\right]e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathrm{D}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}$$

Conditions suffisantes

Si,

- φ est continue sur $[0,l]$
- φ' est continue par morceaux sur $[0,l]$
- $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

Alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)$ converge uniformément et absolument vers $\varphi(x)$ sur $[0,l]$.

Unicité

On multiplie les 2 membres l'équation de diffusion par u.

$u\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u^2}{\partial t} = \mathrm{D}u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{D}\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{D}\Bigg[\underbrace{[u\frac{\partial u}{\partial x}]_0^l}_{=0} - \int_0^l (\frac{\partial u}{\partial x})^2\,\mathrm{d}x\Bigg] = -\mathrm{D}\int_0^l (\frac{\partial u}{\partial x})^2\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Donc on a une fonction décroissante :

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,0)\,\mathrm{d}x$$

Soient $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ deux solutions du problème. Soit $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ alors v est solution de : $\dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ pour $0 < x < l,\ t > 0$

- $v(x=0,t) = 0,\ t > 0$
- $v(x=l,t) = 0,\ t > 0$
- $v(x,0) = 0$ pour $0 < x < l$

Or on a : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l v^2(x,t)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{2}\int_0^l v^2(x,0)\,\mathrm{d}x = 0$

Donc : $v = 0$ et $u_1 = u_2$.

<u>Exemples</u>

(a) $\varphi(x) = x(\pi - x)$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, avec $0 < x < \pi$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,pour $t > 0$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(x-\pi)\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) = 4\frac{1-(-1)^n}{n^3\pi}$$

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{\sin((2m-1)x)}{(2m-1)^3}e^{-(2m-1)^2\mathrm{D}t}$$

(b) $\varphi(x) = x$

Remarque

$\varphi(x) \neq 0$ pour $x = \pi$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{-2}{n}(-1)^n$$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n}(-1)^n\right)\sin(nx)e^{-n^2\mathrm{D}t}$

Remarque

Retour sur la diffusion sur tout $\mathbb{R}$.

$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x\in\mathbb{R},\ t>0 u(x,0) = \varphi(x) \quad x\in\mathbb{R}\end{cases}$

Ici pas de CL donc pas de restrictions sur k.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\Big(a(k)\cos(kx) + b(k)\sin(kx)\Big)e^{-k^2\mathrm{D}t}$$

or $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dk\Big(a(k)\cos(kx) + b(k)\sin(kx)\Big)$

et $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dke^{ikx}\hat{\varphi}(k)$ d'où $\begin{cases} a(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{\varphi}(k) \\ b(k) = \dfrac{i}{\sqrt{2\pi}}\hat{\varphi}(k)\end{cases}$

$u(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dk\frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}e^{-k^2\mathrm{D}t} = \frac{1}{2\pi}\int d\xi\varphi(\xi)\int\int dke^{ikx}e^{-ik\xi}e^{-k^2\mathrm{D}t}$

or $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dke^{-ik(\xi-x)}e^{-k^2\mathrm{D}t} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{D}t}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4\mathrm{D}t}}$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\varphi(\xi)\frac{1}{\sqrt{4\pi\mathrm{D}t}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4\mathrm{D}t}} \quad t>0$$

3.9 Solution fondamentale de l'opérateur de Helmholtz dans $\mathbb{R}^2$

$$\Delta + k^2 \quad (k \in \mathbb{R}^*)$$

Soit : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$(\Delta + k^2)f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\right) f(x_1, x_2, x_3) + k^2 f(x_1, x_2, x_3)$$

On cherche E tel que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$: $(\Delta + k^2)\mathrm{E} = \delta$

<u>Rappel :</u> $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0,0,0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

Remarque

$f = f(x)$ fonction radiale

$(\Delta + k^2)f = 0$

$\Delta f = f''(r) + \dfrac{2}{r} f'(r) + k^2 f(r) = 0$

On pose $g(r) = rf(r)$ donc g est solution de $g''(r) + k^2 g(r) = 0$.

Après calculs, on obtient : $f(r) = \mathrm{C}_1 \dfrac{\cos kr}{r} + \mathrm{C}_2 \dfrac{\sin kr}{r}$ avec $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \in \mathcal{C}$

Attention : $\dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{\cos kr}{r}$ sont localement intégrables dans $\mathbb{R}^3$.

$$\langle \mathrm{C}_1 \frac{\cos kr}{r} + \mathrm{C}_2 \frac{\sin kr}{r}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} dx_1 dx_2 dx_3 \left(\mathrm{C}_1 \frac{\cos kr}{r} + \mathrm{C}_2 \frac{\sin kr}{r}\right) \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

1) $(\Delta + k^2) \dfrac{\sin kr}{r}$

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta + k^2) \frac{\sin kr}{r}, \varphi \rangle &= \langle \frac{\sin kr}{r}, (\Delta + k^2)\varphi \rangle \\
&= \int d^3x \frac{\sin kr}{r} (\Delta + k^2) \varphi(x_1, x_2, x_3) \\
&= \int \left((\Delta + k^2) \frac{\sin kr}{r} \right) \varphi(x_1, x_2, x_3) d^3x \\
&= 0
\end{aligned}$$

en effectuant des intégrations par parties et car $(\Delta + k^2)\dfrac{\sin kr}{r} = 0$ dans tout $\mathbb{R}^3$.

$$\longrightarrow (\Delta + k^2) \frac{\sin kr}{r} = \mathbb{O} \quad \text{avec} \quad \mathbb{O} \quad \text{la distribution nulle}$$

2) $(\Delta + k^2)\dfrac{\cos kr}{r}$

$$\begin{aligned}\langle(\Delta + k^2)\frac{\cos kr}{r}, \varphi\rangle &= \langle\frac{\cos kr}{r}, (\Delta + k^2)\varphi\rangle \\ &= \int d^3x \frac{\sin kr}{r}(\Delta + k^2)\varphi(x_1, x_2, x_3) \\ &\neq \int \left((\Delta + k^2)\frac{\sin kr}{r}\right)\varphi(x_1, x_2, x_3) d^3x\end{aligned}$$

L'intégration par parties ne marche pas car les dérivées partielles secondes de $\dfrac{\cos kr}{r}$ ne sont pas localement sommables.

$$\begin{aligned}\int d^3x \frac{\cos kr}{r}(\Delta + k^2)\varphi(x_1, x_2, x_3) &= \lim_{\varepsilon \to 0,\ r > \varepsilon} \int dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\cos kr}{r}(\Delta + k^2)\varphi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{I}_\varepsilon\end{aligned}$$

$$\mathrm{I}_\varepsilon = \int_{r>\varepsilon} d^3x \frac{\cos kr}{r}(\Delta + k^2)\varphi(x_1, x_2, x_3)$$

Rappel :

$$\int_{r>\varepsilon} d^3x \frac{\cos kr}{r}\Delta\varphi = \int_{r>\varepsilon} d^3x \Delta\left(\frac{\cos kr}{r}\right)\varphi + \int_{r=\varepsilon}\left(\frac{-\cos kr}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varphi\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\cos kr}{r})\right) d\sigma_\varepsilon$$

avec $d\sigma_\varepsilon = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi$.

Pour obtenir cette égalité, on a utilisé le théorème de Green.

$$\mathrm{I}_\varepsilon = \int_{r=\varepsilon}\left(\frac{-\cos kr}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)\right) d\sigma_\varepsilon$$

Soit $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) = -k\frac{\sin kr}{r} - \frac{\cos kr}{r}$$

$$\mathrm{I}_\varepsilon = -\varepsilon\cos k\varepsilon \int \frac{\partial\varphi}{\partial r} d\omega - k\varepsilon \sin k\varepsilon \int \varphi d\omega - \cos k\varepsilon \int \varphi d\omega$$

$\lim_{\varepsilon\to 0} = 0 + 0 + (-4\pi\varphi(0))$

$$(\Delta + k^2)\frac{\cos kr}{r} = -4\pi\delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

La solution fondamentale est donc : $\dfrac{-\cos kr}{4\pi r}$

Remarques :

– $(\Delta + k^2)\dfrac{-e^{\pm ikx}}{4\pi r} = \delta$

- $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta$
- $\Delta\left(\frac{-1}{4\pi r}\right) = \delta$

3.10 Espace fonctionnel

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$
$\mathrm{L}^2(a, b)$ est l'ensemble des fonctions de carré sommable sur $[a, b]$.

$$\int_{[a,b]} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty$$

Remarque

- Pour la construction de $\mathrm{L}^2(a, b)$, deux fonctions égales presque partout sur $[a; b]$ sont considérées comme identiques.
- $\mathrm{L}^2(a, b)$ est un espace vectoriel de dimension ∞.

On peut munir $\mathrm{L}^2(a, b)$ de la norme suivante :

$$||f||_{\mathrm{L}^2(a,b)} = (\int_{[a,b]} |f(x)|^2 d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$$

Proposition

L'espace $\mathrm{L}^2(a, b)$ muni de la norme ci-dessus est un espace de Banach (Toute suite de Cauchy converge vers un élément de cet espace vectoriel). L'espace vectoriel $\mathrm{L}^2(a, b)$ normé est complet.

La norme ci-dessus dérive du produit scalaire :

$$(f, g)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = \int_{[a,b]} f(x)\bar{g}(x) d\mu(x)$$

Proposition

$\mathrm{L}^2(a, b)$ *est un espace de Hilbert.*

Définition

Soit $f_1, f_2, .. \in \mathrm{L}^2(a, b)$ On dit que cette suite de fonctions converge en moyenne quadratique vers un élément $f \in \mathrm{L}^2(a, b)$ si :

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$$

Proposition

Soit $\phi_1, \phi_2, ... \in \mathrm{L}^2(a,b)$ tel que :

1. $(\phi_n, \phi_m)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$ *si* $n \neq m$.
2. *La seule fonction* $g \in \mathrm{L}^2(a,b)$ *telle que* $(g, \phi_n)_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$ $\forall n = 1, 2, ...$ *est la fonction nulle.*

Alors l'ensemble $\phi_1, \phi_2, ...$ forme une base orthogonale de $\mathrm{L}^2(a,b)$.

Exemple

Les fonctions $\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right)$, ... forment une base orthogonale de $\mathrm{L}^2(0,l)$.

Proposition

$f \in \mathrm{L}^2(a,b)$, soit $\phi_1, \phi_2, ...$ une base orthogonale de $\mathrm{L}^2(a,b)$. Les coefficients de fourier de f sont :

$$\mathrm{C}_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}$$

On montre que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{C}_n(f)\phi_n$ converge en moyenne quadratique vers f :

$$\lim_{p \to +\infty} \left|\left| \sum_{n=1}^{p} \mathrm{C}_n(f)\phi_n - f \right|\right|_{\mathrm{L}^2(a,b)} = 0$$

Remarque

La proposition ne dit pas que la somme converge simplement vers la fonction f, il se peut que :

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \mathrm{C}_n(f)\phi_n(x) \right) \neq f(x)$$