

11°) Statistique de Bose Einstein

Elle joue un rôle vital en physique du rayonnement, et des vibrations en physique du solide, car les excitations de ces problèmes sont des quantas indiscernables, que l'on peut mettre en nombre arbitraires dans un **mode** donné \mathbf{k}, α . Ces quantas ont toutes les propriétés des bosons, mis à part le fait que leur nombre ne se conserve pas.

Nous allons traiter ce problème rapidement, sans faire explicitement appel à cette notion de Bosons, mais il ne faudra pas s'étonner de l'analogie avec la distributions de Bose-Einstein.

a) Rayonnement du corps Noir

1) Dénombrement des modes

• Nous considérons une cavité **fermée** parallélépipédique $L_x \times L_y \times L_z$, (dont les parois sont réfléchissantes).

• En électromagnétisme classique, avec des conditions aux bords périodiques, le champ électromagnétique se décompose en ondes planes \mathbf{k} avec la polarisation α (p/ex circulaire droit et circulaire gauche), de fréquence $\omega_{\mathbf{k}, \alpha} = c|\mathbf{k}|$

• Nous faisons l'hypothèse (justifiée par ailleurs) que le problème quantique à pour états propres du champ E-M, les $|\{n_{\mathbf{k}, \alpha}\}\rangle$, d'énergie $E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar \omega_{\mathbf{k}, \alpha} (n_{\mathbf{k}, \alpha} + 1/2)$

Dans la suite nous soustrayons la contribution de l'état fondamental (qui est d'ailleurs infinie!)

• Les **modes** autorisés sont $g=2$ polarisation par vecteur d'onde \mathbf{k} , et un \mathbf{k} pour $\frac{(2\pi)^3}{V}$ dans l'espace des \mathbf{k} .

2) Fonction de partition, Energie libre

• Elle vaut évidemment :

$$Z_{EM} = \prod_{\mathbf{k}, \alpha} z_{\mathbf{k}, \alpha}$$

$$\text{Avec } z_{\mathbf{k}, \alpha} = \sum_{n_{\mathbf{k}, \alpha}} \exp(-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}, \alpha} n_{\mathbf{k}, \alpha}) = \frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}, \alpha})}$$

• On en a déjà déduit:

$$\text{i) } n = \langle n_{\mathbf{k}, \alpha} \rangle = \frac{1}{\exp(\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}, \alpha}) - 1}$$

$$\text{ii) } e_{\mathbf{k}, \alpha} = \hbar \omega_{\mathbf{k}, \alpha} n$$

$$\text{iii) } s_{\mathbf{k}, \alpha} / k_B = (n+1) \log(1+n) - n \log n$$
$$f_{\mathbf{k}, \alpha} = -k_B T \log(1+n)$$

• Ces résultats conduisent à l'énergie libre F du champ :

$$F = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} f_{\mathbf{k}, \alpha}$$

3) Dispersion linéaire

Jusqu'ici le calcul est valable y compris pour les vibrations d'un réseau harmonique.

Nous allons maintenant spécifier que $\omega_{\mathbf{k}, \alpha} = c|\mathbf{k}|$ pour les **deux** polarisations, et prendre v et Ω (direction de \mathbf{k}) comme variables.

$$\sum_{\mathbf{k}, \alpha} = 2 \frac{V}{c^3} \int v^2 dv d^2\Omega$$

• Cette expression donne la **densité** d'énergie rayonnante par unité de fréquence et d'angle solide (et de volume!)

$$2 \frac{1}{c^3} v^2 h\nu \frac{1}{\exp(\beta h\nu) - 1}$$

• Si on prend $x = \beta h\nu$ comme variable :

$$\sum_{\mathbf{k}, \alpha} = v 2 \left\{ \frac{k_B T}{hc} \right\}^3 \int x^2 dx d^2\Omega$$

Soit en définissant $\lambda = hc/k_B T = 1.47 \text{ cm}/T(\text{K})$, la longueur d'onde typique à la température T

$$\sum_{\mathbf{k}, \alpha} = 2 \frac{V}{\lambda^3} \int x^2 dx d^2\Omega$$

(Réfléchir longuement sur les dimensions de ce résultat)

$$F = 2 k_B T \frac{V}{\lambda^3} 4\pi \int_0^{+\infty} x^2 dx \text{Log}(1 - \exp(-x))$$

L'intégrale se transforme par parties en :

$$[x^3/3 \text{Log}(1 - \exp(-x))] - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = -\frac{1}{3} \frac{\pi^4}{15}$$

$$F = -2 k_B T \frac{V}{\lambda^3} 4\pi \frac{1}{3} \frac{\pi^4}{15}$$

Cette grandeur est au total en T^4 .

• On en déduit : $S = -\partial F / \partial T = -4F/T$, $E = F + TS = -3F$, soit

$$E = +2 k_B T \frac{V}{\lambda^3} 4\pi \frac{\pi^4}{15}$$

Que l'on aurait trouvé plus directement en écrivant :

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} nh\nu = 2 k_B T \frac{V}{\lambda^3} \int d^2\Omega \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1}$$

• On en déduit aussi la pression de radiation :

$$P = -\partial F / \partial V \Big|_T = -F/V = E/3V$$

·A.N:

$$2 \frac{k_B T}{\lambda^3} 4\pi \frac{\pi^4}{15} = 7.5e-16 T^4 \text{ Pa (=J/m}^3\text{) pour T en K.}$$

4) Puissance rayonnée

Ces quantités (E/V, P) sont très petites, c'est dû au fait que c est très grand pour la lumière.

La situation est très différente lorsque on évalue la puissance rayonnée par unité de surface, ce qui revient à peu près à évaluer cE/V (W/m²)

·On considère que l'énergie nhv est équirépartie dans V et ce déplace à c // à **k**

·Durant dt, le cylindre de base S, de hauteur k_z/k cdt traverse le trou, et transmet:

$$dE = \frac{nhv}{V} S k_z / k c dt$$

Soit la puissance : $Q = S/V \sum_{\mathbf{k}, \alpha} c n h v k_z / k$

·Dans une direction fixe k_z/k, la puissance rayonnée par angle solide est proportionnelle à S cosθ, c'est à dire la surface apparente du trou.

·La dépendance en fréquence fait apparaître les mêmes facteurs x³/(exp(x)-1) qui caractérise 'la couleur du trou'

·Pour la puissance totale, la somme sur k se fait pour la lumière qui **sort**, soit k_z>0.

L'intégrale angulaire et l'intégrale sur x se découplent, et on trouve :

$$Q = S c E / V \int_{k_z > 0} \cos \theta \frac{d^2 \Omega}{4\pi}$$

Cette intégrale vaut en prenant cosθ=u: $\int_0^1 u \frac{du}{2} = 1/4$

Soit Q_{tot}=1/4 S cE/V, soit finalement la puissance rayonnée totale par unité de surface J_q=σT⁴, avec $\sigma = \frac{c}{4} 2 \frac{k_B^4}{(hc)^3} 4\pi \frac{\pi^4}{15}$
i.e: σ=5.6e-08 W/m²/K⁴, J_q~500W/m² à T=300K, qui est 'gros'.

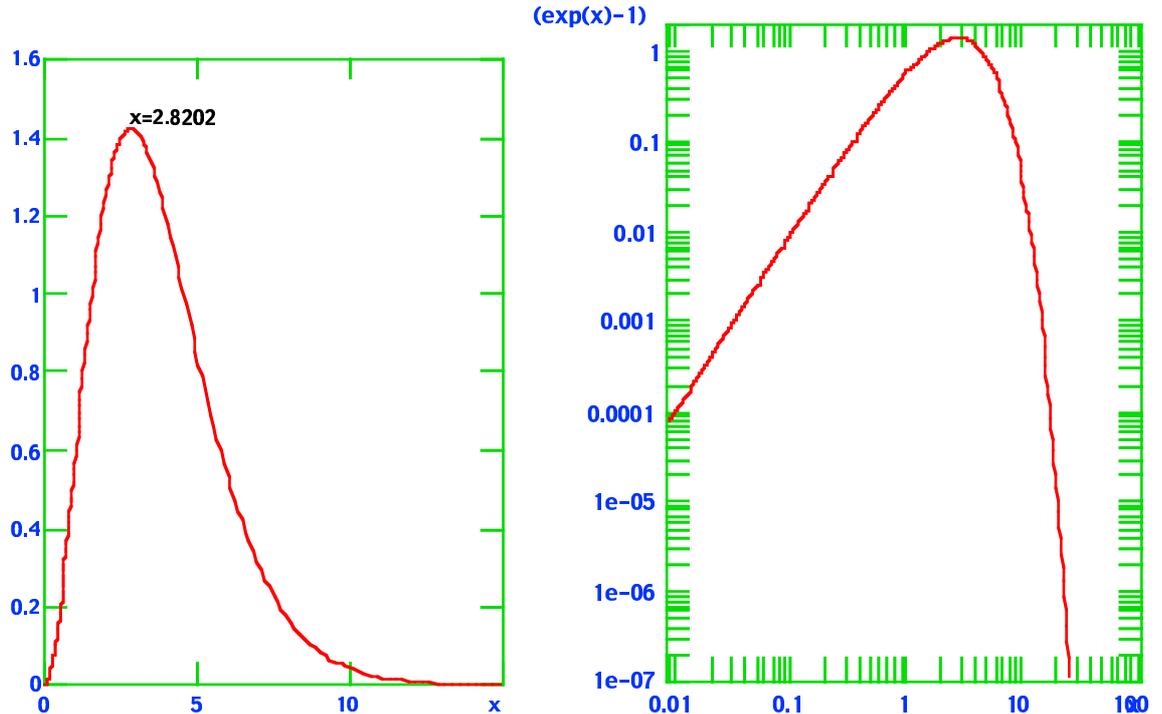


Fig: $x^3/(e^x-1)$ en fonction de $x=hv/k_B T$. Noter la décroissance très rapide pour $x>2.8$

·Raisonnement qualitatif:

Pour un mode tel que $h\nu \ll k_B T$, on a l'équipartition : $E \sim k_B T$
 Pour $h\nu > k_B T$, le mode est 'gelé'. $k = 2\pi k_B T / hc$

On a $\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi/3 (2\pi k_B T / hc)^3$ modes excités avec $k_B T$:

$$E/V \sim k_B T \frac{4\pi}{3} (k_B T / hc)^3$$

A des facteurs de l'ordre de 1 près, ce raisonnement est correct, il manifeste le fait que le quantum d'énergie $h\nu$ est absent si $h\nu > k_B T$, ce qui est visible dans le graphique ci dessus.

En physique classique, ($h \rightarrow 0$) E serait infini!

D'ou la découverte de Planck, qui lie une couleur à une Température par :

$$\lambda_{\max} \sim hc / k_B T / 2.8.$$

Cette lumière à 300K est à $\lambda \sim 18 \mu m$, qui est largement infrarouge.
 La lumière correspondant à $0.6 \mu m$ est à $T \sim 8500K$.

·Notions précise de 'corps noir':

Notre cavité avec son trou est un corps noir idéal, à condition que soit réalisée la condition suivante:

Le trou est assez petit pour que le système {champ E.M} reste à l'équilibre bien qu'il y ait une petite fuite d'énergie. Il faut aussi que la lumière qui rentrerait dans le trou soit totalement absorbée avant d'avoir une chance de ressortir. Ces deux conditions sont en fait équivalentes, et garantissent que le champ dans la

cavité est à l'équilibre avec le champ à l'extérieur si les deux températures sont égales.

En présence de différence de température, le flux net est la différence des σT^4 .

Un matériau réel n'est pas en général un corps noir. S'il n'absorbe pas toute l'énergie incidente à la fréquence ν (coeff d'absorption $\epsilon(\nu)$), et ne peut donc réémettre que $\epsilon(\nu)$ fois le corps noir.

· Si ϵ dépend effectivement de ν dans le visible, le matériau à un aspect coloré.

· Si $\epsilon \ll 1$ (typ. 1% pour les métaux), il apparaît brillant, ou blanc (suivant son état de poli de surface). Une telle paroi entre deux sources de rayonnement à des T différents diminue les échanges radiatifs. Ceci est très important dans l'isolation thermique. (Couvertures de survie, bouteilles thermos, cryostats, satellites, anoraks, greniers).

· Les matériaux très absorbants ($\epsilon \sim 1$), ont des spectres proches de ceux du corps noir idéal.

· La pyrométrie consiste à évaluer la T d'une source par son spectre d'émission. Ceci suppose que cette source, bien que 'brillante', soit 'noire'!

b) Condensation de Bose-Einstein

Bien que ça soit un phénomène simple dans son principe, c'est un sujet qui a fasciné les physiciens depuis sa prédiction, mais qui n'a été observé explicitement que en 97 par Ketterley, puis Cornell suite aux méthodes de refroidissement par laser développées entre autre à Paris dans l'équipe du Prof Cohen Tannoudji, prix Nobel 98.

Considérons le nombre moyen de Bosons dans V en contact avec un réservoir (μ) et thermostat (β):

$$(1) \quad \langle N \rangle = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \text{ avec } n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp(\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)) - 1}$$

$$\text{et aussi } \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(1 + n_{\mathbf{k}})$$

Dans cette somme, on a en principe $\mu < 0$, pour avoir $n_{\mathbf{k}}$ non infini.

Pour augmenter la densité on rapproche μ de zéro, la somme dans (1) peut devenir aussi grande que l'on veut.

A la limite thermodynamique, on a pris l'habitude d'écrire

$$\sum_{\mathbf{k}} \dots = \frac{V}{(2\pi)^3} \int 4\pi k^2 dk \dots$$

$$\text{Ou encore } \sum_{\mathbf{k}} \dots = V \int \rho(e) de \dots$$

$$\text{Soit en principe (2) } \langle N \rangle = V \int \rho(e) \frac{de}{\exp(\beta(e - \mu)) - 1}$$

Si on fait ce changement dans (1), deux scénarios peuvent se produire:

i). Si (2) peut être aussi grand qu'on veut lorsque $\mu \rightarrow 0$, il n'y a pas de problème. Le passage de Σ à f est correct.

ii). Si (2) reste fini lorsque $\mu \rightarrow 0$, il y a un conflit avec (1), qui mathématiquement est lié à la permutation de deux limites $\mu \rightarrow 0$ et $V \rightarrow \infty$. Le passage de Σ à f est certainement faux. Dans ce cas, les premiers (en LE PREMIER) terme dans (1) a un poids qui est négligeable dans (2) et pas dans (1).

Le cas i) est réalisé à 1 et deux dimensions, ou l'intégrale pour $\mu=0$, vers e petit est respectivement $\int \frac{de}{\sqrt{e}\beta e}$ et $\int \frac{de}{\beta e}$

Le cas ii) est réalisé à $d=3$ car l'intégrale vaut: $\int \frac{\sqrt{e} de}{\beta e}$

CONCLUSION: On veut fixer $\langle N \rangle / V$ à une certaine valeur n , à T donné.

$$\text{-On évalue } n_T = \int \rho(e) \frac{de}{\exp(\beta e) - 1}$$

• Si $n_T > n$, μ sera strictement négatif et intensif, donné par :

$$n = \int \rho(e) \frac{de}{\exp(\beta(e-\mu)) - 1}$$

Le nombre de particules dans l'état '0' est alors

$$N_0 = \frac{1}{\exp(-\beta\mu) - 1} \sim \frac{k_B T}{\mu}$$

qui peut être grand mais **intensif**.

• Si $n_T < n$, le calcul est inexact, μ va être infiniment petit, et on aura besoin de calculer explicitement N_0

μ sera alors fixé par :

$$N = V n_T + \frac{k_B T}{\mu}$$

qui donne un $\mu \sim - \frac{k_B T}{V(n - n_T)}$ qui n'est pas extensif.

Le résultat essentiel est que le nombre de particules dans l'état '0' est macroscopique, de l'ordre de $N: N_0 = (n - n_T)V$

• Dans ce dernier cas (cas condensé de Bose), nous allons vérifier que les termes suivants dans Σ ne donnent pas de contribution non négligeable lors du passage à f .

Ces termes sont de l'ordre de $\frac{k_B T}{ph^2/L^2 + \mu}$ avec $\mu \propto 1/V$. On voit immédiatement que μ est négligeable dans cette expression, dès que p , entier est > 0 .

$$n_T = \int \rho(e) \frac{de}{\exp(\beta e) - 1} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{\int \sqrt{x} dx}{\int \sqrt{x} dx \exp(-x)}$$

NB: λ est ici de de-Broglie $\lambda^2 = h^2 / (2\pi m k_B T)$

Ce rapport s'évalue facilement en développant le numérateur en série. **Cette transformation n'a rien à voir avec le passage d'un Σ à une f .**

$$\frac{\int \sqrt{x} dx}{\exp(x) - 1} = \int \sqrt{x} dx \sum_{p \geq 0} \exp(-(p+1)x) = \left(\sum_{p > 0} p^{-3/2} \right) \int \sqrt{x} dx \exp(-x)$$

D'ou le résultat: $n_T = \frac{1}{\lambda^3} \left(\sum_{p > 0} p^{-3/2} \right),$

le dernier nombre est $\zeta(3/2)$ de Riemann ~ 2.612 .

A des températures telles que $n\lambda^3 > \zeta(3/2)$, le système est condensé de Bose. Il est alors très loin du régime de Maxwell-Boltzmann $n\lambda^3 \ll 1$.

L'application de ce critère à l'hélium liquide conduit à une T_c de 3K, proche de celle de superfluidité, 2.17K. Ce qui suggère un lien entre ces deux phénomènes. En fait dans le cas de l'hélium, les interactions entre particules sont très importantes, et le modèle de G.P. quantique n'est pas applicable. Comme preuve, il est superfluide à $d=2$.